ILIE CONSTANTINESCU
CIPRIAN BOLOG

MECANICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ — BUCUREŞTI, 1978

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. doc. ing. **ILIE N. CONSTANTINESCU**
Șef lucr. ing. **CIPRIAN BOLOG**

MECANICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA

Etapa revoluției tehnico-științifice pe care o parcurgem implică cunoașterea și aplicarea celor mai noi cuceriri ale științei contemporane. În acest context, ca dealtfel în întreaga istorie a dezvoltării științei, experimentul sau metodele de investigație trebuie să-și aducă un aport substanțial. Dezvoltarea accelerată a științei mecanicii este legată de utilizarea ultimelor cuceriri tehnice în acest domeniu.

Lucrarea de față este rezultatul experienței didactice și științifice a autorilor; este o lucrare proprie prin stilul ei, prin conducerea demonstrațiilor și interpretarea rezultatelor, prin observațiile și contribuțiile ce le aduce, prin conținutul ei instructiv.

Îmbinînd teoretic și practic, în mod echilibrat, cunoștințele fundamentale cu cele mai noi cuceriri din domeniile respective, cele 6 capitole ale lucrării, după cum și aplicațiile cu care se încheie fiecare subcapitol, se încadrează în concepția modernă de tratare a mecanicii în literatura tehnică modernă mondială.

Această structurare a lucrării este menită să stimuleze spiritul tehnic și științific al studenților, să le ofere direcții de alegere a unor subiecte pentru temele de cercetare în cadrul cercetărilor științifice studențești, să-i familiarizeze cu domeniul mecanicii, cu largi posibilități de aplicare atît în cercetare cît și în tehnică, în vederea integrării învățămîntului cu cercetarea și producția.

Prin conținutul și modul de expunere, lucrarea se adresează în primul rînd studenților de la institutele tehnice de învățămînt superior, avînd drept scop aprofundarea și consolidarea sub aspect teoretic și aplicativ a cunoștințelor predate la cursurile de mecanică, precum și inginerilor din diferite specialități angajați în activitatea de cercetare și proiectare.

Ne exprimăm convingerea că lucrarea de față va constitui un stimulent pentru viitorii ingineri în aprofundarea acestei pasionante științe care, alături de altele, stă la baza disciplinelor tehnice moderne.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefața 3
Introducere 11

1. COMPLEMENTE DE MATEMATICI

1.1. Algebră vectorială aplicată în mecanică

1.1.1. Mărimi scalare și vectoriale. Clasificarea vectorilor 15
1.1.2. Adunarea vectorilor. Regula paralelogramului și poligonului 16
1.1.3. Înmulțirea unui vector cu un scalar. Versor 16
1.1.4. Proiecția unui vector pe o axă. Teorema lui Challes 17
1.1.5. Descompunerea unui vector după două direcții în plan și trei direcții în spațiu. Relația de coliniaritate a doi vectori și de coplanaritate a trei vectori. Expresia hipercomplexă a unui vector 17
1.1.6. Produsul scalar a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică 19
1.1.7. Produsul vectorial a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică 21
1.1.8. Produsul mixt a trei vectori. Definiție. Expresie analitică. Proprietăți 21
1.1.9. Produsul dublu vectorial a trei vectori. Definiție. Formula de descompunere 22
1.1.10. Definiția momentului unui vector alunecător față de un punct. Schimbarea momentului la schimbarea polului 22
1.1.11. Teorema lui Varignon 23
1.1.12. Definiția momentului unui vector alunecător față de o axă. Proprietăți 23
1.1.13. Definiția matematică a momentului unui cuplu de vectori alunecători. Echivalența și compunerea cuplurilor 24
1.1.14. Cupluri de vectori alunecători. Echivalența și compunerea cuplurilor 25
1.1.15. Justificarea reprezentării cuplului de vectori alunecători prin vectorul moment al cuplului 27
1.1.16. Torsorul unui sistem de vectori alunecători. Schimbarea torsorului la schimbarea polului 27
1.1.17. Torsor minim. Axă centrală 29
1.1.18. Reducerea unui sistem de vectori alunecători coplanari. Poligonul funicular 31
1.1.19. Reducerea unui sistem de vectori alunecători paraleli 33
1.1.20. Centrul unui sistem de vectori alunecători paraleli 34
1.1.21. Centrul de greutate și centrul de masă 35
1.1.22. Teoremele lui Guldin 38
1.1.23. Considerații recapitulative 39
Aplicații 40

Scanned with OKEN Scanner

1.2. Analiză vectorială aplicată în mecanică

1.2.1. Vectori variabili. Derivata absolută a vectorilor 44
1.2.2. Reguli pentru derivata absolută 45
1.2.3. Derivata relativă. Formulele lui Poisson. Relația dintre derivata absolută și cea relativă a unui vector 47
1.2.4. Vectorul de poziție, viteza și accelerația unui punct de coordonate carteziene, intrinseci și curbilinii (cazuri particulare: coordonate polare, cilindrice și sferice) 49
1.2.5. Integrale vectoriale 56
1.2.6. Ecuații diferențiale vectoriale 57

1.3. Elemente de teoria distribuțiilor

1.3.1. Noțiunea de distribuție 59
1.3.2. Funcția treaptă a lui Heaviside și impulsul unitar al lui Dirac 59
1.3.3. Operații de derivare și integrare cu funcțiile H și δ în sensul teoriei distribuțiilor 62
1.3.4. Discontinuitățile mecanicii și tratarea lor ca mărimi continui cu ajutorul teoriei distribuțiilor 66
1.3.5. Considerații recapitulative 68

1.4. Elemente de calcul variațional

1.4.1. Problema de bază a calculului variațional. Funcțională. Tipuri de extremum-uri 68
1.4.2. Condiții de extremum. Ecuația lui Euler, ecuația Euler-Poisson și ecuația Euler-Ostrogradski 70
1.4.3. Extremum-uri condiționate 76

1.5. Elemente de algebră matricială

2. ELEMENTELE, PRINCIPIILE ȘI TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE MECANICII

2.1. Elementele fundamentale ale mecanicii

2.1.1. Mărimi fizice. Unități de măsură. Factor de transformare 84
2.1.2. Mărimi și unități fundamentale. Mărimi și unități derivate 85
2.1.3. Sisteme de unități de măsură 86
2.1.4. Omogenitatea dimensională 86
2.1.5. Similitudine 94

2.2. Principiile fundamentale

2.2.1. Principiul inerției 95
2.2.2. Principiul acțiunii forței 95
2.2.3. Principiul acțiunii și reacțiunii 96
2.2.4. Principiul independenței acțiunii forțelor și principiul paralelogramului 96
2.2.5. Principiul condițiilor inițiale 96
2.2.6. Problemele generale ale dinamicii 96

Scanned with OKEN Scanner

2.3. Teoremele fundamentale ale mecanicii

2.3.1. Legături. Clasificarea legăturilor. Forțe și momente de legătură. Principiul forțelor de legătură 97
2.3.2. Forțe exterioare, interioare și de legătură 104
2.3.3. Viteza și accelerația la mișcarea rectilinie și circulară a punctului material 108
2.3.4. Viteza și accelerația unui punct material aflat în mișcare relativă 110
2.3.5. Distribuția de viteze și accelerații la mișcarea generală a rigidului 114
2.3.6. Momente de inerție mecanice 115
2.3.7. Variația momentelor de inerție la translația și la rotația axelor. Formulele lui Steiner. Elipsoidul de inerție 118
2.3.8. Impulsul și momentul cinetic 129
2.3.9. Teorema impulsului. Teorema mișcării centrului de masă. Conservarea impulsului 131
2.3.10. Teorema momentului cinetic. Conservarea momentului cinetic. Viteză areolară. Teorema ariilor 134
2.3.11. Energie cinetică. Lucru mecanic 139
2.3.12. Teorema energiei cinetice. Conservarea energiei mecanice 161
2.3.13. Considerații recapitulative 169
Aplicații 170

3. PUNCTUL MATERIAL

3.1. Mișcarea, echilibrul și repausul punctului material

3.2. Mișcări simple ale punctului material

3.2.1. Mișcarea rectilinie uniformă și uniform variată 179
3.2.2. Mișcarea circulară uniformă și uniform variată 183
3.2.3. Mișcarea oscilatorie 186
3.2.4. Mișcarea în cîmpul gravitațional în vid și în aer 188
Aplicații 192

3.3. Punctul material legat pe o suprafață sau pe o curbă

3.3.1. Frecarea de alunecare 195
3.3.2. Punctul material legat pe o suprafață lucie 197
3.3.3. Punctul material legat pe o suprafață aspră 199
3.3.4. Punctul material legat pe o curbă lucie 200
3.3.5. Pendulul matematic 201
3.3.6. Punctul material legat pe o curbă aspră 204
3.3.7. Brachistocronele 205
Aplicații 209

3.4. Punctul material acționat de forțe centrale. Atracția universală

3.4.1. Formula lui Binet 212
3.4.2. Mișcarea sub acțiunea forțelor de atracție universală 213
3.4.3. Legile lui Kepler 214
3.4.4. Determinarea excentricității conicei cu ajutorul condițiilor inițiale 215

Scanned with OKEN Scanner

3.5. Punctul material de masă variabilă

3.5.1. Ecuația lui Mescerski generalizată 216
3.5.2. Formula lui Țiolkovski 218
Aplicații 219

3.6. Mișcarea și repausul relativ al punctului material

3.6.1. Ecuațiile de mișcare și repaus relativ 223

4. RIGIDUL

4.1. Mișcarea, echilibrul și repausul rigidului

4.1.1. Ecuațiile de mișcare ale rigidului 224
4.1.2. Ecuațiile de echilibru ale rigidului 225
4.1.3. Ecuațiile de repaus ale rigidului 228

4.2. Rigidul cu un punct fix

4.2.1. Echilibrul rigidului cu un punct fix 229
4.2.2. Relațiile cinematice ale lui Euler 229
4.2.3. Ecuațiile dinamice ale lui Euler. Mișcarea rigidului cu un punct fix 231
4.2.4. Mișcarea de precesie regulată a giroscopului. Cuplul giroscopic 233
4.2.5. Stabilitatea axei giroscopului 235
4.2.6. Efecte giroscopice 236
Aplicații 240

4.3. Rigidul cu o axă fixă

4.3.1. Echilibrul rigidului cu axă fixă 242
4.3.2. Mișcarea rigidului cu axă fixă 244
4.3.3. Noțiuni de echilibrare statică și dinamică 247
4.3.4. Pendulul fizic. Teorema lui Huygens 248
4.3.5. Tipuri de pendule fizice; pendulul lui Kater, pendulul lui Mach și pendulul inelar 250
Aplicații 253

4.4. Rigidul ce poate executa o mișcare plană

4.4.1. Ecuațiile de echilibru ale rigidului ce poate executa o mișcare plană 257
4.4.2. Ecuațiile de mișcare ale rigidului aflat într-o mișcare plană 259
4.4.3. Proprietăți ale distribuțiilor de viteze și accelerații la mișcarea plană a rigidului .. 261
Aplicații 267

4.5. Mișcarea relativă a rigidului

4.5.1. Compunerea vitezelor și a accelerațiilor la mișcarea relativă a rigidului 268

Scanned with OKEN Scanner

5. SISTEME DE PUNCTE ŞI RIGIDE

5.1. Principii generale

5.1.1. Mişcarea, echilibrul şi repausul sistemelor de puncte şi rigide 273
5.1.2. Frecări la contactul între corpuri: frecarea de alunecare, de rostogolire şi de pivotare 273
5.1.3. Mişcarea de rostogolire şi alunecare. Frecarea în lagăre şi articulaţii 276
Aplicaţii 280

5.2. Echilibrul firelor

5.2.1. Ecuaţiile generale ale echilibrului firelor suspendate la capete 284
5.2.2. Firul omogen greu cu săgeată mare 286
5.2.3. Firul omogen greu cu săgeată mică şi firul cu sarcină distribuită uniform pe orizontală 288
5.2.4. Echilibrul firelor acţionate de forţe concentrate 291
5.2.5. Echilibrul cu frecare al firelor 292
Aplicaţii 294

5.3. Grinzi cu zăbrele

5.3.1. Generalităţi 295
5.3.2. Metoda izolării nodurilor 297
5.3.3. Metoda secţiunilor 299
5.3.4. Metoda înlocuirii barelor 301
5.3.5. Metoda Cremona 302
Aplicaţii 304

5.4. Mişcări percutante

5.4.1. Teoreme generale 307
5.4.2. Ciocnirea centrică şi oblică a două sfere 310
5.4.3. Percuţii aplicate unui corp cu axă fixă. Centrul de percuţie 313
5.4.4. Oscilatorul liniar percutat 316
5.4.5. Percuţii la aplicarea bruscă de legături rigide. Teorema lui Carnot 317
Aplicaţii 318

5.5. Mişcări vibratorii

5.5.1. Vibraţii cu un grad de libertate 321
5.5.2. Vibraţii cu n grade de libertate 325
5.5.3. Vibraţii cu un număr infinit de grade de libertate 333
5.5.4. Vibraţiile corpurilor cu mase adiţionale concentrate 341
Aplicaţii 345

6. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

Introducere

6.1. Principii diferenţiale

6.1.1. Principiul lui d'Alembert. Torsorul forţelor de inerţie 349
6.1.2. Principiul deplasărilor virtuale şi principiul vitezelor virtuale. Aplicaţie: principiul lui Torricelli 351

Scanned with OKEN Scanner

6.1.3. Ecuațiile lui Lagrange 356
6.1.4. Ecuațiile canonice ale lui Hamilton 360
6.1.5. Parantezele lui Poisson 362
6.1.6. Transformările canonice și ecuația Hamilton-Jacobi 364
Aplicații 366

6.2. Principii integrale

6.2.1. Principiul minimei acțiuni al lui Hamilton și principiul lui Maupertuis 372
6.2.2. Considerații asupra principiului lui Hamilton și a consecințelor sale 373
Bibliografie 375

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Ne vom permite să omitem o prezentare a naşterii şi dezvoltării Mecanicii şi a numelor celebre de oameni de ştiinţă care şi-au dedicat cercetările lor ridicării acestui măreţ edificiu pe care-l numim Mecanică. Asemenea descrieri şi prezentări pot fi găsite uşor în monografii de istoria ştiinţelor, precum şi în multe tratate şi cursuri de Mecanică.

Noi ne vom mărgini aici să prezentăm doar o definiţie a Mecanicii şi unele noţiuni legate de această definiţie, trecînd apoi la o clasificare sumară a subdiviziunilor Mecanicii şi încheind cu o scurtă prezentare a cursului de faţă.

Mecanica este acea parte a Fizicii care se ocupă cu studiul mişcărilor mecanice, specificînd că se numeşte mişcare mecanică schimbarea în timp a poziţiilor corpurilor, unele faţă de altele.

Acest studiu se face alegînd un anume corp ca reper şi legînd solidar de el un sistem de referinţă, mişcările celorlalte corpuri fiind apoi studiate faţă de acest reper. Cum în natură nu există nimic despre care să putem afirma că este fix (mişcarea este modul de existenţă a materiei), reperele cu care lucrăm vor fi în mod necesar mobile. Dintre aceste repere se distinge o clasă (un grup) de repere faţă de care legile mişcării se scriu sub o formă mai simplă şi în care principiile de bază ale Mecanicii (stabilite de *Newton*) rămîn invariabile ca formă. Acestea sînt reperele inerţiale. Un reper inerţial este un reper în care un corp punctiform aflat la distanţe suficient de mari de orice alte corpuri (pentru a nu fi influenţat de acestea) se află fie în repaus, fie în mişcare rectilinie şi uniformă (cu viteză constantă). Orice sistem de referinţă aflat în mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă faţă de un sistem inerţial este tot un sistem inerţial. Proprietatea tuturor acestor sisteme de a fi echivalente între ele (principiile Mecanicii exprimîndu-se identic în toate sistemele inerţiale) poartă numele de principiu al relativităţii. El se aplică atît în Mecanica clasică cît şi în Teoria relativităţii restrînse (care este un capitol al Mecanicii relativiste).

Diferenţa dintre Mecanica clasică şi Mecanica relativistă constă în modul de a privi noţiunile fundamentale ale Mecanicii (spaţiul, timpul şi masa), mai exact în proprietăţile atribuite lor.

Mecanica clasică (care istoriceşte a apărut prima) consideră aceste noţiuni fundamentale absolut independente una faţă de alta şi avînd următoarele proprietăţi:

— *Spaţiul* este infinit, tridimensional, continuu şi izotrop. Acesta este spaţiul euclidian care permite aplicarea geometriei euclidiene şi a calculului infinitezimal.

— *Timpul* este infinit, continuu şi omogen.

Scanned with OKEN Scanner

— *Masa* este o mărime scalară pozitivă, invariabilă, care reflectă proprietăţile inerţiale şi de gravitaţie ale materiei. *Masa inertă* reflectă proprietatea de inerţie a materiei şi ea intervine în legea fundamentală a Mecanicii.

$$\bar{F} = m\bar{a}.$$

— *Masa gravifică* reflectă proprietatea materiei de a produce un cîmp gravitaţional. Ea intervine în legea atracţiei universale (numită şi legea gravitaţiei universale):

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

unde F este forţa cu care se atrag reciproc două particule de mase m_1 şi m_2, situate la distanţa r între ele.

Mecanica relativistă priveşte noţiunile de spaţiu, timp şi masă ca formînd o unitate dialectică cu interdependenţe. Datorită acestora se modifică unele proprietăţi ale noţiunilor fundamentale. Astfel:

— Spaţiul nu mai este omogen şi izotrop.

— Timpul nu mai este omogen.

— Masa nu mai este invariabilă, ci depinde de viteza cu care se mişcă respectivul corp.

Aceste noi puncte de vedere au fost acceptate (şi deci Mecanica relativistă a apărut) în momentul în care s-au ivit primele rezultate experimentale care contraziceau concluziile calculului teoretic al Mecanicii clasice.

Aceste experienţe se refereau la mişcările cu viteze mari (în special mişcările particulelor atomice), pentru care deci trebuie să aplicăm rezultatele Mecanicii relativiste. Mişcările cu viteze mici* se pot studia însă foarte bine cu ajutorul Mecanicii clasice, diferenţele dintre rezultatele sale şi cele ale Mecanicii relativiste fiind extrem de mici în acest caz.

Cum marea majoritate a mişcărilor întîlnite în tehnică sînt mici în raport cu viteza luminii, ele se pot foarte bine studia cu ajutorul legilor Mecanicii clasice, de aici rezultînd şi importanţa sa practică.

În funcţie de natura corpurilor studiate Mecanica clasică se împarte în: *Mecanica teoretică* (sau Mecanica corpurilor rigide), *Mecanica corpurilor deformabile* (Rezistenţa materialelor, Teoria elasticităţii, Teoria plasticităţii) şi *Mecanica fluidelor*, care la rîndul său cuprinde Aeromecanica (sau Mecanica gazelor) şi Hidromecanica (sau Mecanica lichidelor).

Dintre toate aceste Mecanici prima care a apărut din punct de vedere istoric este Mecanica teoretică, ale cărei baze teoretice ca ştiinţă au fost puse de către celebrul *Newton*. Ulterior din aceasta s-au dezvoltat şi celelalte ramuri ale Mecanicii. Importanţa covîrşitoare a Mecanicii teoretice rezultă nu numai din această filiaţiune, ci şi din faptul că apariţia şi dezvoltarea Mecanicii teoretice a impulsionat dezvoltarea tehnicii şi chiar a unor capitole ale Matematicii cu care a mers, să spunem aşa, mînă în mînă.

Mecanica teoretică acceptă două modele pentru descrierea corpurilor pe care le studiază. Acestea sînt: punctul material şi rigidul. *Punctul material*

---

* Noţiunile de viteză mică sau mare se apreciază în funcţie de valoarea raportului v/c în care c este viteza luminii. O viteză v este mică atunci cînd acest raport se poate neglija şi mare în caz contrar.

Scanned with OKEN Scanner

se definește ca fiind un corp cu masă finită, dar cu dimensiuni neglijabile (asimilabil deci cu un punct geometric din punct de vedere al dimensiunilor). *Rigidul* se definește ca fiind un corp cu dimensiuni (și masă) finite și nedeformabil (distanțele dintre diferitele sale puncte nu se modifică indiferent de acțiunile suferite din exterior).

În expunerea Mecanicii teoretice unii autori preferă împărțirea acesteia în următoarele diviziuni: Statica (studiul echilibrului corpurilor sub acțiunea forțelor), Cinematica (studiul mișcărilor corpurilor fără a ține seama de acțiunea forțelor), Dinamica (studiul mișcărilor corpurilor sub acțiunea forțelor) și Mecanica analitică (capitol special care stabilește legi generale care permit studierea analitică a echilibrului sau mișcării sistemelor de corpuri evitînd introducerea forțelor de legătură). Noi am preferat însă o altă ordine a expunerii, plecînd de la ideea (de loc nouă) de a studia toate problemele punctului material (de echilibru și mișcare) într-un capitol și problemele rigidului într-altul. Această aranjare permite compararea ecuațiilor de echilibru cu cele de mișcare ale aceluiași corp, în prezența acelorași legături, putînd fi astfel observate mai ușor diferențele ce apar între mărimile fizice similare corespunzător celor două situații în care se poate afla corpul: echilibru sau repaus.

Am mai plecat apoi și de la o a doua idee, și anume aceea că toate fenomenele mecanice care implică discontinuități (atît în timp cît și în spațiu) pot fi tratate împreună cu fenomenele continui într-un mod absolut unitar (cu aceleași ecuații) și mult mai ușor utilizînd teoria distribuțiilor. Această idee s-a impus mai ales în ultimele două decenii prin apariția atît la noi cît și pe plan mondial a numeroase cursuri și tratate care demonstrează elocvent valabilitatea și eficacitatea acestei idei la care au subscris cu căldură mai de multă vreme și autorii acestei cărți.

Plecînd de la aceste două idei generale am organizat materia Mecanicii teoretice în următoarele șase capitole:

1. *Complemente de matematici*, unde sînt trecute în revistă unele capitole de matematici necesare acestui curs.

2. *Elementele, principiile și teoremele fundamentale ale Mecanicii*, unde teorema momentului cinetic și teorema energiei cinetice au fost obținute în cazul cel mai general posibil.

3. *Punctul material*, unde sînt tratate problemele de repaus, echilibru și mișcare ale punctului material.

4. *Rigidul*, unde sînt tratate problemele de repaus, echilibru și mișcare ale rigidului.

5. *Sisteme de puncte și rigide*, unde sînt expuse unele probleme specifice sistemelor de puncte și rigide, cum sînt: frecările dintre corpuri, echilibrul firelor, problemele grinzilor cu zăbrele plane și spațiale, mișcările percutante studiate cu ajutorul teoriei distribuțiilor) și mișcările vibratorii (în expunerea cărora am adoptat o linie modernă bazată pe faptul că studiul vibrațiilor nedisipative ale oricărui sistem, indiferent de numărul finit sau infinit de grade de libertate, poate fi redus la rezolvarea unei probleme de valori proprii a unui operator pozitiv și autoadjunct).

6. *Elemente de Mecanică analitică*, unde s-a făcut o expunere sumară a unor principii diferențiale și integrale ale Mecanicii analitice.

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește aplicațiile cu care se încheie subcapitolele acestui curs, menționăm că ori de cîte ori a fost posibil au fost alese astfel încît să ilustreze aplicabilitatea practică, în tehnică, a teoriei expuse. Dealtfel considerăm că acest curs se adresează cu precădere studenților de la Institutele Politehnice și inginerilor, atît din producție cît și din cercetare și proiectare. El poate fi însă consultat cu folos de către toți cei interesați în studiul Mecanicii teoretice, cu condiția de a avea nivelul necesar de cunoștințe matematice (nivelul anului I de la Institutele Politehnice).

Încheiem aici această prezentare exprimîndu-ne speranța că prezentul curs se va dovedi util atît prin cele expuse în cadrul lui cît și prin extinderile pe care le sugerează.

Scanned with OKEN Scanner

1. COMPLEMENTE DE MATEMATICI

1.1. ALGEBRA VECTORIALĂ APLICATĂ ÎN MECANICĂ

În cele ce urmează se presupun cunoscute elementele de algebră vectorială studiate în cadrul cursurilor de matematici și se va face doar o trecere în revistă a acestora, a principalelor operații și proprietăți utilizate, dezvoltîndu-se corespunzător partea aplicată în mecanică și anume algebra vectorilor alunecători.

1.1.1. **Mărimi scalare și vectoriale. Clasificarea vectorilor.** Mărimile fizice pentru a căror caracterizare completă este suficient un scalar (adică un număr) se numesc *mărimi scalare*. Exemple sînt: masa, timpul etc.

Mărimile fizice pentru a căror caracterizare completă sînt necesare mai multe numere reale sînt *vectorii* și *tensorii*. Necesitatea definirii și studierii mărimilor vectoriale a apărut odată cu constatarea că există mărimi fizice (ca spre exemplu: viteza, forța etc.) pentru a căror caracterizare nu este suficientă doar intensitatea lor, ci și definirea unei direcții de acțiune, a unui sens și uneori anumite caracteristici ale originii vectorului. În consecință o reprezentare geometrică evidentă a vectorilor este un segment de dreaptă spațial AB (fig. 1.1) la care distingem:

— valoarea sau modulul: distanța AB măsurată în unitățile de măsură corespunzătoare (folosind deci o scară);

— direcția: o definim prin a spune că toate dreptele (suporturile) paralele cu o dreaptă determină o aceeași direcție;

— sensul: unul dintre cele două moduri posibile de a parcurge o dreaptă (în cazul nostru de la A spre B);

— originea (punctul de aplicație): punctul A;

— extremitatea: punctul B.

Există mai multe criterii de clasificare a vectorilor, dintre care cel mai important în mecanică este criteriul tipului originii. Conform acestui criteriu distingem:

— *vectori liberi*, a căror origine poate fi mutată oriunde în spațiu (păstrînd modulul, direcția și sensul) fără ca efectul vectorului să se schimbe;

— *vectori alunecători*, a căror origine poate fi deplasată doar pe suportul propriu (în condițiile de mai sus);

— *vectori legați*, a căror origine e legată într-un anumit punct.

În cele ce urmează vectorii se vor nota cu o bară deasupra literei sau literelor ce îi desemnează, litera fără bară semnificînd modulul vectorului respectiv.

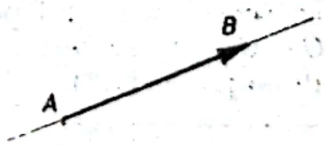


Fig. 1.1

Scanned with OKEN Scanner

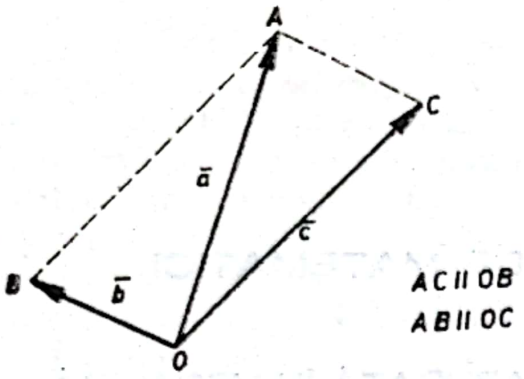


Fig. 1.2

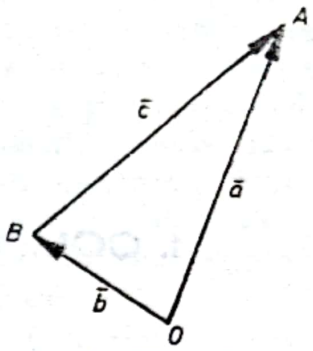


Fig. 1.3

1.1.2. **Adunarea vectorilor. Regula paralelogramului și poligonului.** Adunarea vectorilor după regula paralelogramului are la bază principiul paralelogramului care spune că acțiunea mecanică a două forțe de mărimi și direcții diferite ce acționează simultan într-un punct este echivalentă cu acțiunea unei singure forțe a cărei mărime, direcție și sens sînt date de diagonala paralelogramului construit cu cei doi vectori forță ca laturi. Echivalența de mai sus, stabilită experimental, este transpusă matematic prin relația:

$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}, \tag{1.1}$$

care se spune că este efectuată după regula paralelogramului dacă vom considera figura 1.2 și după regula poligonului dacă vom considera figura 1.3.

Cele două reguli de adunare dau același rezultat, ceea ce reiese evident din egalitatea triunghiurilor OAB din cele două figuri. Regula poligonului are însă avantaje evidente la însumarea mai multor vectori.

Adunarea vectorială (sau geometrică) are proprietățile de a fi asociativă și comutativă:

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \tag{1.2}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \tag{1.3}$$

1.1.3. **Înmulțirea unui vector cu un scalar. Versor.** Prin definiție, rezultatul înmulțirii unui vector $\bar{a}$ cu scalarul m este vectorul $\bar{b}$ definit astfel:

— modulul: $b = |m| \cdot a$

— direcția: $\bar{b} \parallel \bar{a}$

— sensul: același sau contrar cu $\bar{a}$ după cum m este pozitiv sau negativ.

Împărțirea unui vector cu un scalar revine la a înmulți vectorul cu inversul scalarului respectiv.

Prin împărțirea unui vector cu propriul său modul se obține un vector de mărime unitară, cu aceeași direcție și același sens cu vectorul considerat. Acest vector unitar se numește versor:

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}}{a} \quad (u = 1). \tag{1.4}$$

Se numește versor al unei axe vectorul unitar dirijat după acea axă, cu sensul în sensul pozitiv al axei. Versorii axelor de coordonate carteziene Ox, Oy, Oz se vor nota cu notațiile consacrate $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ($\bar{i}$ și $\bar{j}$ fără puncte deasupra barei*).

---

* prin punct deasupra unei funcții sau vector se notează derivata în raport de timp a acelei funcții sau vector.

Scanned with OKEN Scanner

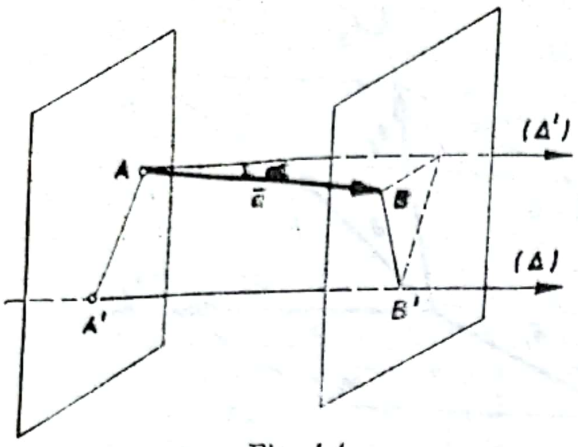


Fig. 1.4

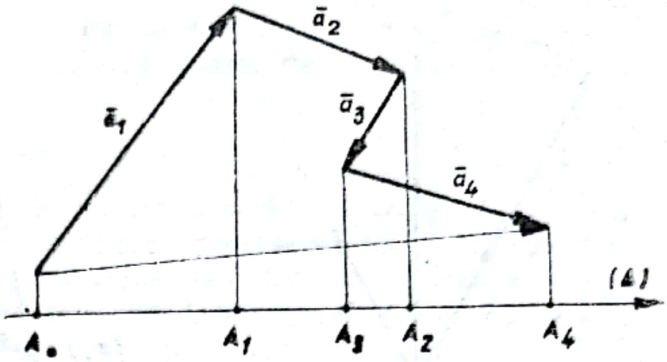


Fig. 1.5

1.1.4. **Proiecția unui vector pe o axă. Teorema lui Challes.** Fie un vector $\bar{a}$ și o axă Δ (fig. 1.4). Se numește proiecția vectorului $\bar{a}$ pe axa Δ și se notează $\mathrm{pr}_{(\Delta)}\bar{a}$, lungimea segmentului orientat interceptat pe axă de cele două plane normale la axă trecînd prin originea și respectiv extremitatea vectorului $\bar{a}$.

Ca expresie matematică se poate scrie:

$$\mathrm{pr}_{(\Delta)}\bar{a} = a \cdot \cos\alpha, \tag{1.5}$$

în care α este unghiul dintre vector și axă, unghi ce poate fi atît ascuțit cît și obtuz ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$).

Ca regulă practică se poate considera formula:

$$\mathrm{pr}_{(\Delta)}\bar{a} = \pm a \cos\beta, \tag{1.6}$$

în care se consideră semnul + sau — după cum unghiul α este ascuțit sau obtuz, iar β este unghiul ascuțit dintre vector și direcția axei.

Vom considera acum vectorii $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ (fig. 1.5), generalizarea pentru n vectori făcîndu-se ușor. Proiectînd pe axa Δ acești vectori, precum și suma lor vectorială $\bar{s}$, efectuată grafic prin metoda poligonului, se observă ușor valabilitatea relației (extinsă pentru n vectori):

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{(\Delta)}\bar{a}_i = \mathrm{pr}_{(\Delta)}\bar{s}, \tag{1.7}$$

care este exprimarea matematică a teoremei lui *Challes:* suma algebrică a proiecțiilor pe o axă a mai multor vectori este egală cu proiecția pe acea axă a sumei vectoriale a vectorilor considerați (sau mai pe scurt, suma proiecțiilor este egală cu proiecția sumei).

1.1.5. **Descompunerea unui vector după două direcții în plan și trei direcții în spațiu. Relația de coliniaritate a doi vectori și de coplanaritate a trei vectori. Expresia hipercomplexă a unui vector.** Descompunerea unui vector după două direcții coplanare cu vectorul se face pe baza regulii paralelogramului, care e o relație biunivocă între o pereche de vectori și suma lor. Deci descompunerea este unică (fig. 1.6), efectuîndu-se prin ducerea a două paralele din extremitatea A la cele două direcții Δ_1 și Δ_2.

Scanned with OKEN Scanner

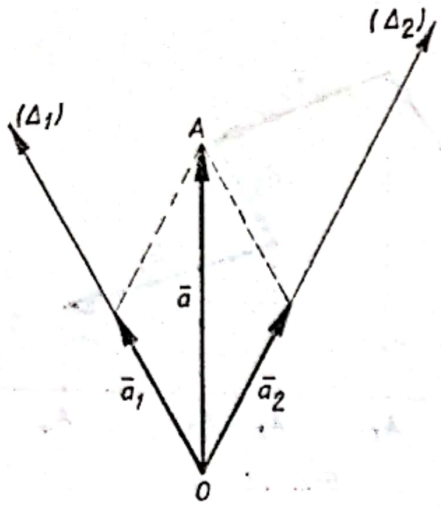


Fig. 1.6

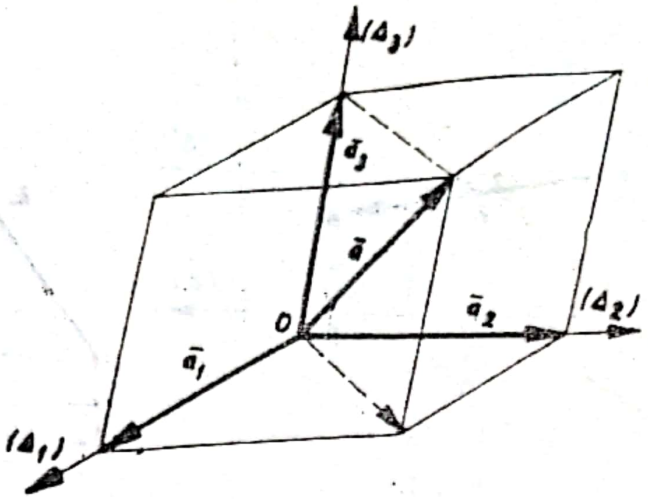


Fig. 1.7

Fie acum vectorul $\bar{a}$ (fig. 1.7) și trei direcții spațiale Δ_1, Δ_2, Δ_3. Ducînd din extremitatea A cele trei plane paralele la perechile de drepte $\Delta_2\,\Delta_3$, $\Delta_3\Delta_1$, $\Delta_1\Delta_2$ acestea vor intercepta de la O pe cele trei direcții Δ_1, Δ_2 și respectiv Δ_3, vectorii $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, a căror construcție este unică și a căror sumă vectorială este vectorul $\bar{a}$. Evident că în cazul particular a trei direcții ortogonale prisma oblică din figura 1.7 se transformă într-un paralelipiped dreptunghic.

Vom considera acum doi vectori coliniari $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. 1.8). Relația de coliniaritate a celor doi vectori se poate scrie imediat sub forma:

$$\bar{a} = m\bar{b}, \tag{1.8}$$

în care scalarul m este unic determinat prin relațiile:

$$|m| = \frac{a}{b}; \tag{1.9}$$

$$m \begin{cases} > 0 \text{ dacă } \bar{a} \text{ și } \bar{b} \text{ au același sens} \\ < 0 \text{ dacă } \bar{a} \text{ și } \bar{b} \text{ au sensuri contrare.} \end{cases} \tag{1.10}$$

Fie acum vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$ coplanari (fig. 1.9). Descompunerea vectorului $\bar{a}$ după cele două direcții date de vectorii $\bar{b}$ și $\bar{c}$ este unică și se face ca în

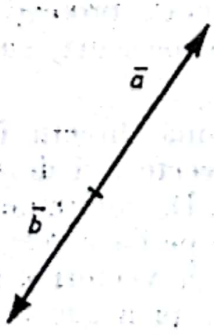


Fig. 1.8

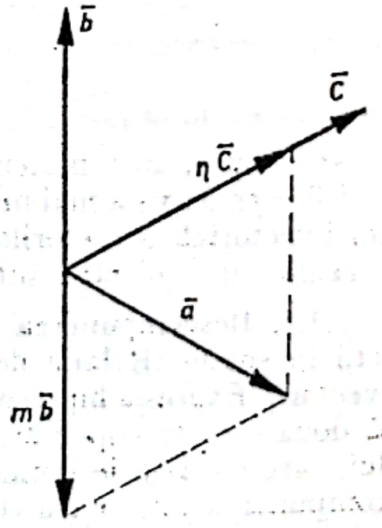


Fig. 1.9

Scanned with OKEN Scanner

figura 1.6. Cele două componente ale lui $\bar{a}$ coliniare cu $\bar{b}$, respectiv cu $\bar{c}$, se pot scrie conform relației (1.8) sub forma $m\bar{b}$, respectiv $n\bar{c}$, unde m și n sînt scalari unic determinați. În concluzie relația de coplanaritate a trei vectori este relația liniară:

$$\bar{a} = m\bar{b} + n\bar{c}. \tag{1.11}$$

Fie acum (fig. 1.10) un sistem de referință cartezian $Oxyz$* în a cărui origine construim un vector $\bar{a}$. Descompunerea acestui vector după cele trei axe se face ca în figura 1.7. Cele trei componente coliniare cu axele sînt coliniare cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ și în concluzie pot fi scrise sub forma $a_x\bar{i}$, $a_y\bar{j}$ și $a_z\bar{k}$ (a_x, a_y, a_z fiind proiecțiile vectorului $\bar{a}$ pe cele trei axe).

Putem deci scrie relația:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \tag{1.12}$$

care se numește *expresia hipercomplexă* (sau expresia analitică) a vectorului $\bar{a}$.

O scriere prescurtată a acestei relații este:

$$\bar{a}(a_x,\ a_y,\ a_z). \tag{1.13}$$

Modulul vectorului $\bar{a}$ se calculează cu relația:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{1.14}$$

care se numește teorema lui Pitagora generalizată în spațiu.

1.1.6. **Produsul scalar a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică.** Fiind dați doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numește *produs scalar* al celor doi vectori (și se notează $\bar{a} \cdot \bar{b}$) scalarul:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha, \tag{1.15}$$

în care α este unghiul dintre cei doi vectori (fig. 1.11).

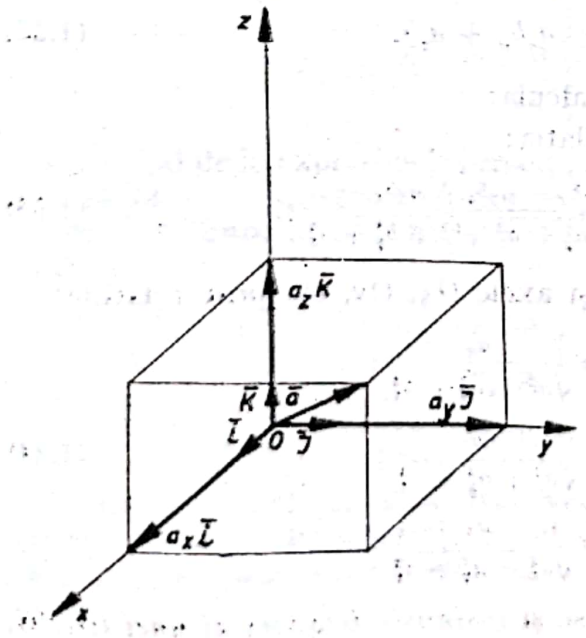


Fig. 1.10

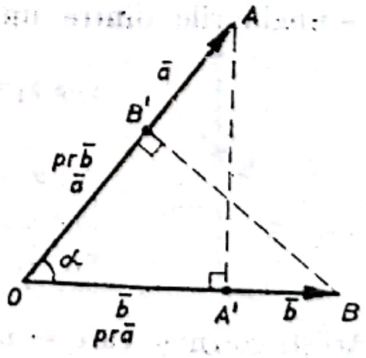


Fig. 1.11

* Toate sistemele de referință utilizate în această carte sînt ortogonale și drepte.

Scanned with OKEN Scanner

Tot din figura 1.11 se poate vedea ușor că produsul scalar al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ mai poate fi exprimat în funcție de proiecțiile vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, fiecare pe celălalt, sub formele:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot \mathrm{pr}_{(\bar{a})}\bar{b} = b \cdot \mathrm{pr}_{(\bar{b})}\bar{a}. \tag{1.16}$$

Din relația (1.16) urmează imediat că proiecția unui vector $\bar{a}$ pe o axă Δ de versor $\bar{u}$ se poate scrie:

$$\mathrm{pr}_{(\Delta)}\,\bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{u}. \tag{1.17}$$

Produsul scalar are următoarele proprietăți: —

— e comutativ:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}; \tag{1.18}$$

— e asociativ în raport cu înmulțirea cu un scalar:

$$m \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (m \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (m \cdot \bar{b}); \tag{1.19}$$

— e distributiv față de suma vectorială:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}; \tag{1.20}$$

— se anulează cînd vectorii sînt perpendiculari (sau unul din ei nul — caz banal):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \begin{cases} \bar{a} = 0 & \text{sau} \\ \bar{b} = 0 & \text{sau} \\ \bar{a} \perp \bar{b}. \end{cases} \tag{1.21}$$

Toate aceste proprietăți se demonstrează foarte simplu.

Plecînd acum de la expresiile hipercomplexe ale vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, pe baza proprietății (1.20) se obține expresia analitică a produsului scalar:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.22}$$

Pe baza acestei relații se pot calcula:

— unghiul a doi vectori prin relația:

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}; \tag{1.23}$$

— unghiurile dintre un vector și axele Ox, Oy, Oz prin relațiile:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{i}}{a \cdot 1} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \\ \cos \alpha_2 &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{j}}{a \cdot 1} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \\ \cos \alpha_3 &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{k}}{a \cdot 1} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Acești cosinuși care se mai numesc și *cosinușii directori ai unei direcții*, satisfac relația evidentă:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1. \tag{1.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

1.1.7. **Produsul vectorial a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică.** Fiind dați vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numește *produs vectorial* al celor doi vectori (și se notează $\bar{a} \times \bar{b}$) vectorul:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}, \tag{1.26}$$

definit în felul următor:

— modulul:

$$c = a \cdot b \cdot \sin \alpha, \tag{1.27}$$

(α fiind unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$)

— direcția:

$$\bar{c} \perp \bar{a} \text{ și } \bar{c} \perp \bar{b}, \tag{1.28}$$

(deci $\bar{c}$ e perpendicular pe planul definit de $\bar{a}$ și $\bar{b}$)

— sensul: conform regulii burghiului (sau șurubului drept) care spune că sensul lui $\bar{c}$ este sensul de înaintare al unui burghiu (sau șurub drept) cînd acesta este rotit de la primul factor $\bar{a}$ spre cel de-al doilea factor $\bar{b}$ al produsului vectorial (fig. 1.12).

Produsul vectorial are următoarele proprietăți relativ ușor de demonstrat:

— e anticomutativ:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}; \tag{1.29}$$

— e asociativ în raport cu înmulțirea cu un scalar:

$$m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b}); \tag{1.30}$$

— e distributiv față de suma vectorială:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}; \tag{1.31}$$

— se anulează cînd vectorii sînt paraleli (sau cînd unul e nul — caz banal):

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0 \begin{cases} \bar{a} = 0 & \text{sau} \\ \bar{b} = 0 & \text{sau} \\ \bar{a} \parallel \bar{b}. \end{cases} \tag{1.32}$$

Plecînd de la expresiile hipercomplexe ale vectorilor, pe baza proprietății (1.31) se obține expresia analitică a produsului vectorial sub forma unui determinant simbolic care nu are sens decît dezvoltat după prima linie (a versorilor):

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

1.1.8. **Produsul mixt a trei vectori. Definiție. Expresie analitică. Proprietăți.** Fiind dați trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$ se numește *produs mixt* al celor trei vectori scalarul:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}). \tag{1.34}$$

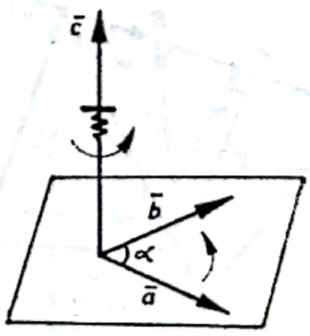


Fig. 1.12

Scanned with OKEN Scanner

Expresia analitică a produsului mixt se obține pe baza relațiilor (1.22) și (1.33) sub forma determinantului:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

Proprietățile produsului mixt se obțin folosind proprietățile determinanților și anume: faptul că la o permutare simplă a două linii semnul determinantului se schimbă (și deci la o permutare dublă valoarea determinantului rămîne neschimbată) și faptul că un determinant cu două linii proporționale sau cu o linie combinație liniară a celorlalte două este nul. De aici deducem relațiile:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}); \tag{1.36}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a} \parallel \bar{b} & \text{sau} \\ \bar{b} \parallel \bar{c} & \text{sau} \\ \bar{c} \parallel \bar{a} & \text{sau} \\ \bar{a} = m\bar{b} + n\bar{c}. \end{cases} \tag{1.37}$$

Acestea sînt singurele proprietăți ale produsului mixt folosite în cele ce urmează.

1.1.9. **Produsul dublu vectorial a trei vectori. Definiție. Formula de descompunere.** Fiind dați vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ se numește *produs dublu vectorial* al celor trei vectori, vectorul:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}). \tag{1.38}$$

Utilizînd relațiile (1.22) și (1.33) se poate obține formula de descompunere a produsului dublu vectorial:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\,\bar{c}. \tag{1.39}$$

1.1.10. **Definiția momentului unui vector alunecător față de un punct. Schimbarea momentului la schimbarea polului.** Fie un vector alunecător $\bar{a}$ (fig. 1.13) și un punct O, numit și pol, care nu aparține suportului lui $\bar{a}$.

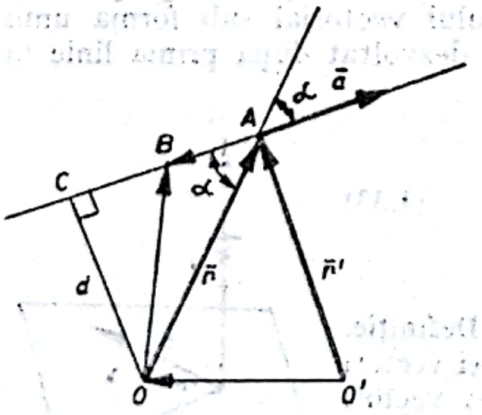


Fig. 1.13

Se definește ca moment al vectorului alunecător $\bar{a}$ față de polul O vectorul:

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{a}, \tag{1.40}$$

în care $\bar{r} = \overline{OA}$ se numește vectorul de poziție al punctului de aplicație al vectorului $\bar{a}$.

Se observă că atunci cînd vectorul $\bar{a}$ alunecă cu originea în B momentul său față de O nu se schimbă deoarece:

$$\overline{OB} \times \bar{a} = (\bar{r} + \overline{AB}) \times \bar{a} = \bar{r} \times \bar{a} + \overline{AB} \times \bar{a} = \bar{M}_o, \tag{1.41}$$

$\overline{AB}$ și $\bar{a}$ fiind coliniari.

Modulul momentului este:

$$M_o = r \cdot a \cdot \sin \alpha = d \cdot a, \tag{1.42}$$

d fiind distanța de la pol la suportul vectorului $\bar{a}$. Această distanță se numește brațul vectorului $\bar{a}$ față de O.

Se observă ușor că între cele două momente ale lui $\bar{a}$ față de O și O' (aceștia fiind doi poli arbitrari) există relația:

$$\bar{M}_{o'} = \bar{M}_o + \overline{O'O} \times \bar{a}. \tag{1.43}$$

1.1.11. **Teorema lui Varignon.** Fie un sistem de n vectori $\bar{a}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) concurenți în punctul A. Considerăm un pol O și numim vector moment rezultant față de O al sistemului de vectori $\bar{a}_i$ vectorul:

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA} \times \bar{a}_i. \tag{1.44}$$

Dacă notăm prin $\bar{s}$ suma vectorială a vectorilor $\bar{a}_i$ și o numim rezultanta acestora:

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i, \tag{1.45}$$

se vede ușor că:

$$\bar{M}_o = \overline{OA} \times \bar{s}. \tag{1.46}$$

Această relație exprimă *teorema lui Varignon* și anume: *momentul rezultant față de un pol al unui sistem de vectori concurenți este egal cu momentul față de acel pol al rezultantei sistemului.*

1.1.12. **Definiția momentului unui vector alunecător față de o axă. Proprietăți.** Fie un vector alunecător $\bar{a}$ și o axă Δ (fig. 1.14). Definim ca moment al vectorului $\bar{a}$ față de axa Δ proiecția pe această axă a momentului lui $\bar{a}$ în raport cu un punct arbitrar al axei.

Alegem un punct O al axei și scriem vectorul moment:

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{a}. \tag{1.47}$$

Pentru a-l proiecta pe axă îl înmulțim scalar cu versorul $\bar{u}$ al axei. Deci momentul lui $\bar{a}$ față de Δ este scalarul:

$$M_\Delta = \bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{a}). \tag{1.48}$$

Alegînd O' ca punct al axei față de care calculăm momentul lui $\bar{a}$ obținem:

$$M'_\Delta = \bar{u} \cdot (\bar{r}' \times \bar{a}). \tag{1.49}$$

Însă:

$$M'_\Delta = \bar{u} \cdot [(\overline{O'O} + \bar{r}) \times \bar{a}] = \bar{u} \cdot (\overline{O'O} \times \bar{a}) + \bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{a}) = \bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{a}), \tag{1.50}$$

întrucît $\bar{u}$ și $\overline{O'O}$ sînt coliniari (1.37). Deci:

$$M_\Delta = M'_\Delta \tag{1.51}$$

și faptul că polul O de pe axă poate fi ales arbitrar e astfel demonstrat.

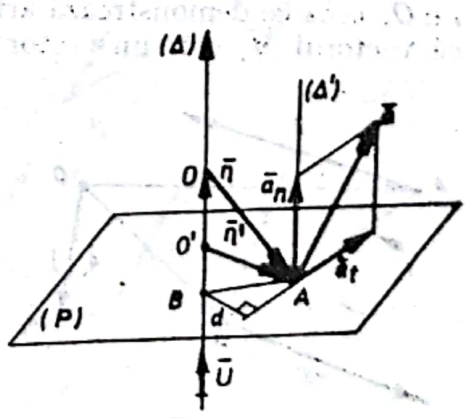


Fig. 1.14

Scanned with OKEN Scanner

Vom duce acum prin originea A a vectorului $\bar{a}$ o dreaptă Δ' paralelă cu axa Δ și un plan (P) perpendicular pe ea. În planul determinat de $\bar{a}$ și Δ' îl vom descompune pe $\bar{a}$ după Δ' și dreapta de intersecție a celor două plane construite. Se obțin componentele $\bar{a}_n$ și $\bar{a}_t$.

În acest caz se poate scrie:

$$M_\Delta = \bar{u} \cdot [\bar{r} \times (\bar{a}_n + \bar{a}_t)] = \bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{a}_n) + \bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{a}_t) = \bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{a}_t), \quad (1.52)$$

$\bar{u}$ și $\bar{a}_n$ fiind paraleli.

Notînd cu B punctul în care axa Δ înțeapă planul (P) avem:

$$M_\Delta = \bar{u} \cdot [(\overline{OB} + \overline{BA}) \times \bar{a}_t] = \bar{u} \cdot (\overline{OB} \times \bar{a}_t) + \bar{u} \cdot (\overline{BA} \times \bar{a}_t) = \\ = \bar{u} \cdot (\overline{BA} \times \bar{a}_t), \quad (1.53)$$

$\bar{u}$ și $\overline{OB}$ fiind coliniari. Însă vectorul $\overline{BA} \times \bar{a}_t$ este normal la planul (P), deci paralel cu $\bar{u}$. Deci M_Δ va fi:

$$M_\Delta = \pm \mid \overline{BA} \times \bar{a}_t \mid = \pm d \cdot a_t. \quad (1.54)$$

Deci momentul unui vector alunecător față de o axă este egal în mărime cu produsul dintre mărimea proiecției vectorului pe un plan perpendicular pe axă și brațul acestei proiecții față de punctul în care axa înțeapă planul.

1.1.13. **Definiția matematică a momentului unui cuplu de vectori alunecători. Echivalența și compunerea cuplurilor.** Se numește un *cuplu de vectori* un sistem de doi vectori egali în modul, cu suporturi paralele și de sensuri contrare.

Considerăm acum un cuplu de vectori alunecători (fig. 1.15).

Prin definiție, numim moment al cuplului de vectori alunecători suma vectorială a momentelor celor doi vectori față de un punct arbitrar al spațiului.

Vectorii cuplului din figură sînt $\bar{a}$ și $-\bar{a}$, iar punctul arbitrar al spațiului este O.

Conform definiției vom scrie vectorul moment al cuplului sub forma:

$$\bar{M}_c = \overline{OA} \times \bar{a} + \overline{OB} \times (-\bar{a}), \quad (1.55)$$

care se mai poate scrie:

$$\bar{M}_c = (\overline{OA} - \overline{OB}) \times \bar{a} = \overline{BA} \times \bar{a} = \overline{AB} \times (-\bar{a}) = \\ = \bar{M}_B(\bar{a}) = \bar{M}_A(-\bar{a}). \quad (1.56)$$

După cum se vede ultimele două forme sînt independente de alegerea lui O, ceea ce demonstrează arbitrarul alegerii acestui punct și implicit faptul că vectorul $\bar{M}_c$ este un vector liber. De asemenea aceste ultime două forme de scriere a momentului $\bar{M}_c$ ne arată că momentul unui cuplu de vectori alunecători este egal cu momentul unuia dintre vectorii cuplului față de punctul de aplicație al celuilalt.

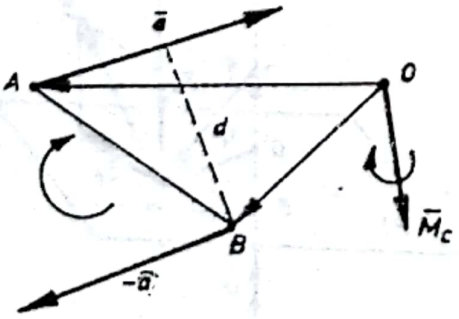


Fig. 1.15

În consecință modulul vectorului moment al unui cuplu este:

$$M_c = a \cdot d, \quad (1.57)$$

în care a este modulul vectorilor cuplului, iar d este distanța între ei, numită și braț al cuplului de vectori.

Scanned with OKEN Scanner

Direcția vectorului $\overline{M}_c$ este normală la planul de acțiune al cuplului, iar sensul e dat de regula burghiului aplicată pentru sensul de rotație al vectorilor cuplului (fig. (1.15).

Din proprietatea foarte importantă a momentului unui cuplu de a fi vector liber și din acceptul de a reprezenta un cuplu prin momentul său definit ca mai sus, rezultă imediat unele proprietăți privind echivalența cuplurilor. Evident, două cupluri se vor numi echivalente cînd au același vector moment reprezentativ al cuplului. De aceea două cupluri se vor numi echivalente cînd au:

a — același modul: $a_1 d_1 = a_2 d_2$;

b — plane de acțiune paralele (eventual confundate) pentru ca vectorii moment ai cuplurilor să aibă aceeași direcție;

c — același sens de rotație al vectorilor cuplului pentru ca vectorii moment să aibă același sens.

Considerăm acum două cupluri de vectori alunecători ale căror momente reprezentative sînt $\overline{M}_{c1}$ și $\overline{M}_{c2}$. Pe baza proprietății acestor vectori de a fi vectori liberi, oricare din ei poate fi adus cu originea sa în originea celuilalt și avînd acum doi vectori concurenți ei vor fi echivalenți cu vectorul:

$$\overline{M}_c = \overline{M}_{c1} + \overline{M}_{c2}. \tag{1.58}$$

Deci două cupluri de vectori alunecători sînt echivalente cu un singur cuplu al cărui vector reprezentativ este suma vectorială a vectorilor moment ai celor două cupluri.

Această proprietate de compunere a cuplurilor, precum și proprietățile de echivalență vor fi verificate în paragraful 1.1.15 cu proprietățile cuplurilor de vectori alunecători deduse fără a recurge la relația (1.55) a momentului reprezentativ al unui cuplu. Pe baza identității acestor proprietăți se va justifica introducerea relației (1.55).

1.1.14. **Cupluri de vectori alunecători. Echivalența și compunerea cuplurilor.** În cele ce urmează vom folosi două proprietăți evidente ale vectorilor alunecători, precum și regula paralelogramului pentru însumarea vectorială a doi vectori concurenți. Cele două proprietăți sînt:

— un vector alunecător poate fi mutat cu originea oriunde pe suportul propriu păstrîndu-i neschimbate mărimea, direcția și sensul (definiția vectorului alunecător);

— un sistem de vectori echivalent cu zero poate fi oricînd adăugat sau scos dintr-un sistem fără ca starea acestuia din urmă să se schimbe.

Fie acum un cuplu de vectori alunecători $(\overline{V}_1, -\overline{V}_1)$ aplicați în punctele *A* și *B* (fig. 1.16). Vom alege acum o direcție Δ arbitrară din planul cuplului

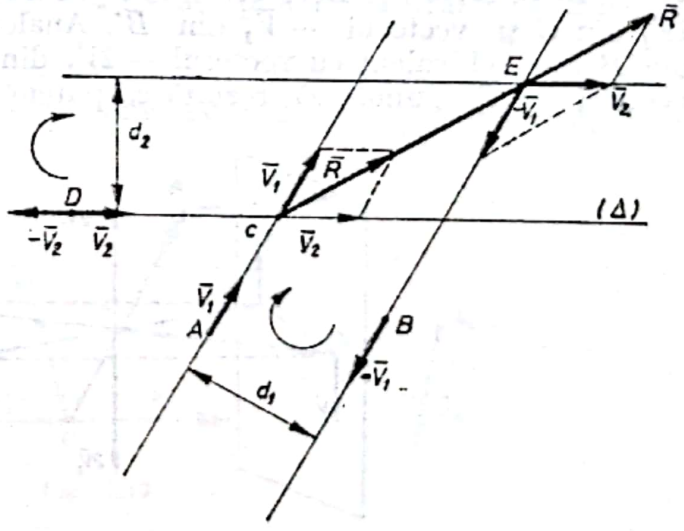


Fig. 1.16

Scanned with OKEN Scanner

și vom introduce în punctul D sistemul echivalent cu zero $(\overline{V}_2, -\overline{V}_2)$, modulul vectorilor $\overline{V}_2$ fiind și el arbitrar. Vom muta vectorul $\overline{V}_1$ din A în C, unde vom aduce și vectorul $\overline{V}_2$. Acum cei doi vectori concurenți îi vom înlocui cu rezultanta lor $\overline{R} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$, pe care apoi o mutăm în E. În acest punct vom muta și vectorul $-\overline{V}_1$. Vectorii $\overline{R}$ și $-\overline{V}_1$ îi vom înlocui cu rezultanta lor care este $(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) - \overline{V}_1 = \overline{V}_2$. În final am obținut cuplul de vectori $(\overline{V}_2, -\overline{V}_2)$ din punctele E și D. Aplicînd teorema lui Varignon față de punctul E pentru vectorii aplicați în C, obținem:

$$\overline{M}_E(\overline{V}_1) + \overline{M}_E(\overline{V}_2) = \overline{M}_E(\overline{R}) = 0. \tag{1.59}$$

Din relația (1.59) deducem:

$$V_1 d_1 = V_2 d_2, \tag{1.60}$$

unde d_1 și d_2 sînt distanțele dintre vectorii cuplurilor, numite și brațele cuplurilor. Vom numi moment al unui cuplu produsul dintre modulul vectorilor cuplului și brațul său.

$$M_c = Vd \tag{1.61}$$

Observînd pe figura 1.16 că cele două cupluri $(\overline{V}_1, -\overline{V}_1)$ și $(\overline{V}_2, -\overline{V}_2)$ au același sens de rotație figurat prin săgețile curbe din figură, putem spune că două cupluri coplanare de vectori alunecători sînt echivalente dacă au același moment și același sens de rotație. Mărimile vectorilor cuplurilor și direcțiile acestor vectori pot fi luate arbitrar.

$$M_{c1} = M_{c2} \tag{1.62}$$

Vom considera acum două plane paralele (P_1) și (P_2). În planul (P_1) luăm cuplul de vectori alunecători $(\overline{V}_1, -\overline{V}_1)$ din A și B (fig. 1.17).

Proiectăm segmentul AB pe planul (P_2) obținînd segmentul $A'B'$ și formînd dreptunghiul $ABB'A'$, cu diagonalele AB' și $A'B$ ce se taie în C. Introducem în A' și B' perechile de vectori $(\overline{V}_1, -\overline{V}_1)$ care sînt echivalente cu zero.

Cuplul de vectori $\overline{V}_1$ din A și $-\overline{V}_1$ din B' este echivalent cu cuplul $2\overline{V}_1$ din C și $-2\overline{V}_1$ din B' $(AB' = 2CB')$. Suma vectorilor din B' este $-2\overline{V}_1 + \overline{V}_1 = -\overline{V}_1$. Deci vectorul $\overline{V}_1$ din A este echivalent cu vectorul $2\overline{V}_1$ din C și vectorul $-\overline{V}_1$ din B'. Analog se vede că vectorul $-\overline{V}_1$ din B este echivalent cu vectorul $-2\overline{V}_1$ din C și vectorul $\overline{V}_1$ din A'. Cum vectorii din C se anulează, rezultă că putem înlocui cuplul de vectori alune-

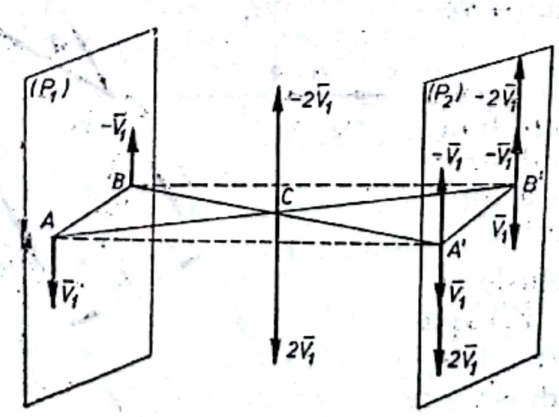


Fig. 1.17

cători $(\bar{V}_1, -\bar{V}_1)$ din A și B prin cuplul $(\bar{V}_1, -\bar{V}_1)$ din A' și B'. Deci cuplurile de vectori alunecători pot fi mutate prin translație în plane paralele.

În concluzie, în cazul cel mai general, două cupluri de vectori alunecători sînt echivalente dacă:

a — au aceeași valoare a momentului $M_{c1} = M_{c2}$;

b — au plane de acțiune paralele;

c — au același sens de rotație.

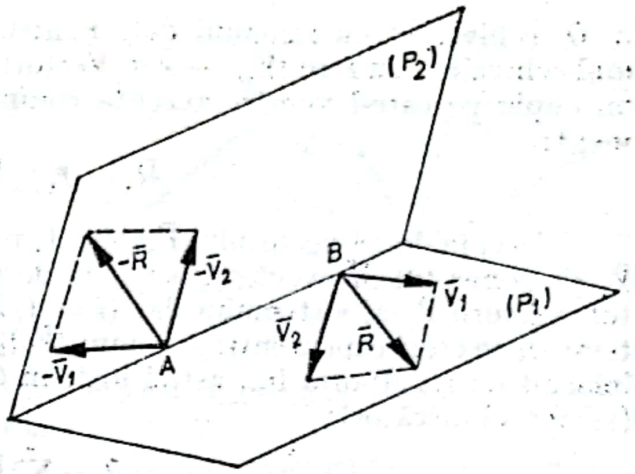


Fig. 1.18

Considerînd acum cîte un cuplu de vectori alunecători în planele (P_1) și (P_2) (fig. 1.18) vom transforma cele două cupluri în cuplurile $(\bar{V}_1, -\bar{V}_1)$ și $(\bar{V}_2, -\bar{V}_2)$, astfel încît ambele să aibă același braț $AB = d$ și vectorii să fie perpendiculari pe dreapta de intersecție a celor două plane. Compunînd acum vectorii din A și din B, obținem cuplul rezultantelor $(\bar{R}, -\bar{R})$. Aplicînd teorema lui Varignon față de punctul A pentru vectorii din B rezultă:

$$\bar{M}_A(\bar{V}_1) + \bar{M}_A(\bar{V}_2) = \bar{M}_A(\bar{R}). \tag{1.63}$$

1.1.15. **Justificarea reprezentării cuplului de vectori alunecători prin vectorul moment al cuplului.** Comparînd condițiile de echivalență *a*, *b* și *c* și relația de compunere a cuplurilor (1.58) din paragraful 1.1.13., unde s-a plecat de la convenția de a reprezenta un cuplu de vectori alunecători prin vectorul moment al cuplului (1.55), cu condițiile de echivalență *a*, *b* și *c* și relația de compunere (1.63), deduse în paragraful 1.1.14., pe baza proprietății vectorilor de a fi alunecători și aplicînd regula paralelogramului pentru vectorii concurenți, se justifică imediat utilizarea reprezentării unui cuplu de vectori alunecători prin vectorul liber moment al cuplului (1.55) scris eventual sub una din formele foarte convenabile (1.56).

1.1.16. **Torsorul unui sistem de vectori alunecători. Schimbarea torsorului la schimbarea polului.** Fie un sistem discret de vectori alunecători $\{\bar{V}_i\}_1^n$ cu punctele de aplicație $\{A_i\}_1^n$ și fie un punct arbitrar O numit pol (fig. 1.19).

Vom considera vectorii $\overline{OA_i} = \bar{r}_i$ numiți vectori de poziție ai punctelor A_i față de O. Dorim acum să găsim cel mai simplu sistem de vectori aplicați

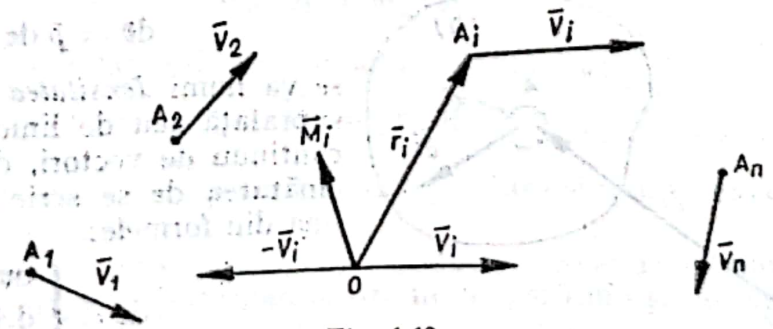


Fig. 1.19

în O, echivalent cu sistemul dat. Pentru aceasta vom introduce în O sistemul echivalent cu zero $(\bar{V}_i, -\bar{V}_i)$. Vectorii $\bar{V}_i$ din A_i și $-\bar{V}_i$ din O formează un cuplu pe care-l vom reprezenta conform relației (1.56) prin vectorul moment:

$$\bar{M}_i = \bar{r}_i \times \bar{V}_i. \tag{1.64}$$

Deci în locul vectorului $\bar{V}_i$ din A_i putem pune în O vectorul alunecător $\bar{V}_i$ și momentul $\bar{M}_i$ vector liber, dat de relația (1.64). Procedînd analog cu toți vectorii $\bar{V}_i$ ai sistemului dat ($i = 1, 2, \ldots, n$), vom obține în O două sisteme de vectori concurenți: sistemul $\{\bar{V}_i\}_i^n$ și sistemul $\{\bar{M}_i\}_i^n$. Fiecare poate fi înlocuit cu rezultanta lui, astfel încît în O vom obține în final rezultanta $\bar{R}$ (vector alunecător):

$$\bar{R} = \sum_i^n \bar{V}_i \tag{1.65}$$

și vectorul moment rezultant $\bar{M}_o$ (vector liber, reprezentînd un cuplu de vectori alunecători):

$$\bar{M}_o = \sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{V}_i. \tag{1.66}$$

Ansamblul $(\bar{R}, \bar{M}_o)$ format de vectorii rezultantă și moment rezultant se numește torsorul de reducere în O al sistemului de vectori $\{\bar{V}_i\}_i^n$.

Fie acum un sistem continuu de vectori alunecători distribuiți într-un anumit domeniu (D) al spațiului. Fie A un punct arbitrar al acestui domeniu și $d\varepsilon$ o vecinătate a lui A, vecinătate care va fi elementul de volum dv, elementul de suprafață dA sau elementul de arc ds, după cum domeniul (D) este respectiv tri-, bi- sau unidimensional (fig. 1.20).

Fie $d\bar{v}$ vectorul ce revine vecinătății $d\varepsilon$. Fie O un punct arbitrar din spațiu și fie $\bar{r}$ vectorul de poziție al lui A față de polul O. În continuare vom proceda la reducerea sistemului de vectori în O exact ca mai sus, singura deosebire de calcul fiind faptul că sumele vor deveni acum integrale. Deci vom obține în O rezultanta:

$$\bar{R} = \int_{(D)} d\bar{v} = \int_{(D)} \bar{p}\, d\varepsilon \tag{1.67}$$

și momentul rezultant:

$$\bar{M}_o = \int_{(D)} \bar{r} \times d\bar{v} = \int_{(D)} \bar{r} \times \bar{p}\, d\varepsilon. \tag{1.68}$$

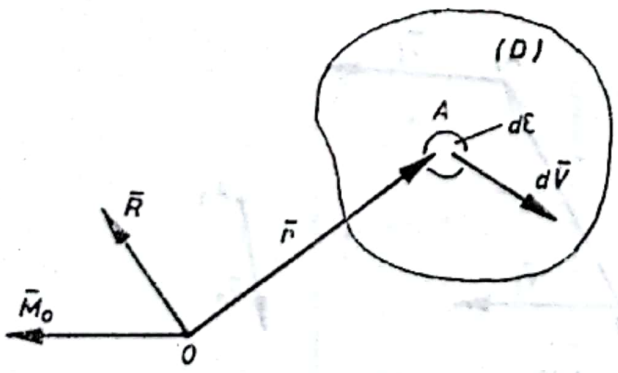


Fig. 1.20

Vectorul $\bar{p}$ din relația:

$$d\bar{v} = \bar{p}\, d\varepsilon \tag{1.69}$$

se va numi *densitatea de volum*, de suprafață sau de linie a sistemului continuu de vectori, după cum vecinătatea $d\varepsilon$ se scrie respectiv sub una din formele:

$$d\varepsilon = \begin{cases} dv \\ dA \\ ds. \end{cases} \tag{1.70}$$

Scanned with OKEN Scanner

Integralele din relațiile (1.67) și (1.68) reprezintă, datorită relațiilor (1.70), integrale de volum, de suprafață sau curbilinii, după cum domeniul (D) este respectiv tri-, bi- sau unidimensional. Evident, pentru domenii simetrice ordinul integralelor se reduce. Aceste integrale vectoriale se calculează prin proiectarea lor pe axele unui triedru cartezian ortogonal (pentru amănunte a se vedea paragraful 1.2.5).

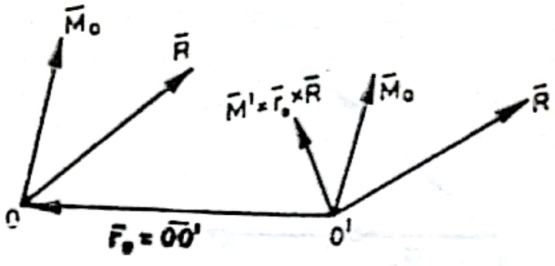


Fig. 1.21

Dorim acum să găsim relațiile ce există între elementele torsorilor de reducere ai aceluiași sistem de vectori alunecători în două puncte arbitrare O și O' ale spațiului. Pentru aceasta vom considera torsorul $(\bar{R}, \bar{M}_o)$ din O și un alt punct arbitrar O' (fig. 1.21).

Vectorul liber $\bar{M}_o$ din O poate fi mutat în O'. Vectorul alunecător $\bar{R}$ din O este însă echivalent în O' cu vectorul $\bar{R}$ și momentul:

$$\bar{M}'_{o'} = \overline{O'O} \times \bar{R}. \tag{1.71}$$

În concluzie, în O' vom avea vectorul alunecător $\bar{R}$ și vectorul moment rezultant (vector liber):

$$\bar{M}_{o'} = \bar{M}_o + \overline{O'O} \times \bar{R}. \tag{1.72}$$

Putem deci scrie cei doi torsori cu relațiile dintre ei sub forma:

$$O \begin{cases} \bar{R} = \Sigma \bar{V}_i \left(= \int_{(D)} \bar{p}\, d\varepsilon \right) \\ \bar{M}_o = \Sigma \bar{r}_i \times \bar{V}_i \left(= \int_{(D)} \bar{r} \times \bar{p}\, d\varepsilon \right) \end{cases}$$

$$O' \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{M}_{o'} = \bar{M}_o + \overline{O'O} \times \bar{R}. \end{cases} \tag{1.73}$$

Observăm că rezultanta unui sistem de vectori alunecători este un invariant la schimbarea polului.

1.1.17. **Torsor minim. Axă centrală.** Înmulțind scalar cu $\bar{R}$ relația (1.72) obținem:

$$\bar{M}_{o'} \cdot \bar{R} = \bar{M}_o \cdot \bar{R}, \tag{1.74}$$

care cu ajutorul relației (1.16) se aduce la forma:

$$\mathrm{pr}_{\bar{R}} \cdot \bar{M}_{o'} = \mathrm{pr}_{\bar{R}} \bar{M}_o. \tag{1.75}$$

Relația (1.75) arată că proiecția $\mathrm{pr}_{\bar{R}} \bar{M}_o$ este (ca și rezultanta) un invariant la schimbarea polului.

Această relație de invarianță ne conduce imediat la concluzia că vectorul moment coliniar cu rezultanta este în același timp și vectorul moment minim.

Într-adevăr, dacă vom aduce toți vectorii moment rezultant cu originile într-un același punct A în care vom lua și rezultanta, extremitățile aces-

Scanned with OKEN Scanner

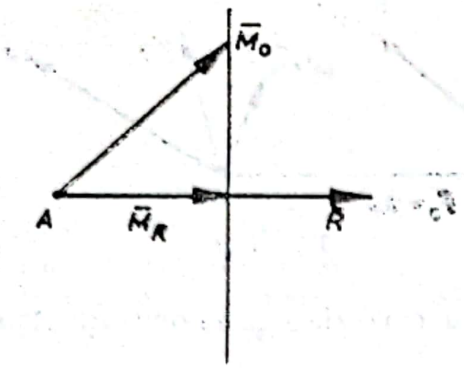


Fig. 1.22

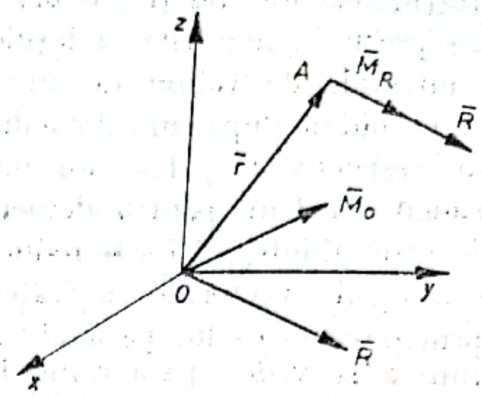


Fig. 1.23

tor vectori moment vor trebui să se găsească într-un plan perpendicular pe rezultantă și se observă imediat că vectorul moment coliniar cu rezultanta, avînd mărimea egală cu lungimea perpendicularei din A pe plan, va fi mai mic decît toți ceilalți vectori moment, care vor fi niște oblice (fig. 1.22).

Fie vectorul moment minim:

$$\bar{M}_R = \lambda \bar{R}. \tag{1.76}$$

Ansamblul format de vectorul rezultantă și vectorul moment minim se numește torsor minim.

Locul geometric al punctelor din spațiu în care reducerea unui sistem de vectori alunecători conduce la torsorul minim vom demonstra că este o dreaptă pe care o vom numi axa centrală a sistemului de vectori alunecători.

Fie O originea unui sistem de referință cartezian $Oxyz$, iar $\bar{R}(R_x, R_y, R_z)$ și $\bar{M}_0(M_x, M_y, M_z)$ elementele torsorului de reducere în O al unui sistem de vectori alunecători (fig. 1.23). Fie A un punct al locului geometric căutat. Momentul rezultant din A va trebui să fie deci vectorul moment minim din relația (1.76). Notînd cu $\bar{r}(x, y, z)$ vectorul de poziție al punctului $A(x, y, z)$, se poate scrie relația:

$$\bar{M}_R = \bar{M}_0 + \overline{AO} \times \bar{R} = \bar{M}_0 - \bar{r} \times \bar{R} \tag{1.77}$$

sau:

$$\lambda \bar{R} = \bar{M}_0 - \bar{r} \times \bar{R}. \tag{1.78}$$

Relația (1.78) conduce prin calcule succesive la:

$$\bar{R} \times \lambda \bar{R} = \bar{R} \times \bar{M}_0 - \bar{R} \times (\bar{r} \times \bar{R})$$

$$\bar{R} \times \bar{M}_0 - R^2 \bar{r} + (\bar{R} \cdot \bar{r}) \cdot \bar{R} = 0$$

$$\bar{r} - \frac{1}{R^2} (\bar{R} \times \bar{M}_0) = \mu \bar{R}. \tag{1.79}$$

Relațiile (1.78) și (1.79) reprezintă două forme sub care se scrie ecuația vectorială a axei centrale.

Scanned with OKEN Scanner

Proiectînd pe cele trei axe de coordonate aceste două relații și eliminînd scalarii arbitrari λ, respectiv μ, se obțin două forme ale ecuațiilor scalare ale axei centrale și anume:

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z}; \qquad (1.80)$$

$$\frac{x - \frac{1}{R^2}(R_yM_z - R_zM_y)}{R_x} = \frac{y - \frac{1}{R^2}(R_zM_x - R_xM_z)}{R_y} = \frac{z - \frac{1}{R^2}(R_xM_y - R_yM_x)}{R_z}. \qquad (1.81)$$

Ecuațiile (1.80) sînt ecuațiile a două plane (deci o dreaptă), iar ecuațiile (1.81) sînt ecuațiile canonice ale unei drepte paralele cu rezultanta $\bar{R}$.

Observație: cînd unul sau doi dintre numitorii rapoartelor din aceste două relații sînt nuli, vom anula și numărătorii respectivi, iar cînd toți numitorii sînt nuli, sistemul nu are axă centrală, deoarece rezultanta $\bar{R}$ fiind nulă, vectorul moment rezultant este invariant la schimbarea polului, conform relației (1.72) și deci nu se mai poate pune problema unui torsor minim.

Remarcăm faptul că aceste observații nu modifică întru nimic concluzia că locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu rezultanta $\bar{R}$ (cînd aceasta există).

1.1.18. **Reducerea unui sistem de vectori alunecători coplanari. Poligonul funicular.** Fie un sistem continuu sau discret de vectori alunecători situat într-un plan în care vom lua un pol O. Prin O vom lua axele O_x și O_y în acest plan și O_z normală la plan (fig. 1.24).

Se observă imediat că vectorii $\bar{V}_i$, respectiv densitatea de suprafață sau de linie $\bar{p}$, se vor scrie:

$$\bar{V}_i(V_{ix}, V_{iy}, 0); \qquad (1.82)$$

$$\bar{p}(p_x, p_y, 0). \qquad (1.83)$$

Vectorii de poziție $\bar{r}_i$, respectiv $\bar{r}$, se vor scrie:

$$\bar{r}_i(x_i, y_i, 0); \qquad (1.84)$$

$$\bar{r}(x, y, 0). \qquad (1.85)$$

Rezultanta și momentul rezultant obținute cu relațiile (1.65)—(1.68) vor fi:

$$\bar{R}(R_x, R_y, 0); \qquad (1.86)$$

$$\bar{M}_o(0, 0, M_z), \qquad (1.87)$$

în care:

$$R_x = \Sigma V_{ix}\left(=\int_{(D)} p_x \, d\varepsilon\right); \qquad (1.88)$$

$$R_y = \Sigma V_{iy}\left(=\int_{(D)} p_y \, d\varepsilon\right); \qquad (1.89)$$

$$M_z = \Sigma(x_iV_{iy} - y_iV_{ix})\left(= \int_{(D)} (xp_y - yp_x)\, d\varepsilon\right). \qquad (1.90)$$

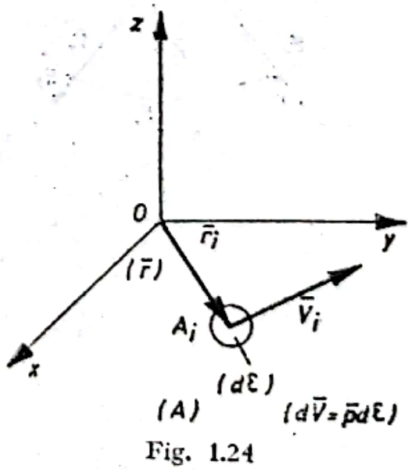


Fig. 1.24

Se observă că vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}_o$ sînt perpendiculari, deoarece:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = 0 \tag{1.91}$$

și deci torsorul minim va fi format din rezultanta $\bar{R}$ și momentul minim:

$$\bar{M}_R = 0. \tag{1.92}$$

Ecuațiile axei centrale obținute din ecuațiile (1.81) vor fi:

$$\begin{cases} xR_y - yR_x - M_z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{1.93}$$

care reprezintă o dreaptă din planul Oxy.

Pentru a evita calculul proiecțiilor R_x, R_y și M_z, care poate fi uneori anevoios, inginerii folosesc frecvent o metodă grafică, numită metoda poligonului funicular, care are pe lîngă avantajul simplității și avantajul de a permite nu numai găsirea axei centrale ci și a altor mărimi (reacțiuni, momente etc.) necesare în calculele de mecanică și rezistența materialelor. Metoda se aplică unui sistem discret de vectori și de aceea un sistem continuu va fi aproximat printr-un sistem discret descompunînd domeniul (D) de distribuție al sistemului într-un număr finit de subdomenii disjuncte a căror reuniune este (D) și luînd în considerare rezultantele forțelor ce revin fiecărui subdomeniu în parte. (Observații asupra punctelor de aplicație ale acestor rezultante se vor face în paragrafele următoare).

Metoda se bazează pe ideea de a descompune fiecare vector al sistemului discret de vectori coplanari în cîte o pereche de vectori din planul sistemului, astfel ca doi cîte doi să formeze sisteme nule și să rămînă astfel doi vectori care prin compunere (cînd nu formează un cuplu) dau rezultanta unică a sistemului, deci implicit poziția axei centrale.

Fie sistemul $\{\bar{V}_i\}_i^n$ din figura 1.25, *a*. Se construiește mai întîi poligonul vectorilor (fig. 1.25, *b*) plecînd dintr-un punct arbitrar A_0. Se ia un punct arbitrar O, numit pol și se duc razele polare A_0O, A_1O, A_2O, ..., A_nO.

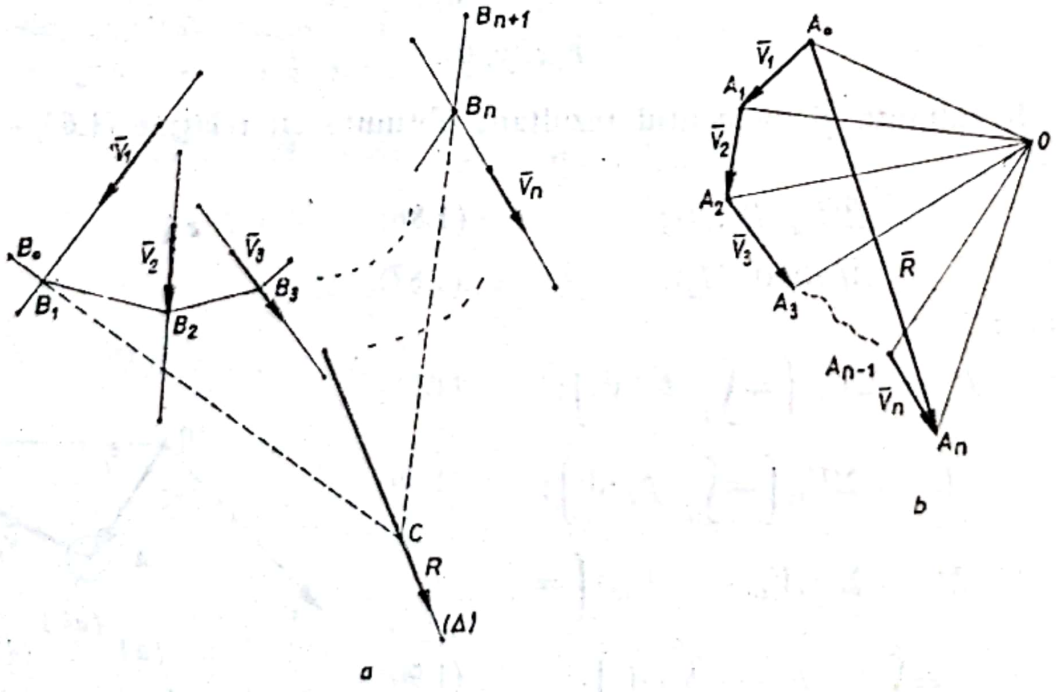


Fig. 1.25

Scanned with OKEN Scanner

Luăm acum un punct arbitrar B_0 din care ducem o paralelă la A_0O pînă taie suportul lui $\bar{V}_1$ în B_1. Din B_1 ducem o paralelă la A_1O pînă taie suportul lui $\bar{V}_2$ în B_2 și așa mai departe pînă cînd din B_n ducem pur și simplu o paralelă la A_nO pe care luăm un punct arbitrar B_{n+1}. Poligonul $B_0B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ este un poligon funicular al sistemului de vectori dat. Evident se pot construi o infinitate de poligoane funiculare pentru același sistem de vectori $\{\bar{V}_i\}_i^n$ datorită arbitrarului alegerii poziției relative a lui O față de A_0 și a poziției lui B_0.

Axa centrală este dreapta Δ, paralelă cu rezultanta $\bar{R} = \overline{A_0A_n}$ din poligonul vectorilor, dusă prin punctul C de intersecție a laturilor extreme (B_0B_1 și B_nB_{n+1}) ale poligonului funicular. Într-adevăr, dacă facem descompunerea vectorilor $\{\bar{V}_i\}_i^n$ în punctele $\{B_i\}_i^n$ după laturile poligonului funicular, formulele de descompunere vor trebui să fie:

$$\bar{V}_i = \overline{A_{i-1}O} + \overline{OA}_i (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.94)$$

Se observă că după laturile interioare B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ ale poligonului funicular se obțin respectiv perechile de vectori $\overline{OA}_1$ și $\overline{A_1O}$, $\overline{OA}_2$ și $\overline{A_2O}$, ..., $\overline{OA}_{n-1}$ și $\overline{A_{n-1}O}$, care sînt sisteme echivalente cu zero.

Rămîn deci vectorii $\overline{A_0O}$ și $\overline{OA}_n$ după laturile B_0B_1 și B_nB_{n+1}, vectori care prin compunere dau rezultanta unică $\bar{R}$ care trece prin punctul C.

Se pot demonstra următoarele proprietăți importante și utile în aplicații ale poligoanelor funiculare:

1 — perechile de laturi omoloage (cu același număr de ordine) a două poligoane funiculare ale aceluiași sistem de vectori coplanari, construite cu doi poli diferiți O și O', au punctele de intersecție pe o aceeași dreaptă, numită *dreapta lui Culman*, paralelă cu linia polilor OO'.

2 — printr-un punct din planul vectorilor trece o dublă infinitate de poligoane funiculare.

3 — prin două puncte din planul vectorilor trece o simplă infinitate de poligoane funiculare.

4 — prin trei puncte din planul vectorilor trece un singur poligon funicular.

5 — cînd laturile extreme ale poligonului funicular sînt paralele sau suprapuse rezultanta sistemului este zero (și deci sistemul nu are axă centrală), în primul caz sistemul fiind echivalent cu un cuplu, în al doilea caz cu zero.

1.1.19. Reducerea unui sistem de vectori alunecători paraleli. Fie un sistem continuu sau discret de vectori alunecători paraleli cu o direcție dată de axa Oz a unui sistem de referință cartezian, a cărui origine O este un punct arbitrar al spațiului (fig. 1.26).

Vom observa că vectorii $\bar{V}_i$, respectiv densitatea $\bar{p}$, se vor scrie:

$$\bar{V}_i(0, 0, V_{iz}) \qquad (1.95)$$

$$\bar{p}(0, 0, p_z) \qquad (1.96)$$

iar vectorii de poziție $\bar{r}_i$ respectiv $\bar{r}$, se vor scrie:

$$\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i) \qquad (1.97)$$

$$\bar{r}(x, y, z) \qquad (1.98)$$

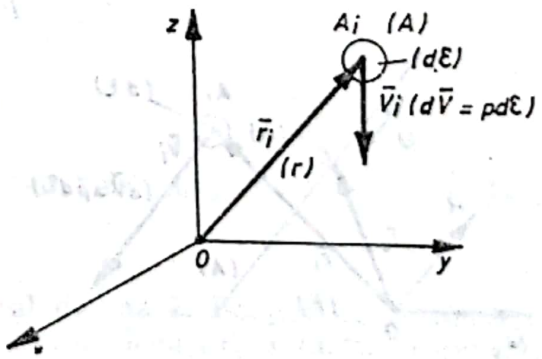


Fig. 1.26

Scanned with OKEN Scanner

Rezultanta și momentul rezultant obținute cu relațiile (1.65—(1.68) vor fi:

$$\bar{R}(0,\ 0,\ R_z) \tag{1.99}$$

$$\bar{M}_o(M_x,\ M_y,\ 0), \tag{1.100}$$

în care:

$$R_z = \sum_i^n V_{iz} \left(= \int_{(D)} p_z \, d\varepsilon \right) \tag{1.101}$$

$$M_x = \sum_i^n y_i V_{iz} \left(= \int_{(D)} y p_z \, d\varepsilon \right) \tag{1.102}$$

$$M_y = -\sum_i^n x_i V_{iz} \left(= -\int_{(D)} x p_z \, d\varepsilon \right) \tag{1.103}$$

Se observă că vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}_o$ sînt perpendiculari, deoarece:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = 0 \tag{1.104}$$

și deci torsorul minim va fi format din rezultanta $\bar{R}$ și momentul minim:

$$\bar{M}_R = 0. \tag{1.105}$$

Ecuațiile axei centrale obținute din (1.81) vor fi:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{M_y}{R_z} \\ y = \dfrac{M_x}{R_z} \end{cases} \tag{1.106}$$

care reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oz.

1.1.20. **Centrul unui sistem de vectori alunecători paraleli.** Vom considera un sistem de vecțori alunecători paraleli cu o direcție dată de versorul $\bar{u}$ (fig. 1.27).

Vectorii $\{\bar{V}_i\}_i^n$ ai sistemului (dacă e discret), respectiv densitatea $\bar{p}$ a sistemului (dacă e continuu) se scriu în acest caz:

$$\bar{V}_i = V_i \bar{u} \tag{1.107}$$

$$\bar{p} = p\bar{u}. \tag{1.108}$$

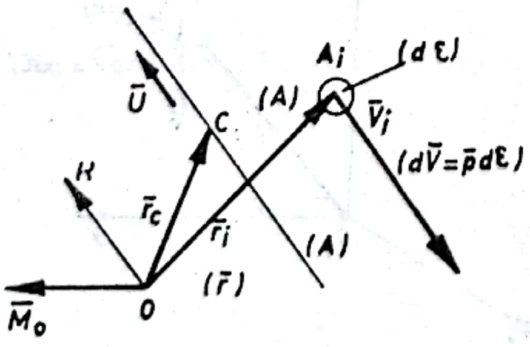


Fig. 1.27

În aceste formule mărimile V_i și p, numite scalarii vectorilor $\bar{V}_i$ respectiv $\bar{p}$, sînt proiecțiile acestor vectori pe versorul $\bar{u}$.

Reducînd sistemul de vectori într-un pol O ales arbitrar vom obține cu formulele (1.65) — (1.68) torsorul:

$$\bar{R} = R\bar{u} \tag{1.109}$$

$$\bar{M}_o = \bar{M}_s \times \bar{u} \tag{1.110}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

$$R = \begin{cases} \sum_i^n V_i & \text{(sistem discret)} \quad (1.111) \\ \int_{(D)} p \, d\varepsilon & \text{(sistem continuu)} \quad (1.112) \end{cases}$$

$$\bar{M}_s = \begin{cases} \sum_i^n V_i \bar{r}_i & \text{(sistem discret)} \quad (1.113) \\ \int_{(D)} p\bar{r} \, d\varepsilon & \text{(sistem continuu)} \quad (1.114) \end{cases}$$

Cu relaţiile (1.109) şi (1.110) ecuaţia vectorială (1.79) a axei centrale se scrie:

$$\bar{r} = \frac{1}{R^2}(\bar{R} \times \bar{M}_o) + \mu\bar{R} = \frac{1}{R^2} R\bar{u} \times (\bar{M}_s \times \bar{u}) + \mu R\bar{u} =$$

$$= \frac{1}{R}[(\bar{u} \cdot \bar{u})\,\bar{M}_s - (\bar{u} \cdot \bar{M}_s)\,\bar{u}] + \mu R\bar{u} = \frac{\bar{M}_s}{R} + \left(\mu R - \frac{\bar{u} \cdot \bar{M}_s}{R}\right)\bar{u} =$$

$$= \frac{\bar{M}_s}{R} + \lambda\bar{u}.$$

Deci:

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \lambda\bar{u}, \quad (1.115)$$

în care vectorul

$$\bar{r}_c = \frac{\bar{M}_s}{R}. \quad (1.116)$$

nu depinde de $\bar{u}$.

De aici deducem proprietatea foarte importantă a axei centrale a unui sistem de vectori alunecători paraleli de a-şi menţine un punct al ei fix la schimbarea orientării întregului sistem (schimbarea orientării lui $\bar{u}$).

Punctul C dat de vectorul de poziţie $\bar{r}_c$ din (1.116) se numeşte centrul sistemului de vectori paraleli şi el mai poate fi definit şi ca fiind punctul prin care trece rezultanta unică a sistemului de vectori paraleli ($\bar{M}_R = 0$) indiferent de schimbarea orientării întregului sistem.

Vectorul $\bar{r}_c$ se va scrie cu relaţiile (1.111) — (1.114) sub formele:

$$\bar{r}_c = \begin{cases} \dfrac{\sum_i^n V_i \bar{r}_i}{\sum_i^n V_i} & \text{(sistem discret)} \quad (1.117) \\ \dfrac{\int_{(D)} p\bar{r} \, d\varepsilon}{\int_{(D)} p \, d\varepsilon} & \text{(sistem continuu)} \quad (1.118) \end{cases}$$

1.1.21. **Centrul de greutate şi centrul de masă.** Forţele ce acţionează asupra unui punct material sînt evident vectori legaţi de punctul respectiv, acţiunea lor nemaifiind aceeaşi dacă se schimbă punctul de aplicaţie, mai

Scanned with OKEN Scanner

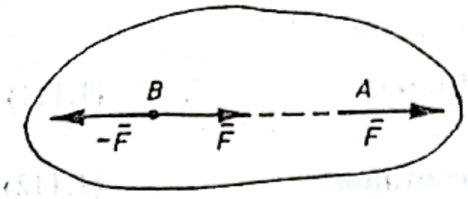


Fig. 1.28

precis acțiunea unei forțe asupra unui punct încetează în momentul în care ea nu mai acționează asupra punctului respectiv.

Lucrurile se schimbă însă în cazul cînd o forță acționează asupra unui rigid (sistem continuu de puncte aflate la distanțe invariabile unele față de altele). Experiența arată că acțiunea a două forțe de aceeași mărime, de sensuri contrare și pe același suport, aplicate în două puncte ale unui rigid este echivalentă cu zero (lasă rigidul în echilibru) indiferent de distanța dintre cele două puncte. Acestea sînt forța $\bar{F}$ din A și forța $-\bar{F}$ din B (fig. 1.28).

Vom considera acum forța $\bar{F}$ din A și vom introduce sistemul de forțe echivalent cu zero, $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ din B. Acum vom extrage din acest sistem de trei forțe sistemul echivalent cu zero format de forța $\bar{F}$ din A și forța $-\bar{F}$ din B, rămînînd doar forța $\bar{F}$ din B, a cărei acțiune asupra rigidului trebuie să fie deci echivalentă cu acțiunea forței $\bar{F}$ din A, forța inițial considerată. Deducem deci că o forță ce acționează într-un punct al unui rigid are caracter de vector alunecător.

Concluzia este că forțele din Mecanica punctului material sînt vectori legați, pe cînd forțele din Mecanica rigidului pot fi considerate vectori alunecători.

Forțele de greutate ale punctelor unui rigid mic în raport cu Pămîntul pot fi considerate paralele și în acest caz centrul acestui sistem de forțe (vectori paraleli și cu același sens) se numește centrul de greutate al respectivului rigid.

Făcînd presupunerea (valabilă în mai toate cazurile practice) că rigidul are o extindere mică atît pe suprafața Pămîntului (pentru ca greutățile punctelor să fie vectori aproximativ paraleli) cît și pe verticala locului (pentru ca accelerația gravitației să fie aproximativ aceeași în toate punctele sistemului) densitatea p a sistemului de forțe se va scrie sub forma:

$$p = \rho \cdot g \tag{1.119}$$

Rezultă că formula (1.118) se va scrie:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(D)} \bar{r} \cdot \rho \cdot d\varepsilon}{\int_{(D)} \rho \cdot d\varepsilon}. \tag{1.120}$$

În formula (1.120) $\bar{r}$ este vectorul de poziție al unui punct arbitrar din sistem, ρ este densitatea de volum, de suprafață sau liniară a sistemului tri-, bi-, respectiv unidimensional, iar $d\varepsilon$ este elementul de volum dV, de arie dA, sau de arc ds, respectiv în cele trei cazuri de mai sus. Dacă $\rho = \rho(x, y, z)$ sistemul este neomogen, iar dacă $\rho =$ constant sistemul este omogen (și în acest caz ρ se poate simplifica).

(D) este domeniul tri-, bi-, sau unidimensional ocupat de rigidul considerat. Propriu-zis orice rigid are o extindere tridimensională, însă în unele cazuri una sau două dintre dimensiuni se pot neglija față de cele rămase.

Există un caz demn de remarcat în practică și anume acela al unui sistem de rigide care poate fi descompus într-un număr finit de rigide disjuncte a căror reuniune este sistemul dat, sau într-un număr finit de rigide nedisjuncte din a căror reuniune se extrag rigidele formate de intersecții pentru a

Scanned with OKEN Scanner

obține sistemul dat, în ambele variante cunoscîndu-se poziția centrului de greutate al fiecărui rigid. În acest caz relația (1.120) conduce la:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(D_1)} \rho \bar{r}\, d\varepsilon + \ldots + \int_{(D_n)} \rho \bar{r}\, d\varepsilon - \int_{(D_{n+1})} \rho \bar{r}\, d\varepsilon - \ldots - \int_{(D_K)} \rho \bar{r}\, d\varepsilon}{\int_{(D_1)} \rho\, d\varepsilon + \ldots + \int_{(D_n)} \rho\, d\varepsilon - \int_{(D_{n+1})} \rho\, d\varepsilon - \ldots - \int_{(D_K)} \rho\, d\varepsilon} =$$

$$= \frac{m_1 \bar{r}_{c_1} + \ldots + m_n \bar{r}_{c_n} - m_{n+1} \bar{r}_{c_{n+1}} - \ldots - m_K \bar{r}_{c_K}}{m_1 + \ldots + m_n - m_{n+1} - \ldots - m_K}, \tag{1.121}$$

în care avem relația între domenii:

$$(D) = \bigcup_{i=1}^{n} (D_i) - \bigcup_{j=n+1}^{K} (D_j). \tag{1.122}$$

Formula (1.121) poate fi scrisă:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{K} \bar{r}_{c_i} m_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i}, \tag{1.123}$$

cu condiția ca masele care se extrag să se ia cu semnul „minus" și la numărător și la numitor. În relația (1.123) $\bar{r}_{c_i}$ sînt vectorii de poziție ai centrelor de greutate ale rigidelor, iar m_i masele acestora.

Formulele (1.120) și (1.123) rezolvă problema găsirii centrului de greutate în cele două cazuri întîlnite curent în practică: cazul unui rigid (sistem continuu rigid de puncte materiale) și cazul unui sistem finit de rigide.

De remarcat că în formulele acestea masele m_i sau elementele de masă $dm = \rho d\varepsilon$ pot fi înlocuite simultan și la numărători și la numitori cu mărimile cu care aceste mase sînt proporționale (volume, suprafețe, lungimi, elemente de volum, de suprafață, de arc sau alte mărimi) deoarece factorul de proporționalitate este factor comun la sume, respectiv constantă la integrale și se poate simplifica.

Mai facem mențiunea că punctul C definit exact prin relațiile (1.120) sau (1.123) se numește centrul de masă (sau centrul de inerție) al sistemului de puncte materiale (al cărui rol în Mecanică îl vom vedea în subcapitolul 2.3) și el nu trebuie confundat ca noțiune cu centrul de greutate (care are cu totul alt rol în Mecanică). Centrul de greutate coincide cu centrul de masă doar în cazul în care accelerația gravitației $\bar{g}$ este aceeași pentru toate punctele sistemului. Acesta este cazul (dealtfel singurul cu importanță practică) al unui sistem cu extindere mică pe verticală și orizontală în raport cu Pămîntul. Totuși aceste noțiuni e bine să nu fie confundate.

Pentru calculul centrului de masă al unui sistem discret de puncte materiale se folosește formula:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i \bar{r}_i m_i}{\sum_i m_i} \tag{1.124}$$

Observație: În paragraful 1.1.18 s-a arătat că pentru a putea aplica metoda poligonului funicular, un sistem continuu de vectori va fi aproximat printr-un sistem discret descompunînd domeniul (D) într-un număr finit de subdomenii disjuncte a căror reuniune este (D). Această descompu-

nere o vom face în așa fel încît pe fiecare subdomeniu sistemul de vectori ce-i revine să fie aproximativ (sau exact) un sistem de vectori paraleli și de același sens și în acest caz rezultantele unice ale subsistemelor se vor pune în centrele de greutate respective ale subsistemelor.

Proprietățile centrelor de greutate sînt unele evidente, altele foarte ușor de demonstrat pornind de la formulele (1.120) sau (1.123). Aceste proprietăți sînt următoarele:

1. Dacă un sistem de puncte materiale are față de un plan, o axă, sau un punct, simetrie mecanică (sistemul este format numai din perechi de mase egale, simetrice), atunci centrul de greutate al sistemului se află respectiv în acel plan, pe acea axă sau în acel punct. Remarcăm faptul că un caz particular important de simetrie mecanică este simetria geometrică a unui sistem omogen. Proprietatea *1* este o consecință directă a proprietăților sumelor și integralelor din formulele amintite mai sus.

2. Dacă avem două sisteme de puncte materiale (S) și (S'), din care unul sau ambele pot fi formate din cîte un singur punct, ale căror centre de greutate sînt C și C', sistemul format de reuniunea $(S) \cup (S')$ a celor două sisteme și sistemul $(S) - (S')$ format prin extragerea lui (S') din (S), vor avea fiecare centrul de greutate pe dreapta CC', în primul caz între C și C', iar în al doilea caz în afara segmentului CC' în porțiunea vecină cu C. Această proprietate rezultă direct din (1.123) luînd originea O în C.

1.1.22. **Teoremele lui Guldin.** Cele două teoreme ale lui *Guldin* se enunță astfel:

1. *Aria suprafeței generate de o curbă plană printr-o rotație completă în jurul unei axe din planul curbei și care nu taie curba este egală cu produsul dintre lungimea arcului de curbă generator și lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei presupuse corp omogen.*

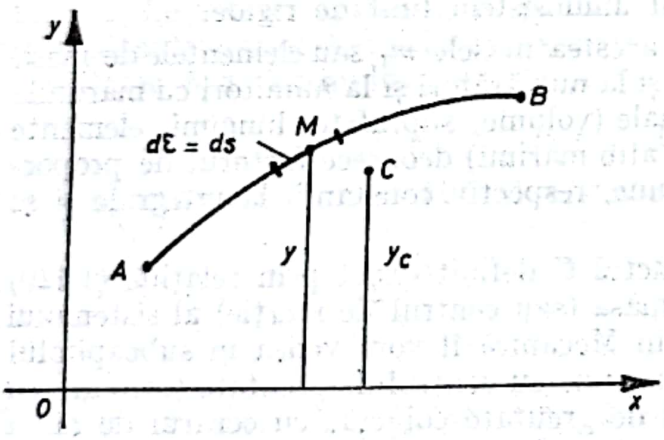


Fig. 1.29

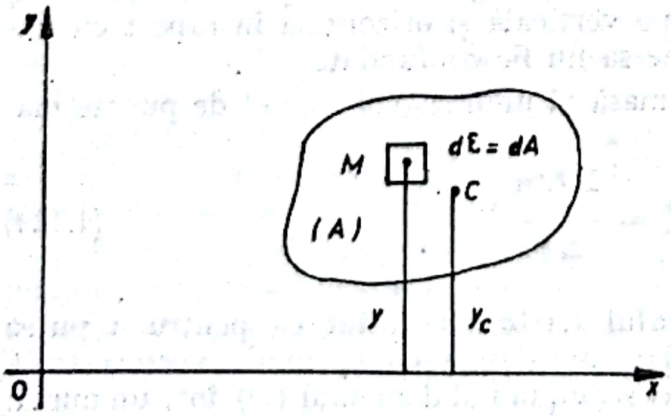


Fig. 1.30

2. *Volumul corpului generat de o suprafață plană printr-o rotație completă în jurul unei axe din planul suprafeței și care nu taie suprafața este egal cu produsul dintre aria acelei suprafețe și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței presupuse corp omogen.*

Cele două teoreme se demonstrează ușor scriind aria A_r generată prin rotația arcului de curbă AB în jurul axei Ox (fig. 1.29) și volumul V_r generat prin rotația suprafeței S în jurul axei OX (fig. 1.30) sub formele:

$$A_r = 2\pi \int_{(AB)} y\,ds \qquad (1.125)$$

$$V_r = 2\pi \iint_{(S)} y\,dA \qquad (1.126)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, pentru curba AB și suprafața S considerate corpuri omogene (ρ = const.), relația (1.120) va da prin proiecție pe axa Oy:

$$y_c = \frac{\int_{(AB)} y\,ds}{\int_{(AB)} ds} = \frac{\int_{(AB)} y\,ds}{L_{AB}}; \tag{1.127}$$

$$y_c = \frac{\iint_{(S)} y\,dA}{\iint_{(S)} dA} = \frac{\iint_{(S)} y\,dA}{A} \tag{1.128}$$

Înlocuind numărătorii relațiilor (1.127) și (1.128) în (1.125) și (1.126), obținem:

$$A_r = 2\pi y_c \cdot L_{AB}; \tag{1.129}$$

$$V_r = 2\pi y_c \cdot A, \tag{1.130}$$

adică tocmai cele două teoreme ale lui Guldin.

1.1.23. **Considerații recapitulative.** În afara operațiilor din algebra vectorială (suma vectorială, înmulțirea unui vector cu un scalar, produsul scalar, vectorial, mixt și dublu vectorial) care se definesc în principiu pentru orice tip de vector (liber, alunecător sau fix), cel mai important rezultat al acestui subcapitol este reducerea într-un punct a unui sistem (continuu sau discret) de vectori alunecători. Torsorul de reducere este format din rezultanta $\bar{R}$ (vector alunecător) și un cuplu de vectori alunecători reprezentat prin vectorul moment rezultant $\bar{M}_0$ (vector liber). Acest torsor are doi invarianți la schimbarea polului O și anume: rezultanta $\bar{R}$ și proiecția momentului rezultant pe rezultantă $\mathrm{pr}_{\bar{R}}\bar{M}_0$, care, luat ca vector se mai numește și *momentul minim* $\bar{M}_R$. Torsorul minim format din rezultanta $\bar{R}$ și momentul minim $\bar{M}_R$ (care e coliniar cu rezultanta) se obține la reducerea sistemului în oricare punct al unei anumite drepte, numită axa centrală a sistemului de vectori alunecători. Orice sistem de vectori alunecători coplanari sau paraleli are torsorul minim format dintr-o rezultantă unică $\bar{R}$ (momentul minim $\bar{M}_R=0$). Axa centrală (și deci și rezultanta unică $\bar{R}$) a unui sistem de vectori alunecători paraleli are proprietatea de a-și menține un anume punct al ei fix, indiferent de schimbarea orientării sistemului. Acel punct se numește *centrul sistemului de vectori alunecători paraleli*. Cînd vectorii paraleli sînt forțele de greutate ale punctelor unui rigid centrul acesta se numește *centru de greutate* al rigidului. Există în mecanica sistemelor continui sau discrete un punct, numit *centru de masă*, care pentru rigide se calculează cu aceleași relații ca și centrul de greutate și care joacă în Mecanică un rol cu totul diferit de cel al centrului de greutate. Aceste două puncte trebuie deosebite unul de celălalt tot așa cum deosebim masa și greutatea unui corp ca noțiuni fizice cu totul diferite.

Forțele de greutate ale punctelor materiale ce formează un sistem discret, deși sînt vectori paraleli (cînd dimensiunile sistemului sînt neglijabile față de cele ale Pămîntului), nefiind vectori alunecători (ci legați) nu se pot reduce într-un punct, nu au axă centrală și deci nu putem vorbi de centrul de greutate al sistemului discret de puncte ca fiind punctul prin care trece necontenit rezultanta sistemului (sau axa centrală a lui). Aici se vede foarte

Scanned with OKEN Scanner

pregnant diferența dintre cele două noțiuni: centrul de greutate și centrul de masă. Un sistem discret de puncte materiale are centru de masă (calculat cu formula (1.124)), dar nu are centru de greutate.

Menționăm că în paragraful 1.2.5 sînt tratate integralele cu vectori, printre care și cele folosite în acest subcapitol.

Mai atragem atenția că în subcapitolul 1.3 vom vedea cum cu ajutorul teoriei distribuțiilor, putem privi discontinuul ca un caz particular al continuului și în consecință toate relațiile privitoare la sistemele discrete (de vectori sau de puncte materiale) pot fi deduse din relațiile corespunzătoare valabile pentru sistemele continui și deci numărul de formule demne de reținut se micșorează simțitor.

APLICAȚII

1. Într-un cerc se trasează diametrul AB și două coarde egale CD și EG, perpendiculare pe diametru. Să se afle rezultanta $\bar{R}$ a celor cinci forțe $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ și $\bar{F}_5$ reprezentate prin vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{AG}$, $\overline{AC}$ și $\overline{AD}$.

Rezolvare:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \bar{F}_5 \text{ sau}$$

$$\bar{R} = \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{AG} + \overline{AC} + \overline{AD}.$$

Din figură se vede că forța $\bar{F}_4 = \overline{AC}$ și forța $\bar{F}_3 = \overline{AG}$ au ca rezultantă pe $\bar{F}_1 = \overline{AB}$. De asemenea și forțele $\bar{F}_5 = \overline{AD}$ și $\bar{F}_2 = \overline{AE}$ au ca rezultantă tot pe $\bar{F}_1 = \overline{AB}$.

Rezultă deci că rezultanta totală va fi:

$$\bar{R} = 3\overline{AB} = 3\bar{F}_1.$$

2. Pe muchiile unui cub de latură a acționează cinci forțe $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F$ orientate ca în figură. Să se găsească torsorul de reducere al sistemului în punctul O, momentul minim și axa centrală.

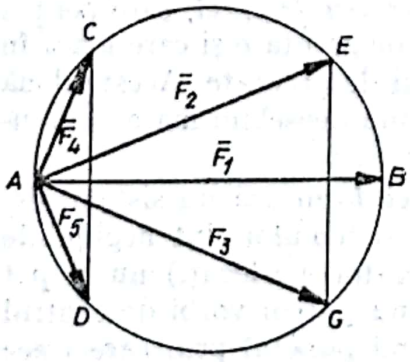


Fig. 1.31

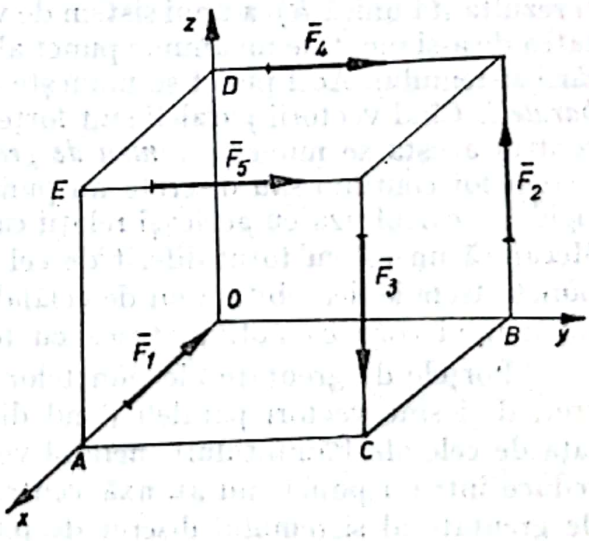


Fig. 1.32

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare:

Considerînd punctele de aplicație ale forțelor respectiv în A, B, C, D și E vom determina analitic forțele și momentele lor față de originea O.

$\bar{F}_1(-F, 0, 0)$	$\bar{M}_{01}(0, 0, 0)$
$\bar{F}_2(0, 0, F)$	$\bar{M}_{02}(aF, 0, 0)$
$\bar{F}_3(0, 0, -F)$	$\bar{M}_{03}(-aF, aF, 0)$
$\bar{F}_4(0, F, 0)$	$\bar{M}_{04}(-aF, 0, 0)$
$\bar{F}_5(0, F, 0)$	$\bar{M}_{05}(-aF, 0, aF)$
$\bar{R}(-F, 2F, 0)$	$\bar{M}_0(-2aF, aF, aF)$

Observăm că momentul $\bar{M}_{01}$ este nul deoarece forța $\bar{F}_1$ trece prin punctul O. Pentru momentele $\bar{M}_{02}$ și $\bar{M}_{04}$ se pot determina modulul, direcția și sensul cu ajutorul regulilor cunoscute, acești vectori fiind dirijați după o axă a sistemului de referință. Pentru momentele $\bar{M}_{03}$ și $\bar{M}_{05}$, care nu mai sînt dirijați după vreo axă a sistemului, vom folosi expresia analitică a produsului vectorial:

$$\bar{M}_{03} = \bar{r}_3 \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & -F \end{vmatrix}; \quad \bar{M}_{05} = \bar{r}_5 \times \bar{F}_5 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & a \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix}$$

Valoarea momentului minim o calculăm cu formula:

$$M_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_0}{R} = \frac{-2aF^2 + 2aF^2}{F\sqrt{5}} = 0.$$

Ecuațiile axei centrale (1.80) sau (1.81) ne conduc în cazul de față la relațiile următoare:

$$\frac{-2aF + 2Fz}{-F} = \frac{aF + Fz}{2F} = \frac{aF - 2Fx - Fy}{0};$$

$$\frac{x - \frac{2aF^2}{5F^2}}{-F} = \frac{y - \frac{aF^2}{5F^2}}{2F} = \frac{z - \frac{3aF^2}{5F^2}}{0}.$$

Aceste relații conduc după calcule simple la următoarele forme:

$$z = \frac{3a}{5}; \quad 2x + y - a = 0,$$

care se pot deduce atît din primul cît și din cel de-al doilea șir de egalități de mai sus. Am obținut astfel ecuațiile axei centrale sub forma ecuațiilor a două plane.

3. Să se determine centrul de greutate al unui arc de cerc AB omogen de rază R și cu unghiul la centru 2α (fig. 1.33).

Rezolvare:

Vom lua sistemul de referință xOy, unde axa Ox este axa de simetrie a cercului dat. Vom împărți arcul de cerc dat, în elemente infinit mici, avînd unghiul la centru $d\theta$. Fie elementul de arc MN de unghi la centru $d\theta$. Coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$X_c = \frac{\int x\,ds}{\int ds}; \quad Y_c = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

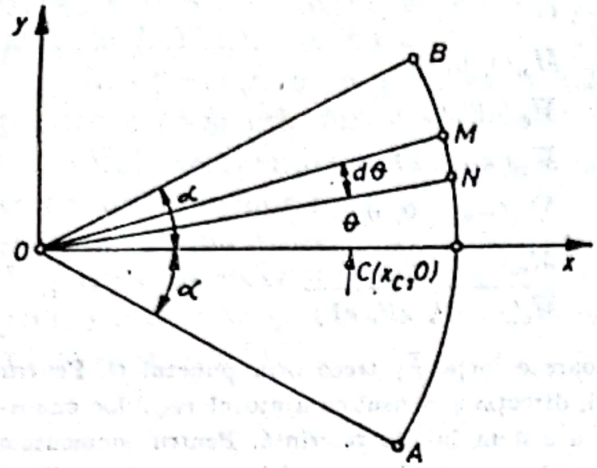


Fig. 1.33.

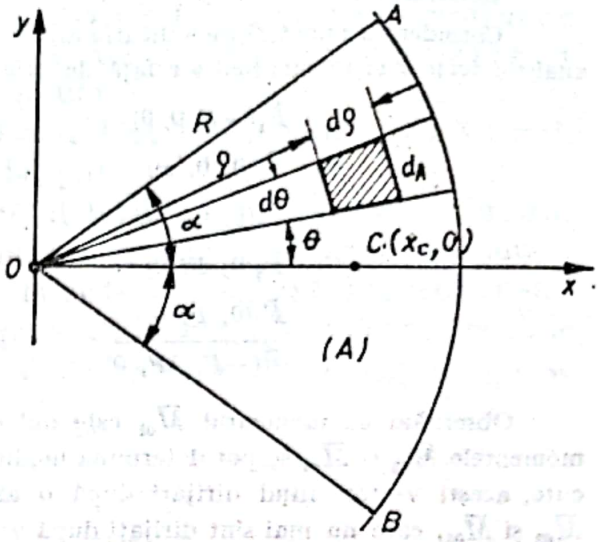


Fig. 1.34

Lucrînd în coordonate polare vom avea $ds = R\,d\theta$, $x = R\cos\theta$ și deci:

$$X_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\, d\theta} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

În cazul particular al unui semicerc, adică $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $X_c = \frac{2R}{\pi}$.

4. Să se determine centrul de greutate al unui sector circular omogen OAB de rază R și unghiul la centru 2α (fig. 1.34).

Rezolvare:

Raportăm sectorul circular la un sistem de referință xOy unde axa Ox este axă de simetrie. Împărțim sectorul circular într-un număr infinit de mare de sectoare circulare mici, avînd unghiul la centru $d\theta$.

Lucrînd în coordonate polare, se ia ca element de arie $dA = \rho\, d\rho\, d\theta$, elementul cuprins între două cercuri concentrice de raze ρ și $\rho + d\rho$ și două raze care formează un unghi $d\theta$.

Ținînd cont de relațiile:

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta,$$

coordonatele centrului de greutate sînt:

$$x_c = \frac{\int_{(A)} x\, dA}{\int_{(A)} dA} = \frac{\int_0^R \rho^2\, d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta\, d\theta}{\int_0^R \rho\, d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta} = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha};$$

$$y_c = 0.$$

Pentru semicerc:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad X_c = \frac{4R}{3\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

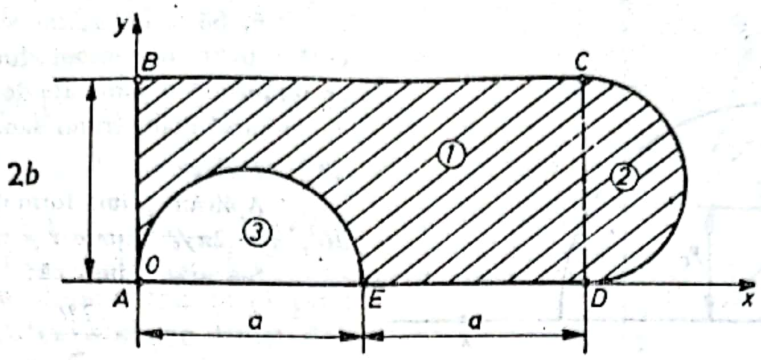


Fig. 1.35

5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeței haşurate $ABCDE$ din figura 1.35.

Rezolvare:

Vom raporta suprafața la sistemul de axe de coordonate Oxy ca în figură. Suprafața haşurată se poate descompune în trei suprafețe simple şi anume: dreptunghiul $ABCD$, semicercul CD şi semicercul AE care se scade din dreptunghiul $ABCD$.

Coordonatele centrului de greutate vor fi date de relațiile:

$$x_c = \frac{\Sigma\, x_{ci} A_i}{\Sigma\, A_i}; \quad y_c = \frac{\Sigma\, y_{ci} A_i}{\Sigma\, A_i}.$$

Folosind tabelul de mai jos rezultă:

Tabelul 1.1

i	x_{ci}	y_{ci}	A_i	$x_{ci}A_i$	$y_{ci}A_i$
1	a	b	$4ab$	$4a^2b$	$4ab^2$
2	$2a + \frac{4b}{3\pi}$	b	$\frac{\pi b^2}{2}$	$\frac{\pi b^2}{2}\left(2a + \frac{4b}{3\pi}\right)$	$\frac{\pi b^3}{2}$
3	$\frac{a}{2}$	$\frac{2a}{3\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{8}$	$\frac{-\pi a^3}{16}$	$-\frac{a^3}{12}$

$$x_c = \frac{4a^2b + \frac{\pi b^2}{2}\left(2a + \frac{4b}{3\pi}\right) - \frac{\pi a^3}{16}}{4ab + \frac{4b^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8}};$$

$$y_c = \frac{4ab^2 + \frac{\pi b^3}{2} - \frac{a^3}{12}}{4ab + \frac{\pi b^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

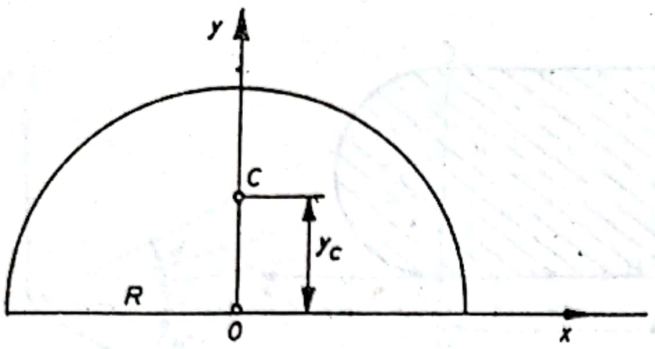


Fig. 1.36

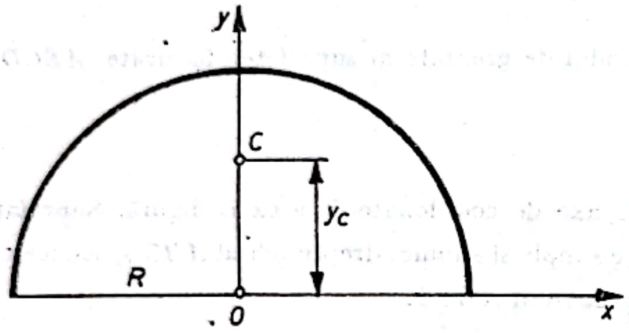


Fig. 1.37

6. Să se determine suprafaţa născută prin rotirea curbei din figura 1.36 ce reprezintă o jumătate de cerc de rază R, în jurul diametrului său.

Rezolvare:

Aplicăm prima formulă a lui *Guldin*, $A = 2\pi y_c\, l$, unde $l = \pi R$.

S-a arătat însă că:

$$y_c = \frac{2R}{\pi}.$$

Deci:

$$A = 2\pi \frac{2R}{\pi} \pi R = 4\pi R^2.$$

7. Să se determine volumul născut prin rotirea unei suprafeţe semicirculare în jurul diametrului (fig. 1.37).

Rezolvare:

Aplicăm a doua teoremă a lui *Guldin*, $V = 2\pi y_c A$, unde:

$$A = \frac{\pi R^2}{2}.$$

S-a arătat însă că:

$$y_c = \frac{4R}{3\pi}.$$

Deci:

$$V = 2\pi \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3}{4}\pi R^3.$$

1.2. ANALIZĂ VECTORIALĂ APLICATĂ ÎN MECANICĂ

1.2.1. Vectori variabili. Derivata absolută a vectorilor. Fie un vector $\bar{v}$ care îşi schimbă în timp mărimea sau direcţia (sau ambele) şi fie sistemul cartezian fix $Oxyz$ (fig. 1.38).

În acest caz cel puţin una dintre proiecţiile pe axe ale lui $\bar{v}$ este funcţie scalară de timp. Un astfel de vector se spune că este o funcţie vectorială de timp şi se notează:

$$\bar{v} = \bar{v}(t) = v_x(t)\,\bar{i} + v_y(t)\,\bar{j} + v_z(t)\,\bar{k}. \tag{1.131}$$

Expresia:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k} \tag{1.132}$$

se numeşte derivata absolută a vectorului $\bar{v}$ în raport de timp şi se notează prescurtat:

$$\dot{\bar{v}} = \dot{v}_x\bar{i} + \dot{v}_y\bar{j} + \dot{v}_z\bar{k}. \tag{1.133}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm (fig. 1.38) cu $\bar{v}(t)$ vectorul dat al timpul t şi cu:

$$\bar{v} + \Delta\bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) = v_x(t + \Delta t)\,\bar{i} + v_y(t + \Delta t)\,\bar{j} + v_z(t + \Delta t)\,\bar{k} \quad (1.134)$$

acest vector la timpul $t + \Delta t$ (fie că punctul de aplicaţie A rămîne fix sau se deplasează şi el pînă în A' în intervalul de timp Δt), observăm că derivata $\dot{\bar{v}}$ a vectorului $\bar{v}$ se poate scrie plecînd de la (1.131) şi (1.134) sub forma:

$$\dot{\bar{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \quad (1.135)$$

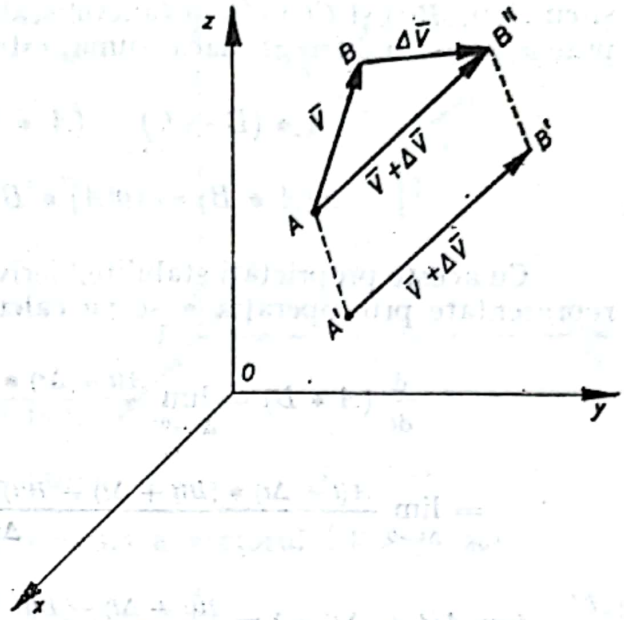


Fig. 1.38

Deci derivata întîi absolută a vectorului $\bar{v}(t)$ este limita raportului dintre vectorul variaţie a extremităţii vectorului $\bar{v}(t)$ (originea lui rămînînd fixă) într-un interval de timp Δt şi acel interval de timp, cînd acesta din urmă tinde la zero.

Derivata a doua absolută în raport de timp a vectorului $\bar{v}(t)$ se defineşte ca fiind derivata întîi a primei derivate şi ea se scrie deci:

$$\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} = \frac{d^2v_x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2v_y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2v_z}{dt^2}\bar{k}, \quad (1.136)$$

sau prescurtat:

$$\ddot{\bar{v}} = \ddot{v}_x\bar{i} + \ddot{v}_y\bar{j} + \ddot{v}_z\bar{k}. \quad (1.137)$$

Remarcăm că variabilă independentă poate fi şi alta (nu numai timpul t) şi convenim să notăm cu un punct, respectiv cu două puncte deasupra funcţiei care se derivează, numai derivatele în raport cu timpul (prima şi respectiv a doua).

Mai menţionăm de asemenea că în cazul în care cel puţin una dintre proiecţiile unui vector $\bar{v}$ pe axele unui sistem cartezian fix este funcţie scalară de mai multe variabile α, β, ..., spunem că $\bar{v}$ este funcţie vectorială de α, β, ..., iar derivata parţială în raport cu α se defineşte ca fiind expresia:

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial\alpha} = \frac{\partial v_x}{\partial\alpha}\bar{i} + \frac{\partial v_y}{\partial\alpha}\bar{j} + \frac{\partial v_z}{\partial\alpha}\bar{k}. \quad (1.138)$$

1.2.2. **Reguli pentru derivata absolută.** Fie funcţiile vectoriale de timp $\bar{a}(t)$ şi $\bar{b}(t)$ şi funcţia scalară $m(t)$. Notînd cu $*$ oricare dintre operaţiile:

— înmulţirea unui vector cu un scalar $(m\bar{a})$

— produsul scalar a doi vectori $(\bar{a} \cdot \bar{b})$

— produsul vectorial a doi vectori $(\bar{a} \times \bar{b})$.

Scanned with OKEN Scanner

şi cu $A(t)$, $B(t)$ şi $C(t)$ cîte o funcţie scalară sau vectorială de t, observăm că putem scrie, indiferent dacă suma este algebrică sau vectorială:

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C), \tag{1.139}$$

$$m(A * B) = (mA) * B = A * (mB). \tag{1.140}$$

Cu aceste proprietăţi stabilite, derivata oricăruia dintre cele trei produse reprezentate prin operaţia $*$ se va calcula astfel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A * B) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t + \Delta t) * B(t + \Delta t) - A(t) * B(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t + \Delta t) * [B(t + \Delta t) - B(t)] + [A(t + \Delta t) - A(t)] * B(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} A(t + \Delta t) * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} * \lim_{\Delta t \to 0} B(t) =$$

$$= A(t) * \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} * B(t). \tag{1.141}$$

Putem scrie relaţiile:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{a}) = \dot{m}\bar{a} + m\dot{\bar{a}}; \tag{1.142}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \dot{\bar{a}} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \dot{\bar{b}}; \tag{1.143}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{a} \times \bar{b}) = \dot{\bar{a}} \times \bar{b} + \bar{a} \times \dot{\bar{b}}. \tag{1.144}$$

Fie acum funcţiile vectoriale $\bar{a}(t)$ şi $\bar{b}(t)$. Se poate calcula derivata sumei acestora sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{a} + \bar{b}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{a}(t + \Delta t) + \bar{b}(t + \Delta t) - \bar{a}(t) - \bar{b}(t)}{\Delta t}. \tag{1.145}$$

Deci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{a} + \bar{b}) = \dot{\bar{a}} + \dot{\bar{b}}. \tag{1.146}$$

Combinînd formulele (1.143) şi (1.144) se obţin uşor formulele:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})] = \dot{\bar{a}} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{a} \cdot (\dot{\bar{b}} \times \bar{c}) + \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \dot{\bar{c}}); \tag{1.147}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})] = \dot{\bar{a}} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{a} \times (\dot{\bar{b}} \times \bar{c}) + \bar{a} \times (\bar{b} \times \dot{\bar{c}}). \tag{1.148}$$

Scanned with OKEN Scanner

1.2.3. **Derivata relativă. Formulele lui Poisson. Relația dintre derivata absolută și cea relativă a unui vector.** Fie S_1 un sistem de referință cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$ și S un sistem de referință cartezian mobil $Oxyz$ (fig. 1.39).

Considerăm vectorul variabil $\bar{v}(t)$ pe care-l scriem analitic în cele două sisteme sub formele:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}; \qquad (1.149)$$

$$\bar{v} = v_{x_1}\bar{i}_1 + v_{y_1}\bar{j}_1 + v_{z_1}\bar{k}_1. \qquad (1.150)$$

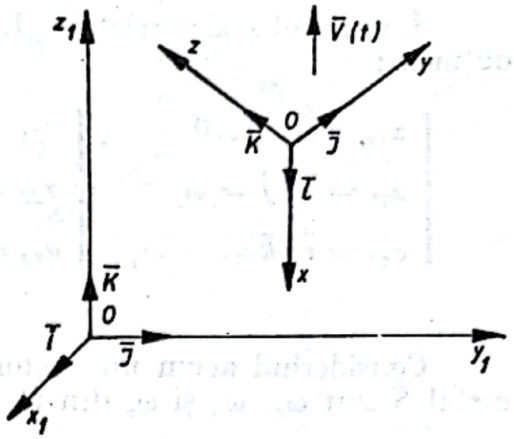


Fig. 1.39

Vom numi derivata relativă sau locală a vectorului $\bar{v}$ expresia:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{v}_x\bar{i} + \dot{v}_y\bar{j} + \dot{v}_z\bar{k}, \qquad (1.151)$$

spre deosebire de derivata absolută a lui $\bar{v}$ care va fi:

$$\frac{d_1\bar{v}}{dt} = \dot{v}_{x_1}\bar{i}_1 + \dot{v}_{y_1}\bar{j}_1 + \dot{v}_{z_1}\bar{k}_1. \qquad (1.152)$$

Pentru a găsi relația dintre cele două derivate de mai sus avem nevoie de derivatele absolute ale versorilor mobili $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ (care sînt evident funcții de timp), adică de vectorii $\dot{\bar{i}}$ $\dot{\bar{j}}$ și $\dot{\bar{k}}$. Pentru a găsi niște expresii convenabile ale acestor vectori plecăm de la expresiile lor analitice în sistemul S:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} = \alpha_{11}\bar{i} + \alpha_{12}\bar{j} + \alpha_{13}\bar{k} \\ \dot{\bar{j}} = \alpha_{21}\bar{i} + \alpha_{22}\bar{j} + \alpha_{23}\bar{k} \\ \dot{\bar{k}} = \alpha_{31}\bar{i} + \alpha_{32}\bar{j} + \alpha_{33}\bar{k} \end{cases} \qquad (1.153)$$

în care α_{mn} sînt pentru moment niște necunoscute.

Vom scrie acum analitic faptul că vectorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ sînt toți versori și sînt ortogonali între ei:

$$\begin{cases} \bar{i}\cdot\bar{i} = 1 \\ \bar{j}\cdot\bar{j} = 1 \\ \bar{k}\cdot\bar{k} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{i}\cdot\bar{j} = 0 \\ \bar{j}\cdot\bar{k} = 0 \\ \bar{k}\cdot\bar{i} = 0 \end{cases} \qquad (1.154)$$

Derivînd în raport de timp aceste șase relații obținem:

$$\begin{cases} 2\dot{\bar{i}}\cdot\bar{i} = 0 \\ 2\dot{\bar{j}}\cdot\bar{j} = 0 \\ 2\dot{\bar{k}}\cdot\bar{k} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\bar{i}}\cdot\bar{j} = -\bar{i}\cdot\dot{\bar{j}} = \omega_z \\ \dot{\bar{j}}\cdot\bar{k} = -\bar{j}\cdot\dot{\bar{k}} = \omega_x \\ \dot{\bar{k}}\cdot\bar{i} = -\bar{k}\cdot\dot{\bar{i}} = \omega_y \end{cases} \qquad (1.155)$$

în care ω_x, ω_y și ω_z reprezintă niște scalari a căror semnificație o vom vedea ulterior.

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind scalar relațiile (1.153) cu $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ și utilizînd relațiile (1.155) obținem:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} = 0 \\ \alpha_{12} = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \omega_z \\ \alpha_{13} = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{k} = -\omega_y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{21} = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{i} = -\omega_z \\ \alpha_{22} = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{j} = 0 \\ \alpha_{23} = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = \omega_x \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{31} = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = \omega_y \\ \alpha_{32} = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = -\omega_x \\ \alpha_{33} = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{k} = 0 \end{cases} \tag{1.156}$$

Considerînd acum un vector $\bar{\omega}$ ale cărui proiecții pe axele sistemului mobil S sînt ω_x, ω_y și ω_z din (1.155), vom calcula produsele:

$$\bar{\omega} \times \bar{i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} + \omega_z \bar{j} - \omega_y \bar{k};$$

$$\bar{\omega} \times \bar{j} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\omega_z \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \omega_x \bar{k}; \tag{1.157}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \omega_y \bar{i} - \omega_x \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}.$$

Comparînd relațiile (1.157) cu rezultatul înlocuirii relațiilor (1.156) în (1.153) deducem relațiile:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i} \\ \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j} \\ \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k} \end{cases} \tag{1.158}$$

care se numesc formulele lui *Poisson*.

Revenind la formulele (1.149) și (1.150) putem scrie:

$$v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k} = v_{x_1} \bar{i}_1 + v_{y_1} \bar{j}_1 + v_{z_1} \bar{k}_1 \tag{1.159}$$

Calculînd derivatele absolute ale celor doi membri ai acestei ecuații obținem:

$$\dot{v}_x \bar{i} + \dot{v}_y \bar{j} + \dot{v}_z \bar{k} + v_x \dot{\bar{i}} + v_y \dot{\bar{j}} + v_z \dot{\bar{k}} = \dot{v}_{x_1} \bar{i}_1 + \dot{v}_{y_1} \bar{j}_1 + \dot{v}_{z_1} \bar{k}_1 \tag{1.160}$$

Cu ajutorul notațiilor (1.151) și (1.152) și cu relațiile (1.158) relația (1.160) se scrie:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + v_x \bar{\omega} \times \bar{i} + v_y \bar{\omega} \times \bar{j} + v_z \bar{\omega} \times \bar{k} = \frac{d_1 \bar{v}}{dt}. \tag{1.161}$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind relația (1.149), această relație se scrie:

$$\frac{d_1\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (1.162)$$

Formula (1.162) reprezintă relația de legătură între derivata absolută și cea relativă a vectorului $\bar{v}$.

1.2.4. Vectorul de poziție, viteza și accelerația unui punct în coordonate carteziene, intrinseci și curbilinii (cazuri particulare: coordonate polare, cilindrice și sferice). Fie un punct mobil M și un sistem de referință cartezian fix $Oxyz$ (fig. 1.40, *a*). Punctul nostru, care descrie în timp traiectoria (C), se află la momentul t în M și la momentul $(t + \Delta t)$ în punctul M_1. Vectorul $\overline{OM} = \bar{r}$ se numește vectorul de poziție al punctului M față de O și este evident funcție de timp.

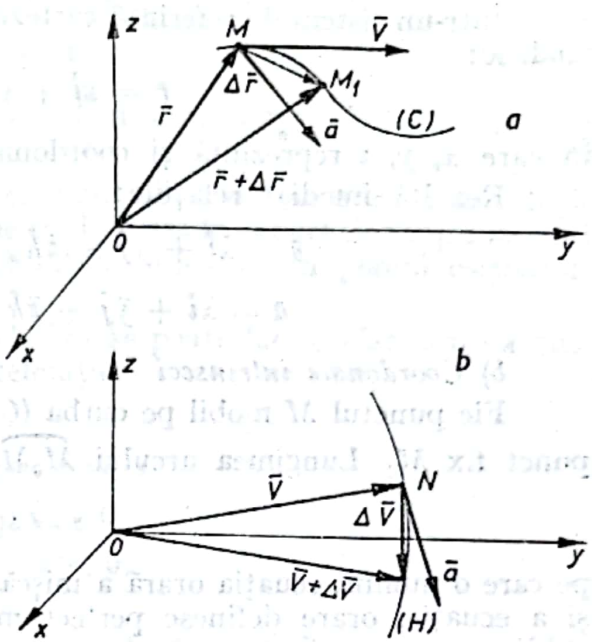


Fig. 1.40

Vom defini viteza momentană a lui M ca fiind limita:

$$\bar{v} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \quad (1.163)$$

Deci $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$.

Vectorul $\bar{v}$ are direcția coardei $\overline{MM_1}$ cu două puncte confundate ($M_1 \to M$), deci direcția tangentei în M la traiectorie, iar sensul este dat de sensul mișcării lui M spre M_1, deci de sensul mișcării locale a lui M spre M_1 deci de sensul mișcării locale a lui M pe traiectorie.

Dacă vectorii viteză $\bar{v}$ la diferite momente t îi vom muta artificial cu punctele de aplicație în originea O a sistemului de referință, păstrînd modulul, direcția și sensul acestora, extremitatea N a acestor vectori (fig. 1.40, *b*) va descrie o curbă (H) pe care o numim hodograful vitezei.

Pentru această curbă vectorul $\bar{v}$ joacă rol de vector de poziție al punctului curent N, iar viteza acestuia (care e viteza de variație a lui $\bar{v}$) o vom numi accelerația momentană $\bar{a}$ a punctului M. Deci:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}. \quad (1.164)$$

Cei trei vectori caracteristici ai mișcării unui punct M sînt: vectorul de poziție $\bar{r}$, viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a punctului, între care avem relațiile:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v}; \quad (1.165)$$

$$\ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{v}} = \bar{a}. \quad (1.166)$$

Vom calcula acum aceiași vectori în diferite sisteme de coordonate.

a) Coordonate carteziene

Într-un sistem de referință cartezian fix (fig. 1.40, *a*) vectorul r se scrie analitic:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{1.167}$$

în care x, y, z reprezintă și coordonatele punctului curent.

Rezultă imediat relațiile:

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}; \tag{1.168}$$

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} = \dot{v}_x\bar{i} + \dot{v}_y\bar{j} + \dot{v}_z\bar{k}. \tag{1.169}$$

b) Coordonate intrinseci

Fie punctul M mobil pe curba (C) (fig. 1.41) pe care luăm arbitrar un punct fix M_0. Lungimea arcului $\widehat{M_0M}$ este o funcție de timp:

$$s = s(t), \tag{1.170}$$

pe care o numim ecuația orară a mișcării lui M. Cunoașterea traiectoriei (C) și a ecuației orare definesc perfect mișcarea lui M.

Vom considera în M triedrul lui Frenet format din versorul tangentei $\bar{\tau}$, a normalei principale $\bar{n}$ și al binormalei β.

Planul format de $\bar{\tau}$ și $\bar{n}$ se numește planul osculator.

Reamintim din geometria analitică cele trei formule ale lui Frenet.

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho}; \tag{1.171}$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{\tau}}{\rho} - \frac{\bar{\beta}}{R}; \tag{1.172}$$

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{\bar{n}}{R}, \tag{1.173}$$

în care ρ este raza de curbură și R raza de torsiune a curbei în M. Versorul τ se definește ca fiind:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}, \tag{1.174}$$

în care $d\bar{r}$ este coarda $\overline{MM_1}$ $(M_1 \to M)$, iar ds arcul $\widehat{MM_1}$.

Viteza $\bar{v}$ se va calcula cu ajutorul relației (1.174):

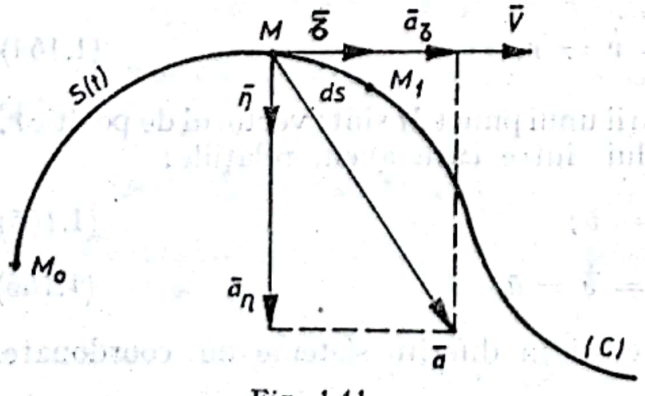


Fig. 1.41

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\bar{\tau}, \tag{1.175}$$

iar accelerația $\bar{a}$ se deduce din aceasta prin derivare, utilizînd și relația (1.171):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} =$$

$$= \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \tag{1.176}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile (1.175) şi (1.176) se pot scrie:

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau} = v\bar{\tau}; \tag{1.177}$$

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \tag{1.178}$$

Aceste relaţii ne arată că viteza este un vector dirijat întotdeauna după tangenta la traiectorie şi egal în mărime cu derivata în raport de timp a arcului $s(t)$, iar acceleraţia este un vector situat întotdeauna în planul osculator, înspre concavitatea curbei.

Cu ajutorul relaţiilor (1.177) şi (1.178) se poate face o clasificare a mişcărilor punctului după viteză şi acceleraţie:

— mişcări uniforme: $v = ct$;

— mişcări uniform variate: $a_\tau = \dot{v} = ct$;

— mişcări accelerate: $\bar{v} \cdot \bar{a}_\tau = v \cdot \dot{v} > 0$;

— mişcări încetinite: $\bar{v} \cdot \bar{a}_\tau = v \cdot \dot{v} < 0$.

O b s e r v a ţ i e : Singura mişcare cu acceleraţie nulă este mişcarea rectilinie uniformă deoarece:

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{v} = 0 \to v = ct \\ \rho = \infty \Rightarrow (c) \text{ este o dreaptă.} \end{cases}$$

c) Coordonate curbilinii ortogonale. Cazuri particulare: coordonate polare, cilindrice şi sferice.

Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct mobil M faţă de un punct fix O (fig. 1.42). Dacă vectorul variabil $\bar{r}$ depinde de timp prin intermediul a trei funcţii scalare de timp $q_1(t)$, $q_2(t)$ şi $q_3(t)$:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3), \tag{1.179}$$

spunem că punctul M are coordonatele curbilinii q_1, q_2, q_3.

Vom construi prin M cele trei curbe (C_1), (C_2) şi (C_3) definite de relaţiile:

$$(C_1) : q_1 = q_1(t),\ q_2 = ct,\ q_3 = ct; \tag{1.180}$$

$$(C_2) : q_2 = q_2(t),\ q_1 = ct,\ q_3 = ct; \tag{1.181}$$

$$(C_3) : q_3 = q_3(t),\ q_1 = ct,\ q_2 = ct, \tag{1.182}$$

pe care le vom numi curbele de coordonate.

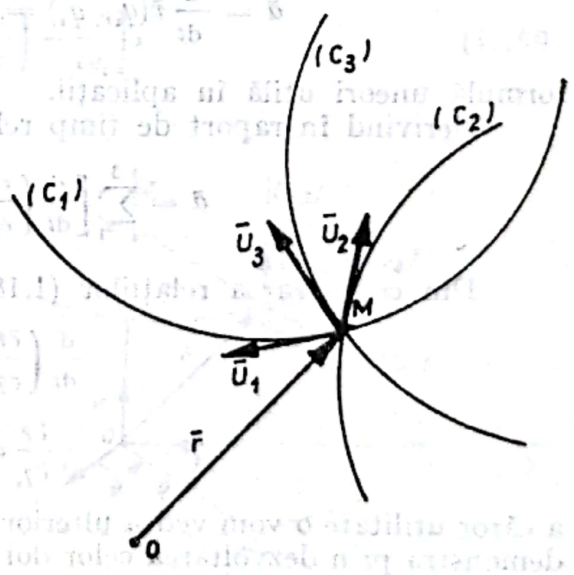


Fig. 1.42

Prin derivarea în raport de timp a relaţiei (1.179) vom obţine viteza punctului M:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i, \tag{1.183}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorii $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\,\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ reprezintă vitezele cu care se mişcă punctul M pe fiecare dintre cele trei curbe de coordonate (C_i) după legile de mişcare (1.180) (1.181) şi (1.182). Deducem de aici că vectorii $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ sînt tangenţi la cîte una din cele trei curbe de coordonate (C_i). Versorii acestor tangente se scriu sub forma:

$$\bar{u}_i = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right|} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.184}$$

Cînd cei trei versori de mai sus formează un triedru ortogonal spunem că sistemul de coordonate curbilinii este ortogonal. Acesta este cazul luat în considerare în cele ce urmează. Deci pentru coordonate curbilinii ortogonale avem:

$$\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1.185}$$

în care δ_{ij} este aşa-numitul simbol al lui Kronecker.

Revenind la vectorul viteză (1.183) acesta se poate scrie:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \bar{u}_i, \tag{1.186}$$

în care:

$$v_i = \dot{q}_i \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}\right| \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.187}$$

reprezintă proiecţiile vitezei pe direcţiile celor trei versori $\bar{u}_i$.

Din relaţia (1.183) se observă că $\bar{v}$ este funcţie de timp prin intermediul funcţiilor q_i şi $\dot{q}_i$. Expresia acceleraţiei se poate scrie deci:

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\bar{v}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}\,\ddot{q}_i\right), \tag{1.188}$$

formulă uneori utilă în aplicaţii.

Derivînd în raport de timp relaţia (1.183) obţinem:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\,\ddot{q}_i\right]. \tag{1.189}$$

Din compararea relaţiilor (1.188) şi (1.189) rezultă relaţiile:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}; \tag{1.190}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{1.191}$$

a căror utilitate o vom vedea ulterior. De remarcat că relaţia (1.190) se poate demonstra prin dezvoltarea celor doi membri ai ei, iar relaţia (1.191) rezultă direct din (1.183).

Scanned with OKEN Scanner

Revenind acum la vectorul acceleraţie $\bar{a}$, îl vom scrie sub forma analitică:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \bar{u}_i, \tag{1.192}$$

şi vom calcula proiecţiile acceleraţiei pe direcţiile versorilor $\bar{u}_i$, înmulţind scalar relaţia (1.192) cu versorii $\bar{u}_j (j = 1, 2, 3)$ şi ţinînd cont de relaţia (1.185):

$$a_j = \bar{a} \cdot \bar{u}_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{1.193}$$

Deci putem scrie:

$$a_i = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}}{\frac{v_i}{\dot{q}_i}} = \frac{\dot{q}_i}{v_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right) - \bar{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right)\right]. \tag{1.194}$$

Dar conform relaţiilor (1.190) şi (1.191) mai putem scrie:

$$a_i = \frac{\dot{q}_i}{v_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}\right]. \tag{1.195}$$

Introducînd funcţia scalară:

$$T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} v_i^2, \tag{1.196}$$

observăm că:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}; \tag{1.197}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.198}$$

Cu aceste două relaţii relaţia (1.189) devine:

$$a_i = \frac{\dot{q}_i}{v_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right], \tag{1.199}$$

şi acceleraţia $\bar{a}$ din (1.192) se scrie:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\dot{q}_i}{v_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \cdot \bar{u}_i \tag{1.200}$$

în care funcţia T e dată de relaţia (1.196), iar proiecţiile v_i ale vitezei de relaţia (1.187).

Ca aplicaţii vom considera cazul coordonatelor cilindrice (în particular polare) şi sferice.

Fie un punct M determinat de cele trei coordonate cilindrice ρ, θ şi z (fig. 1.43).

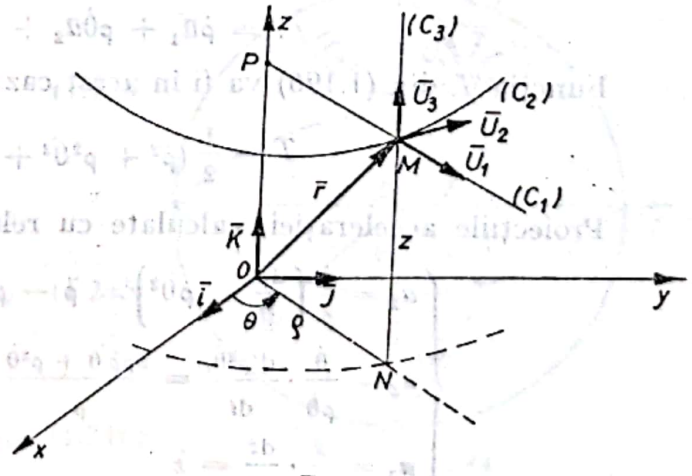


Fig. 1.43

Curbele de coordonate sînt (C_1): dreapta MP perpendiculară pe axa Oz; (C_2): cercul cu centrul P de rază PM și paralel cu planul Oxy; (C_3): dreapta MN perpendiculară pe planul Oxy:

$$\begin{aligned} &(C_1): \rho = \rho(t) \qquad \theta = ct. \qquad z = ct. \\ &(C_2): \theta = \theta(t) \qquad \rho = ct. \qquad z = ct. \\ &(C_3): z = z(t) \qquad \rho = ct. \qquad \theta = ct. \end{aligned}$$

După tangentele la cele trei curbe s-au luat cei trei versori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, care se scriu analitic în sistemul $Oxyz$ sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}; \\ \bar{u}_2 &= -\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}; \\ \bar{u}_3 &= \bar{k}, \end{aligned} \tag{1.201}$$

și se vede că formează un triedru ortogonal.

Vectorul de poziție $\bar{r}$ se scrie analitic sub forma:

$$\bar{r} = \rho\cos\theta\bar{i} + \rho\sin\theta\bar{j} + z\bar{k}. \tag{1.202}$$

Din relația (1.202) utilizînd și relația (1.201) se deduce:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\rho} = \cos\theta\bar{i} + \sin\theta j = \bar{u}_1 \\ \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta i + \rho\cos\theta j = \rho\bar{u}_2 \\ \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial z} = \bar{k} = \bar{u}_3 \end{cases} \tag{1.203}$$

Proiecțiile vitezei, calculate cu relația (1.187), vor fi prin urmare:

$$\begin{cases} v_1 = \dot{\rho} \\ v_2 = \rho\dot{\theta} \\ v_3 = \dot{z} \end{cases} \tag{1.204}$$

Viteza punctului M va fi deci:

$$\bar{v} = \dot{\rho}\bar{u}_1 + \rho\dot{\theta}\bar{u}_2 + \dot{z}\bar{u}_3. \tag{1.205}$$

Funcția T din (1.196) va fi în acest caz:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2). \tag{1.206}$$

Proiecțiile accelerației, calculate cu relația (1.199) vor fi deci:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\dot{\rho}}{\rho}\left(\dfrac{d\dot{\rho}}{dt} - \rho\dot{\theta}^2\right) = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_2 = \dfrac{\dot{\theta}}{\rho\dot{\theta}} \cdot \dfrac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt} = \dfrac{2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta}}{\rho} = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ a_3 = \dfrac{\dot{z}}{\dot{z}} \cdot \dfrac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} \end{cases} \tag{1.207}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acceleraţia lui M va fi deci:

$$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\bar{u}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\,\bar{u}_2 + \ddot{z}\bar{u}_3. \tag{1.208}$$

Coordonatele polare reprezintă cazul particular al coordonatelor cilindrice la care $z = 0$, mişcarea punctului M avînd loc în planul Oxy. Viteza şi acceleraţia în acest caz se deduc din relaţiile (1.205) şi (1.208) prin particularizarea $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$:

$$\bar{v} = \dot{\rho}\bar{u}_1 + \rho\dot{\theta}\bar{u}_2; \tag{1.209}$$

$$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\bar{u}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\,\bar{u}_2. \tag{1.210}$$

Fie acum un punct M determinat de cele trei coordonate sferice r, θ şi φ (fig. 1.44).

Curbele de coordonate sînt în acest caz: (C_1) raza OM, (C_2) paralela şi (C_3) meridianul ce trec prin M pe sfera de rază r. Versorii tangentelor la aceste curbe se scriu analitic:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= \cos\varphi\cos\theta\bar{i} + \cos\varphi\sin\theta\bar{j} + \sin\varphi\bar{k}\\
\bar{u}_2 &= -\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}\\
\bar{u}_3 &= -\sin\varphi\cos\theta\bar{i} - \sin\varphi\sin\theta\bar{j} + \cos\varphi\bar{k},
\end{aligned} \tag{1.211}$$

şi se vede că formează un triedru ortogonal.

Vectorul de poziţie $\bar{r}$ se scrie analitic:

$$\bar{r} = r\cos\varphi\cos\theta\bar{i} + r\cos\varphi\sin\theta\bar{j} + r\sin\varphi\bar{k} \tag{1.212}$$

Din relaţiile (1.212) şi (1.211) urmează:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial r} = \cos\varphi\cos\theta\bar{i} + \cos\varphi\sin\theta\bar{j} + \sin\varphi\bar{k} = \bar{u}_1\\
\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\theta} = -r\cos\varphi\sin\theta\bar{i} + r\cos\varphi\cos\theta\bar{j} = r\cos\varphi\,\bar{u}_2\\
\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi\cos\theta\bar{i} - r\sin\varphi\sin\theta\bar{j} + r\cos\varphi\bar{k} = r\bar{u}_3.
\end{cases} \tag{1.213}$$

Proiecţiile vitezei pe cei trei versori vor fi deci:

$$\begin{cases}
v_1 = \dot{r}\\
v_2 = r\dot{\theta}\cos\varphi\\
v_3 = r\dot{\varphi}
\end{cases} \tag{1.214}$$

Viteza lui M are expresia:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{u}_1 + r\dot{\theta}\cos\varphi\,\bar{u}_2 + r\dot{\varphi}\,\bar{u}_3. \tag{1.215}$$

Funcţia T are expresia:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2), \tag{1.216}$$

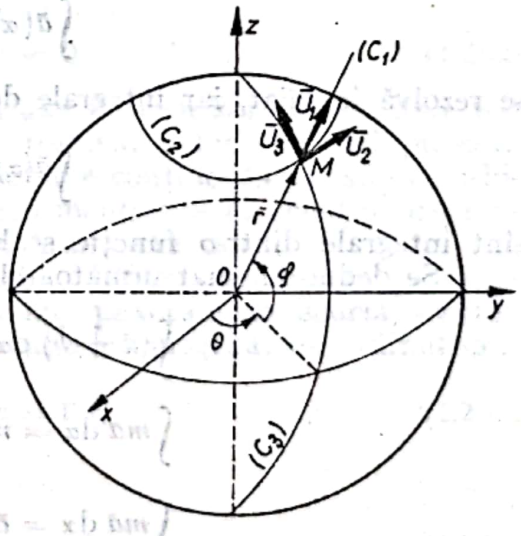


Fig. 1.44

Scanned with OKEN Scanner

și cele trei proiecții ale acceleraţiei sînt:

$$a_1 = \frac{\dot r}{\dot r}\left(\frac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}t} - r\dot\theta^2\cos^2\varphi - r\dot\varphi^2\right) = \ddot r - r\dot\theta^2\cos^2\varphi - r\dot\varphi^2$$

$$a_2 = \frac{\dot\theta}{r\,\dot\theta\cos\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\theta\, r^2\cos^2\varphi) = \frac{r^2\ddot\theta\cos^2\varphi + 2r\dot r\dot\theta\cos^2\varphi - 2r^2\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{r\cos\varphi} =$$

$$= r\ddot\theta\cos\varphi + 2\dot r\dot\theta\cos\varphi - 2r\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi \qquad (1.217)$$

$$a_3 = \frac{\dot\varphi}{r\dot\varphi}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot\varphi) + r^2\dot\theta^2\sin\varphi\cos\varphi\right] = \frac{2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi + r^2\dot\theta^2\sin\varphi\cos\varphi}{r} =$$

$$= 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi + r\dot\theta^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Acceleraţia lui M are expresia:

$$\bar a = (\ddot r - r\dot\theta^2\cos^2\varphi - r\dot\varphi^2)\,\bar u_1 + \left[\frac{1}{r\cos\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot\theta\cos^2\varphi)\right]\bar u_2 +$$

$$+\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot\varphi) + r\dot\theta^2\sin\varphi\cos\varphi\right]\bar u_3. \qquad (1.218)$$

1.2.5. **Integrale vectoriale.** Fie un sistem de referinţă cartezian fix $Oxyz$ şi un vector variabil $\bar v(\alpha)$, funcţie de parametrul α care în particular poate fi şi timpul. Integrala nedefinită a vectorului $\bar v$ se calculează cu relaţia:

$$\int\bar v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \bar i\int v_x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \bar j\int v_y(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \bar k\int v_z(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \bar u(\alpha), \qquad (1.219)$$

iar integrala definită devine:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\bar v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \bar u(\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \bar u(\alpha_2) - \bar u(\alpha_1). \qquad (1.220)$$

Cu aceasta, integrale de tipul:

$$\int m(\alpha)\cdot\bar v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha;$$

$$\int\bar a(\alpha)\times\bar b(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,$$

se rezolvă imediat, iar integrale de tipul:

$$\int\bar a(\alpha)\cdot\bar b(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,$$

sînt integrale dintr-o funcţie scalară.

Se deduc imediat următoarele proprietăţi utile în aplicaţii:

$$\int(\bar a + \bar b)\,\mathrm{d}\alpha = \int\bar a\,\mathrm{d}\alpha + \int\bar b\,\mathrm{d}\alpha \qquad (1.221)$$

$$\int m\bar a\,\mathrm{d}\alpha = m\int\bar a\,\mathrm{d}\alpha \quad (m = \mathrm{ct}) \qquad (1.222)$$

$$\int m\bar a\,\mathrm{d}\alpha = \bar a\int m\,\mathrm{d}\alpha \quad (\bar a = \mathrm{ct}) \qquad (1.223)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\int \bar{a} \times \bar{b}\, d\alpha = \bar{a} \times \int \bar{b}\, d\alpha \quad (\bar{a} = \text{ct}) \tag{1.224}$$

$$\int \bar{a} \cdot \bar{b}\, d\alpha = \bar{a} \cdot \int \bar{b}\, d\alpha \quad (\bar{a} = \text{ct}) \tag{1.225}$$

$$\int \frac{d\bar{a}}{d\alpha} \times \bar{b}\, d\alpha = \bar{a} \times \bar{b} - \int \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{d\alpha}\, d\alpha \tag{1.226}$$

$$\int \frac{d\bar{a}}{d\alpha} \cdot \bar{b}\, d\alpha = \bar{a} \cdot \bar{b} - \int \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{d\alpha}\, d\alpha \tag{1.227}$$

$$\int \frac{dm}{d\alpha} \bar{a}\, d\alpha = m\bar{a} - \int m \frac{d\bar{a}}{d\alpha}\, d\alpha. \tag{1.228}$$

În afara integralelor de linie de mai sus, mai folosim integralele curbilinii de tipul:

$$\int_{(c)} \bar{v}(\alpha) \cdot d\bar{r}(\alpha) = \int_{(c)} v_x \cdot dr_x + v_y\, dr_y + v_z \cdot dr_z, \tag{1.229}$$

integrale de suprafață de tipul:

$$\iint_{(S)} \bar{v}(x, y, z)\, ds = \bar{i} \iint_{(S)} v_x\, ds + \bar{j} \iint_{(S)} v_y\, ds + \bar{k} \iint_{(S)} v_z\, ds \tag{1.230}$$

și integrale de volum de tipul:

$$\iiint_{(v)} \bar{v}(x, y, z)\, dv = \bar{i} \iiint_{(v)} v_x\, dv + \bar{j} \iiint_{(v)} v_y\, dv + \bar{k} \iiint_{(v)} v_z\, dv. \tag{1.231}$$

Aditivitatea pe reuniunea unor domenii disjuncte este caracteristică tuturor acestor integrale.

1.2.6. **Ecuații diferențiale vectoriale.** Fie un vector variabil $\bar{v}(t)$, funcție de timp și un sistem de referință cartezian fix $Oxyz$. Orice ecuație diferențială ordinară:

$$f(t, \bar{v}, \dot{\bar{v}}, \ddot{\bar{v}} \ldots) = 0 \tag{1.232}$$

se rezolvă prin proiectarea ei pe cele trei axe de coordonate obținînd trei ecuații diferențiale scalare care dau prin rezolvarea lor cele trei proiecții ale vectorului $\bar{v}$ pe axe. Observăm că soluția $\bar{v}$ conține $3n$ constante arbitrare scalare, n fiind ordinul ecuației. Facem mențiunea că ecuațiile diferențiale ale Mecanicii teoretice sînt de ordinul unu sau doi.

O atenție specială vom acorda ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, a căror rezolvare se poate face pe o cale mai scurtă, evitînd proiectarea lor pe axe. Fie o astfel de ecuație neomogenă, de ordinul doi:

$$a_2 \ddot{\bar{v}} + a_1 \dot{\bar{v}} + a_0 \bar{v} = \bar{u}(t). \tag{1.233}$$

Ecuația omogenă corespunzătoare este:

$$a_2 \ddot{\bar{v}} + a_1 \dot{\bar{v}} + a_0 \bar{v} = 0, \tag{1.234}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru care încercînd soluţii de forma:

$$\bar{v} = \bar{C}\, e^{st}, \tag{1.235}$$

obţinem ecuaţia caracteristică:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \tag{1.236}$$

Rădăcinile s_1 şi s_2 ale acestei ecuaţii algebrice pot fi:

$$s_1 \neq s_2 \text{ (reale)} \tag{1.237}$$

$$s_1 = s_2 \text{ (reale)} \tag{1.238}$$

$$s_{1,2} = \varepsilon \pm i\omega \text{ (complexe)}. \tag{1.239}$$

În cazurile (1.237), (1.238) şi (1.239) soluţia generală a ecuaţiei (1.234) se va scrie:

$$\bar{v} = \bar{C}_1 e^{s_1 t} + \bar{C}_2 e^{s_2 t}; \tag{1.240}$$

$$\bar{v} = \bar{C}_1 e^{s_1 t} + \bar{C}_2 t e^{s_1 t}; \tag{1.241}$$

$$\bar{v} = e^{\varepsilon t} \cdot (\bar{C}_1 \cos \omega t + \bar{C}_2 \sin \omega t), \tag{1.242}$$

în care $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$ sînt două constante vectoriale arbitrare.

Pentru rezolvarea ecuaţiei neomogene (1.233) vom obţine la început o soluţie particulară a acestei ecuaţii neomogene cu ajutorul metodei variaţiei constantelor a lui *Lagrange*.

Fie $\bar{v}_1(t)$ soluţia generală a ecuaţiei omogene:

$$\bar{v}_1 = \bar{C}_1 f_1(t) + \bar{C}_2 f_2(t). \tag{1.243}$$

Pentru ecuaţia neomogenă vom încerca o soluţie de forma:

$$\bar{v}_2 = \bar{C}_1(t) f_1(t) + \bar{C}_2(t) f_2(t). \tag{1.244}$$

Prin aplicarea metodei variaţiei constantelor vom obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dot{\bar{C}}_1 f_1 + \dot{\bar{C}}_2 f_2 = 0 \\ \dot{\bar{C}}_1 \dot{f}_1 + \dot{\bar{C}}_2 \dot{f}_2 = \dfrac{\bar{u}}{a_2} \end{cases} \tag{1.245}$$

şi în final avem:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1(t) &= -\frac{1}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_2}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}\, dt; \\ \bar{C}_2(t) &= \frac{1}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_1}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}\, dt. \end{aligned} \tag{1.246}$$

Soluţia particulară $\bar{v}_2(t)$ a ecuaţiei neomogene fiind acum găsită sub forma (1.244), se poate vedea simplu că soluţia generală a ecuaţiei neomogene se scrie:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{C}_1 f_1 + \bar{C}_2 f_2 - \frac{f_1}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_2}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}\, dt + \\ + \frac{f_2}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_1}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2}\, dt. \end{aligned} \tag{1.247}$$

Scanned with OKEN Scanner

1.3. ELEMENTE DE TEORIA DISTRIBUȚIILOR

În cele ce urmează se presupun cunoscute noțiunile de *Analiză matematică* și teoria transformatelor *Laplace* din *Matematicile speciale.*

1.3.1. **Noțiunea de distribuție.** Noțiunea de distribuție a apărut odată cu introducerea de către *Dirac* a funcției sale generalizate $\delta(x)$, definită astfel:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pt. } x < 0 \\ \infty & \text{pt. } x = 0 \\ 0 & \text{pt. } x > 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1. \tag{1.248}$$

Dezvoltarea ulterioară a teoriei distribuțiilor a dus la definirea unei distribuții sub o formă generală pe care o vom prezenta aici sub titlu de curiozitate, deoarece în orice problemă de *Mecanică* ce comportă discontinuități sînt necesare doar două distribuții: a lui *Dirac* și a lui *Heaviside.*

Definind produsul de convoluție a două funcții $f(x)$ și $g(x)$ prin integrala lui *Duhamel:*

$$f * g = \int_0^x f(y) \cdot g(x-y) \cdot dy, \tag{1.249}$$

observăm că dacă f și g sînt continue el reprezintă tot o funcție continuă. Există însă și funcții discontinue, care prin operația de produs de convoluție cu o funcție continuă conduc tot la o funcție continuă. Aceste funcții discontinue se numesc distribuții, sau funcții generalizate.

1.3.2. **Funcția treaptă a lui Heaviside și impulsul unitar al lui Dirac.** Funcția treaptă a lui *Heaviside,* aplicată pentru prima dată în *Electrotehnică,* se definește astfel:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pr. } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{pt. } x > 0. \end{cases} \tag{1.250}$$

Vom arăta acum că funcțiile $\delta(x)$ și $H(x)$ sînt niște distribuții:

Fie produsul de convoluție între δ și funcția continuă f:

$$f * \delta = \int_0^x f(y)\,\delta(x-y)\,dy. \tag{1.251}$$

Datorită definiției (1.248) putem scrie identitatea:

$$f(y)\,\delta(x-y) = f(x)\,\delta(x-y), \tag{1.252}$$

și deci:

$$f * \delta = f(x) \cdot \int_0^x \delta(x-y)\,dy. \tag{1.253}$$

Dar:

$$\int_0^x \delta(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} \delta(x-y)\,dy - \int_x^{\infty} \delta(x-y)\,dy = 1, \tag{1.254}$$

datorită nulității ultimelor două integrale.

Scanned with OKEN Scanner

Deci putem scrie:

$$f * \delta = f. \tag{1.255}$$

Funcția f fiind continuă, relația (1.255) ne arată în primul rînd că funcția discontinuă δ este o distribuție și în al doilea rînd că distribuția δ reprezintă elementul unitate al operației de produs de convoluție.

Funcțiile $\delta'_{(x)}$, $\delta''_{(x)}$, ..., $\delta^{(n)}_{(x)}$, ... pot fi privite formal ca derivate succesive ale distribuției $\delta(x)$ și se poate arăta ușor că există relația:

$$f * \delta^{(n)} = f^{(n)} + f^{(n-1)}_{(0)}\delta + f^{(n-2)}_{(0)}\delta' + \ldots + f_{(0)} \cdot \delta^{(n-1)}. \tag{1.256}$$

Aplicînd acestei relații operatorul *transformată Laplace* „$\mathcal{L}$" definit astfel:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty f(x)\, e^{-sx}\, dx, \tag{1.257}$$

și ținînd seama de următoarea proprietate a produsului de convoluție:

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) \tag{1.258}$$

obținem

$$\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(\delta^{(n)}) = \mathcal{L}(f^{(n)}) + f^{(n-1)}_{(0)}\, \mathcal{L}(\delta) + f^{(n-2)}_{(0)}\, \mathcal{L}(\delta') + \\ + \ldots + f(0)\, \mathcal{L}(\delta^{(n-1)}). \tag{1.259}$$

Scriind acum relația cunoscută a calculului operațional:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - 1 \cdot f^{(n-1)}_{(0)}, \tag{1.260}$$

sub forma:

$$\mathcal{L}(f) \cdot s^n = \mathcal{L}(f^{(n)}) + f^{(n-1)}_{(0)} \cdot 1 + f^{(n-2)}_{(0)} \cdot s + \ldots + f(0) \cdot s^{n-1}, \tag{1.261}$$

și comparînd relațiile (1.260) și (1.261) deducem următorul tabel cu transformate Laplace:

f	$\delta(x)$	$\delta'_{(x)}$	$\delta''_{(x)} \ldots \delta^{(n)}_{(x)} \ldots$
$\mathcal{L}(f)$	1	s	$s^2 \ldots s^n \ldots$

(1.262)

Vom calcula acum produsul de convoluție al funcției H cu o funcție continuă f sub forma:

$$f * H = \int_0^x f(y)\, H(x - y)\, dy = \int_0^x f(y)\, dy = g(x), \tag{1.263}$$

deoarece:

$$0 < y < x \Rightarrow x - y > 0 \quad H(x - y) = 1. \tag{1.264}$$

Funcția g din (1.263) este evident continuă și de aici rezultă, f fiind și ea continuă, că funcția discontinuă $H(x)$ este o distribuție.

Scanned with OKEN Scanner

Datorită implicației (1.264) se poate deduce imediat prin calcul direct următorul tabel de *transformate Laplace:*

$$\begin{array}{c|cccccc} f & H(x) & \frac{x}{1!}H(x) & \frac{x^2}{2!}H(x) & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}H(x) & \dots \\ \hline \mathcal{L}(f) & s^{-1} & s^{-2} & s^{-3} & \dots & s^{-n} & \dots \end{array} \tag{1.265}$$

care e o completare spre stînga a relației (1.262).

Mai menționăm faptul că distribuțiile δ și H pot fi introduse și ca limite ale unor funcții continui depinzînd de un parametru.

Fie o funcție reală și continuă y de variabilă x și parametru λ, definită pe mulțimea numerelor reale:

$$y = f(x, \lambda) \qquad (x \in R) \tag{1.266}$$

care să satisfacă următoarele condiții:

$$f(x, \lambda) \geqslant 0 \qquad (x \in R); \tag{1.267}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, \lambda) = \lim_{x \to \infty} f(x, \lambda) = 0; \tag{1.268}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_a^b f(x, \lambda)\, dx = \begin{cases} 1 & 0 \in [a, b] \\ 0 & 0 \notin [a, b] \end{cases}; \tag{1.269}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda)\, dx = 1 \qquad \text{(pt. orice } \lambda). \tag{1.270}$$

În acest caz distribuția lui *Dirac* se poate defini ca:

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \to 0} f(x, \lambda), \tag{1.271}$$

deoarece relațiile din definiția (1.248) se pot deduce ușor din relațiile (1.266) — — (1.271).

Considerăm acum funcția continuă:

$$g(x, \lambda) = \int_a^x f(x, \lambda)\, dx, \tag{1.272}$$

în care $a < 0$. Pe baza relației (1.269) putem scrie:

$$\lim_{\lambda \to 0} g(x, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pt. } x > 0 \\ 0 & \text{pt. } x < 0 \end{cases} \tag{1.273}$$

și prin compararea relațiilor (1.250) și (1.273) deducem:

$$H(x) = \lim_{\lambda \to 0} g(x, \lambda). \tag{1.274}$$

În felul acesta, cu ajutorul relațiilor (1.271) și (1.274) se pot introduce distribuțiile δ și H ca limite ale unor funcții continue f și g. Se pot însă defini distribuțiile δ și H într-un mod cu totul similar, luînd în relațiile (1.266) și (1.272) $\lambda = \frac{1}{n}$, cu n întreg, și punînd peste tot $n \to \infty$ (prin valori dis-

Scanned with OKEN Scanner

crete) în loc de $\lambda \to 0$ (prin valori continue). Rezultatul este definirea distribuţiilor δ şi H ca limită ale şirurilor de funcţii:

$$f_n(x) = f\left(x, \frac{1}{n}\right); \tag{1.275}$$

$$g_n(x) = g\left(x, \frac{1}{n}\right), \tag{1.276}$$

numite şiruri reprezentative δ, respectiv H.

Totuşi definiţia distribuţiilor δ şi H ca limite ale unor funcţii continue este cea pe care o preferăm, ea ilustrînd foarte bine ideea, pe care o vom urmări pe viitor, că orice discontinuitate poate fi privită ca un caz limită al continuităţii.

Vom da aici ca exemplu una dintre numeroasele funcţii continui $f(x, \lambda)$ care satisfac condiţiile (1.267) — (1.270) şi a căror verificare o lăsăm pe seama cititorului:

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2\left[e^{\frac{x}{\lambda^2}} + e^{-\frac{x}{\lambda^2}} + 2\right]}, \tag{1.277}$$

pentru care funcţia $g(x, \lambda)$ este:

$$g(x, \lambda) = \int_a^x f(x, \lambda)\, dx = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\lambda^2}}} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{a}{\lambda^2}}} \quad (a < 0). \tag{1.278}$$

Deci unul din modurile de a introduce distribuţiile δ şi H este spre exemplu:

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda^2\left[e^{\frac{x}{\lambda^2}} + e^{-\frac{x}{\lambda^2}} + 2\right]}; \tag{1.279}$$

$$H(x) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\lambda^2}}}. \tag{1.280}$$

1.3.3. **Operaţii de derivare şi integrare cu funcţiile H şi δ în sensul teoriei distribuţiilor.** Din relaţia (1.260) deducem:

$$\mathcal{L}(f') = s \cdot \mathcal{L}(f) - f(0), \tag{1.281}$$

şi deci pentru $f = H$:

$$\mathcal{L}(H') = s \cdot \mathcal{L}(H) - H(0), \tag{1.282}$$

care, cu relaţiile (1.250), (1.262) şi (1.265), se scrie:

$$\mathcal{L}(H') = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1 = \mathcal{L}(\delta). \tag{1.283}$$

Deci avem relaţiile:

$$H'(x) = \delta(x); \tag{1.284}$$

$$\int \delta(x)\, dx = H(x). \tag{1.285}$$

Scanned with OKEN Scanner

La fel de bine se poate observa din (1.272) că:

$$\frac{d}{dx} g(x, \lambda) = f(x, \lambda) \tag{1.286}$$

şi trecînd la limită:

$$\frac{d}{dx} \lim_{\lambda \to 0} g(x, \lambda) = \lim_{\lambda \to 0} f(x, \lambda), \tag{1.287}$$

din care rezultă tot relaţia (1.284).

Revenind acum la definiţia (1.250) a lui $H(x)$ observăm că pentru orice $a > 0$ avem relaţia:

$$H(x) = H(ax) \qquad (a > 0) \tag{1.288}$$

Notînd:

$$y = ax, \tag{1.289}$$

şi derivînd (1.288) în raport cu x obţinem:

$$H'(x) = aH'(y) \tag{1.290}$$

care datorită relaţiei (1.284) se scrie:

$$\delta(x) = a\delta(ax) \qquad (a > 0). \tag{1.291}$$

Pentru $a < 0$ se poate scrie relaţia:

$$H(-x) = H(ax) \qquad (a < 0) \tag{1.292}$$

care prin derivare în raport de x conduce la:

$$-\delta(-x) = a\delta(ax) \qquad (a < 0) \tag{1.293}$$

Dar din relaţia (1.248) se vede că:

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{1.294}$$

şi pe de-o parte rezultă relaţia:

$$-\delta(x) = a\delta(ax) \qquad (a < 0), \tag{1.295}$$

iar pe de altă parte prin integrarea în raport de x a relaţiei (1.294) obţinem:

$$H(x) = -H(-x) + C \tag{1.296}$$

în care se vede imediat $C = 1$ şi deci:

$$H(x) = 1 - H(-x). \tag{1.297}$$

Din relaţia (1.292) urmează imediat:

$$H(ax) = 1 - H(x) \qquad (a < 0) \tag{1.298}$$

Scanned with OKEN Scanner

Recapitulînd, vom scrie relaţiile:

$$H(ax)=\begin{cases} H(x) & \text{pt. } a>0 \\ 1-H(x) & \text{pt. } a<0 \end{cases} \tag{1.299}$$

$$\delta(ax)=\begin{cases} \frac{1}{a}\,\delta(x) & \text{pt. } a>0 \\ -\frac{1}{a}\,\delta(x) & \text{pt. } a<0 \end{cases} \tag{1.300}$$

Din definiţiile (1.248) şi (1.250) rezultă imediat definiţiile funcţiilor $\delta(x-x_0)$ şi $H(x-x_0)$, x_0 fiind o constantă arbitrară:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases} 0 & \text{pt. } x>x_0 \\ \infty & \text{pt. } x=x_0 \\ 0 & \text{pt. } x<x_0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1; \tag{1.301}$$

$$H(x-x_0)=\begin{cases} 0 & \text{pt. } x\leqslant x_0 \\ 1 & \text{pt. } x>x_0. \end{cases} \tag{1.302}$$

Cu aceste noţiuni precizate vom calcula două integrale foarte importante: $\int_a^b f'(x)\,H(x-x_0)\,dx$ şi $\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx$.

$$\int_a^b f'(x)\,H(x-x_0)\,dx=\int_{x_0}^b f'(x)H(x-x_0)\,dx-\int_{x_0}^a f'(x)\,H(x-x_0)\,dx. \tag{1.303}$$

Dar observăm că:

$$H(x-x_0)=\begin{cases} H(b-x_0) & \text{pt. } x\in(x_0,b) \\ H(a-x_0) & \text{pt. } x\in(x_0,a) \end{cases} \tag{1.304}$$

şi deci:

$$\int_a^b f'(x)\,H(x-x_0)\,dx=[f(b)-f(x_0)]\,H(b-x_0)-[f(a)-f(x_0)]\,H(a-x_0)= \qquad (a<b)$$

$$=\begin{cases} f(b)-f(a) & \text{pt. } x_0\leqslant a \\ f(b)-f(x_0) & \text{pt. } a\leqslant x_0\leqslant b \\ 0 & \text{pt. } x_0\geqslant b \end{cases} \tag{1.305}$$

A doua integrală este:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)\int_a^b\delta(x-x_0)\,dx, \tag{1.306}$$

dar:

$$\int_a^b\delta(x-x_0)\,dx=\int_{a-x_0}^{b-x_0}\delta(y)\,dy=H(b-x_0)-H(a-x_0)= \qquad (a<b)$$

$$=\begin{cases} 1 & \text{pt. } x_0\in(a,b) \\ 0 & \text{pt. } x_0\notin[a,b] \end{cases} \tag{1.307}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)\,[H(b-x_0)-H(a-x_0)] = \underset{(a<b)}{}$$

$$= \begin{cases} f(x_0) & \text{pt. } x_0 \in (a,b) \\ 0 & \text{pt. } x_0 \notin [a,b] \end{cases} \tag{1.308}$$

Această relație definește așa-zisa proprietate de filtrare a distribuției lui *Dirac*.

Distribuția $\delta(x-x_0)$ definită prin relațiile (1.301) se spune că este „concentrată" în punct $M_0(x_0)$ al axei reale Ox. În mod cu totul similar se poate extinde noțiunea de distribuție δ în planul Oxy sau în spațiul $Oxyz$, după cum urmează:

Dat fiind punctul $M_0(x_0, y_0)$ din planul Oxy vom defini distribuția δ „concentrată" în punctul M_0 prin relațiile:

$$\begin{cases} \delta(x-x_0, y-y_0) = \begin{cases} 0 & \text{pt. } x \neq x_0 \text{ sau } y \neq y_0 \\ \infty & \text{pt. } x = x_0 \text{ și } y = y_0 \end{cases} \\ \iint_{(\pi)} \delta(x-x_0, y-y_0)\,dx\,dy = 1 \end{cases} \tag{1.309}$$

unde (π) este planul Oxy.

Dat fiind punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ din spațiu vom defini distribuția δ „concentrată" în punctul M_0 prin relațiile:

$$\begin{cases} \delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \begin{cases} 0 & \text{pt. } x \neq x_0 \text{ sau } y \neq y_0 \text{ sau } z \neq z_0 \\ \infty & \text{pt. } x = x_0 \text{ și } y = y_0 \text{ și } z = z_0 \end{cases} \\ \iiint_{(\Sigma)} \delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\,dx\,dy\,dz = 1 \end{cases} \tag{1.310}$$

unde (Σ) este întregul spațiu.

Distribuțiile bi- și tridimensionale definite prin relația (1.309), respectiv (1.310) au proprietăți de filtrare cu totul analoage proprietății (1.308), și anume:

$$\iint_{(D)} f(x,y)\,\underset{M_0(x_0,y_0)}{\delta(x-x_0,\ y-y_0)}\,dx\,dy = \begin{cases} f(x_0,y_0) & \text{pt. } M_0 \in (D) \\ 0 & \text{pt. } M_0 \notin [D], \end{cases} \tag{1.311}$$

unde (D) este un anume domeniu din planul Oxy, iar $[D]$ este închiderea lui (D).

$$\iiint_{(v)} f(x,y,z) \cdot \delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \begin{cases} f(x_0,y_0,z_0) & \text{pt. } M_0 \in (V) \\ 0 & \text{pt. } M_0 \notin [V], \end{cases} \tag{1.312}$$

unde (V) este un anume volum, iar $[V]$ închiderea sa.

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_{(AB)} f(x, y, z)\, \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot ds =$$

$$= \begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) & \text{pt. } M_0 \in (AB) \\ 0 & \text{pt. } M_0 \notin [AB], \end{cases} \tag{1.313}$$

unde (AB) este un arc de curbă spațială, $[AB]$ închiderea sa, iar ds elementul de arc al curbei.

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \cdot \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot dS =$$

$$= \begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) & \text{pt. } M_0 \in (S) \\ 0 & \text{pt. } M_0 \notin [S] \end{cases} \tag{1.314}$$

unde (S) este o suprafață spațială, $[S]$ închiderea sa, iar dS elementul de arie al suprafeței.

Distribuțiile definite prin (1.309) și (1.310) se mai notează prin $\delta(M_0)$.

1.3.4. **Discontinuitățile mecanicii și tratarea lor ca mărimi continui cu ajutorul teoriei distribuțiilor.** În *Mecanica teoretică* întîlnim discontinuități în timp, cum sînt percuțiile, și în spațiu cum sînt forțele concentrate și masele concentrate. Menționăm faptul că toate aceste discontinuități sînt niște idealizări ale *Mecanicii teoretice*, în practică neexistînd nici percuții ideale (adică instantanee) și nici forțe sau mase concentrate într-un punct.

Să considerăm un punct material liber care suferă o percuție ideală. Aceasta înseamnă aplicarea instantanee la momentul t_0 a unei forțe percutante $\bar{F}_p$ care produce o variație instantanee finită a vitezei particulei de la $\bar{v}_0$ la $\bar{v}_1$:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_0. \tag{1.315}$$

În teoria ciocnirilor (paragraful 5.4) vom vedea că mărimea $\bar{P}$ numită percuție este:

$$\bar{P} = m \cdot \Delta\bar{v} \tag{1.316}$$

Deci:

$$m\bar{v}_1 = m\bar{v}_0 + \bar{P} \text{ pt. } (t > t_0) \tag{1.317}$$

De aici deducem:

$$m\bar{v}(t) = \begin{cases} m\bar{v}_0 & \text{pt. } t \leqslant t_0 \\ m\bar{v}_0 + P & \text{pt. } t > t_0 \end{cases} \tag{1.318}$$

care se mai poate scrie:

$$m\bar{v}(t) = m\bar{v}_0 + \bar{P} \cdot H(t - t_0) \tag{1.319}$$

Pe de altă parte știm că legea a doua a lui *Newton* pentru un punct material liber se scrie:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}. \tag{1.320}$$

Deci în cazul nostru forța percutantă $\bar{F}_p(t)$ va avea expresia:

$$\bar{F}_p(t) = \bar{P} \cdot \delta(t - t_0), \tag{1.321}$$

cu care se poate lucra exact ca și cu o forță continuă în timp, cu condiția ca derivările și integrările să fie făcute în sensul teoriei distribuțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

— Dacă asupra punctului nostru acționează o forță continuă în timp $\bar{F}_c(t)$ și percuțiile $\bar{P}_i$ la momentele $t_i (i = 1, 2, ..., n)$, punctul respectiv poate fi privit, datorită principiului independenței acțiunii forțelor, ca fiind acționat de forța $\bar{F}(t)$ a cărei expresie este:

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_c(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i \, \delta(t - t_i). \tag{1.322}$$

Fie acum o forță $\bar{F}$ concentrată într-un punct M_0 al unui domeniu unidimensional: curba (C) care în particular poate fi axa Ox. Dacă punctele domeniului sînt precizate prin coordonata curbilinie s și $M_0(s)$ este punctul de concentrare, alegîndu-ne o porțiune (AB) a acestui domeniu, $A(a)$ și $B(b)$ fiind extremitățile domeniului, putem privi funcția $\bar{p}(s)$:

$$\bar{p}(s) = \bar{F} \cdot \delta(s - s_0) \tag{1.323}$$

ca fiind densitatea unui sistem continuu de forțe distribuite pe (AB), datorită relației:

$$\int_{(AB)} \bar{p} \, ds = \int_a^b \bar{F} \delta(s - s_0) \, ds = \begin{cases} \bar{F} & \text{pt. } s_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pt. } s_0 \notin [a, b] \end{cases} \tag{1.324}$$

În cazul cînd pe (AB) avem un sistem continuu de forțe a cărui densitate este $\bar{p}_c(s)$ și n forțe concentrate $\bar{F}_i$ în punctele $M_i(s_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$, putem scrie densitatea sistemului rezultant de forțe ca fiind:

$$\bar{p}(s) = \bar{p}_c(s) + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \delta(s - s_i) \tag{1.325}$$

În mod cu totul analog cînd într-un punct M_0 (s_0) al domeniului (AB) de mai sus se găsește o masă concentrată m, densitatea liniară de masă a domeniului se poate scrie:

$$\rho(s) = m \cdot \delta(s - s_0), \tag{1.326}$$

datorită relației evidente:

$$\int_{(AB)} \rho(s) \, ds = \int_a^b m\delta(s - s_0) \, ds = \begin{cases} m & \text{pt. } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pt. } s_0 \notin [a, b] \end{cases} \tag{1.327}$$

iar dacă pe domeniul (AB) avem o masă continuu distribuită cu densitatea liniară de masă $\rho_c(s)$ și n mase concentrate m_i în punctele $M_i(s_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$, densitatea liniară de masă a domeniului (AB) se poate scrie:

$$\rho(s) = \rho_c(s) + \sum_{i=1}^{n} m_i \delta(s - s_i) \tag{1.328}$$

În cazul în care vom considera un sistem de forțe concentrate $\bar{F}_i$ în punctele M_i din spațiu sau plan, $(i = 1, 2, ..., n)$ suprapus peste un sistem continuu de forțe a cărui densitate este $\bar{p}_c(x, y, z)$ densitatea întregului sistem se poate scrie sub forma:

$$\bar{p}(x, y, z) = \bar{p}_c(x, y, z) + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \delta(M_i). \tag{1.329}$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog în cazul suprapunerii unor mase concentrate m_i în punctele $M_i(i = 1, 2, \ldots n)$ peste o masă continuă de densitate $\delta_c(x, y, z)$ densitatea întregului sistem se poate scrie:

$$\rho(x, y, z) = \rho_c(x, y, z) + \sum_{i=1}^{n} m_i \delta(M_i). \tag{1.330}$$

Mai există un caz interesant și util de ilustrat aici. E cazul aplicării unei percuții ideale $\bar{P}$ la momentul t_0 în punctul $M_0(s_0)$ al unui sistem unidimensional de puncte.

Percuția $\bar{P}$ poate fi considerată ca fiind datorată unei forțe percutante $\bar{F}_p(t)$ formal continuă în timp.

$$\bar{F}_p(t) = \bar{P} \cdot \delta(t - t_0). \tag{1.331}$$

La rîndul său forța $\bar{F}_p(t)$, evident concentrată în $M_0(s_0)$, poate fi înlocuită printr-un sistem de forțe formal continuu, a cărui densitate este:

$$\bar{p}(s, t) = \bar{F}(t) \cdot \delta(s - s_0). \tag{1.332}$$

Deci în final percuția $\bar{P}$ aplicată la momentul t_0 în punctul $M_0(s_0)$ al unui sistem unidimensional de puncte poate fi înlocuită printr-un sistem de forțe formal continui în timp și spațiu, a cărui densitate este:

$$\bar{p}(s, t) = \bar{P} \cdot \delta(s - s_0) \cdot \delta(t - t_0). \tag{1.333}$$

1.3.5. **Considerații recapitulative.** Utilizarea teoriei distribuțiilor are ca idee studierea fenomenelor discontinui ca niște fenomene continui, cazul în care intervin mărimi continui și discontinui în același fenomen, fiind astfel mult ușurat. De remarcat că introducerea expresiilor forței percutante (1.321) formal continuă în timp, a densității sistemului de forțe (1.323) formal continuă în spațiu și a densității masice (1.326) formal continuă în spațiu, se poate face foarte sugestiv plecînd de la definiția (1.371) a distribuției δ ca limită a unor funcții continui, aceasta ilustrînd ideea că putem privi discontinuul ca un caz limită a continuului.

O observație demnă de subliniat este că prin utilizarea teoriei distribuțiilor tratarea fenomenelor ce implică discontinuități nu se mai face pe porțiuniie delimitate (în timp sau spațiu) de aceste discontinuități utilizînd apoi condițiile la limită pentru fiecare porțiune, ci pe întregul interval (temporal sau spațial) de desfășurare a acestor fenomene. Rezultatul este o tratare unitară și în multe cazuri mult mai rapidă a fenomenelor ce implică discontinuități, față de tratarea clasică greoaie și pe porțiuni a acestor fenomene.

Am prezentat aici un minim necesar de noțiuni de teoria distribuțiilor care permit, fără a pierde nimic din rigoarea matematică, o abordare mai ușoară a unor fenomene ce implică discontinuități, atît în *Mecanică* cît și în *Rezistența materialelor*.

1.4. ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL

În cele ce urmează vom schița un minimum de elemente și rezultate ale calculului variațional necesare în unele probleme de *Mecanică*.

1.4.1. **Problema de bază a calculului variațional. Funcțională. Tipuri de extremum-uri.** Dată fiind o clasă de funcții, dacă oricărei funcții $y(x)$ din această clasă îi corespunde un număr real $J(y)$ vom spune că $J(y)$ este o func-

ţională de funcţia $y(x)$. La fel de bine se poate stabili o corespondenţă între funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ aparţinînd unei anume clase şi numărul real $J(y_1, y_2, ..., y_n)$ şi în acest caz avem o funcţională de mai multe funcţii. Mai menţionăm faptul că funcţia y sau funcţiile $y_i (i = 1, 2, ..., n)$ pot fi funcţii de mai multe variabile $x_j (j = 1, 2, ..., p)$. În toate aceste cazuri deci, o aplicaţie a mulţimii funcţiilor unei anume clase de funcţii pe mulţimea numerelor reale se numeşte funcţională. Problema de bază a calculului variaţional este găsirea extremum-urilor (maxim sau minim) unei funcţionale, mai exact găsirea „variabilelor independente", funcţiile $y_i(x)$ care realizează un astfel de extremum.

În cele ce urmează ne vom referi numai la patru tipuri de funcţionale:

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \quad y = y(x); \tag{1.334}$$

$$J = \int_a^b F(x, y, y', ..., y^{(n)})\, dx\, y = y(x); \tag{1.335}$$

$$J = \int_b^b F(x, y_i, y_i')\, dx\, y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1.336}$$

$$J = \iint ... \int F(x_i, y, y_{x_i})\, dx_1\, dx_2 ... dx_n\, y = y(x_1, x_2, ..., x_n); \tag{1.337}$$

$$y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

În toate aceste funcţionale F este o funcţie continuă de variabilele sale. Condiţiile specifice impuse la studiul fiecăreia dintre aceste funcţionale vor fi precizate ulterior.

Ne vom referi acum la funcţionala de tipul (1.334). Fie o clasă $y(x)$ de funcţii admisibile (curbe admisibile) pentru problema noastră, clasă pe care o vom preciza la timpul cuvenit. Fie $y_e(x)$ acea funcţie (curbă) a clasei care realizează un maximum al funcţionalei J. Vom spune că J are un maxim absolut pentru $y_e(x)$ dacă

$$J(y_e) \geqslant J(y) \tag{1.338}$$

y fiind oricare funcţie (curbă) a clasei. În mod analog se defineşte şi minimul absolut.

Vom defini acum distanţa de ordinul n între curbele $y(x)$ şi $z(x)$ ca fiind cel mai mare dintre maximele expresiilor:

$$| z(x) - y(x) |,$$
$$| z'(x) - y'(x) |$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$| z^{(n)}(x) - y^{(n)}(x) |$$

pentru $x \in [a, b]$.

Vom defini vecinătatea ε de ordinul n a curbei $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ca fiind mulţimea curbelor $z = z(x)$ ale căror distanţe de ordinul n la curba $y = y(x)$ sînt mai mici decît ε.

Scanned with OKEN Scanner

Vom spune că funcţionala:

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

are pentru curba $y = y_0(x)$ un maxim relativ tare dacă pentru toate curbele $y = y(x)$ aflate într-o vecinătate ε de ordinul zero a curbei $y = y_0(x)$ avem relaţia:

$$J(y_0) \geqslant J(y). \tag{1.339}$$

Vom spune că funcţionala de mai sus are pentru curba $y = y_0(x)$ un maxim relativ slab dacă putem scrie relaţia (1.339) pentru toate curbele $y = y(x)$ aflate într-o vecinătate ε de ordinul unu a curbei $y = y_0(x)$. Minimul relativ tare şi cel relativ slab se definesc în mod cu totul analog, schimbînd sensul inegalităţii în relaţia (1.339).

Orice extremum absolut este în acelaşi timp şi extremum relativ tare şi slab. Orice extremum tare este în acelaşi timp şi extremum slab, reciproca putînd fi însă falsă. Deci putem scrie implicaţiile:
Extremum absolut ⇒ Extremum relativ tare ⇒ Extremum relativ slab.

1.4.2. **Condiţii de extremum. Ecuaţia lui Euler, ecuaţia Euler-Poisson şi ecuaţia Euler-Ostrogradski.** Datorită implicaţiilor de mai sus se vede că o condiţie necesară de extremum relativ slab este întotdeauna o condiţie necesară de extremum relativ tare şi de extremum absolut. În cele ce urmează ne vom ocupa de aceste condiţii necesare pe care le vom numi pe scurt condiţii de extremum.

Vom da acum definiţia clasei unei funcţii. Vom spune că funcţia $y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ aparţine clasei C_n, dacă în intervalul închis $[a, b]$ funcţia $y(x)$ este continuă şi are primele n derivate continue.

Vom face convenţia de notaţie:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = f_{x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.340}$$

Fie acum funcţionala (1.334):

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx, \tag{1.341}$$

în care F este o funcţie continuă de variabilele sale şi cu derivate parţiale continue, iar $y(x)$ o funcţie de clasa C_1 pentru care:

$$\begin{cases} y(a) = y_1 \\ y(b) = y_2 \end{cases} \tag{1.342}$$

Fie $\eta(x)$ o funcţie de clasa C_1 pentru care:

$$\eta(a) = \eta(b) = 0, \tag{1.343}$$

cu condiţia ca funcţia $y + \eta$ să aparţină vecinătăţii ε de ordinul întîi a lui y:

$$\begin{cases} |\eta(x)| \leqslant \varepsilon \\ |\eta'(x)| \leqslant \varepsilon \end{cases} \quad x \in [a, b] \tag{1.344}$$

Vom numi variaţia întîia a funcţionalei J expresia:

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y')\, \eta + F_{y'}(x, y, y')\, \eta']\, dx. \tag{1.345}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $y(x)$ funcţia care realizează un extremum relativ slab al funcţionalei $J(y)$ (1.341). Pentru orice funcţie $y + t\eta$ (din vecinătatea ε de ordinul întîi a lui y funcţionala $J(y + t\eta)$ devine o funcţie de parametrul t:

$$J(y + t\eta) = f(t). \tag{1.346}$$

Această funcţie trebuie să aibă un extremum pentru $t = 0$, deoarece în acest caz ea devine egală cu $J(y)$. Deci putem scrie:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = 0 \tag{1.347}$$

Însă:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b F(x,\ y + t\eta,\ y' + t\eta')\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [F_{\bar{y}}(x,\ \bar{y},\ \bar{y}') \cdot \eta + F_{\bar{y}}(x,\ \bar{y},\ \bar{y}') \cdot \eta']\,\mathrm{d}x \tag{1.348}$$

unde:

$$\begin{cases} \bar{y} = y + t\eta \\ \bar{y}' = y' + t\eta' \end{cases} \tag{1.349}$$

Din (1.348) şi (1.349) deducem:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = \int_a^b [F_y(x,\ y,\ y') \cdot \eta + F_{y'}(x,\ y,\ y') \cdot \eta']\,\mathrm{d}x. \tag{1.350}$$

Cu aceasta putem afirma că o condiţie necesară de extremum relativ slab al funcţionalei $J(y)$, relaţia (1.341), este anularea primei sale variaţii δJ, adică:

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x,\ y,\ y') \cdot \eta + F_{y'}(x,\ y,\ y') \cdot \eta']\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.351}$$

oricare ar fi funcţia η de clasa C_1 satisfăcînd condiţiile (1.343) şi (1.344):

$$\begin{cases} \eta(a) = \eta(b) = 0 \\ |\,\eta\,| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad x \in [a,\ b] \\ |\,\eta'\,| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{1.352}$$

Vom căuta acum acele funcţii $y(x)$ şi clasa C_1 care satisfac condiţiile la limită (1.342) şi realizează condiţia de extremum (1.351). Ele se numesc extremalele funcţionalei J.

Pentru aceasta, utilizînd relaţia (1.343), vom transforma mai întîi integralele:

$$\int_a^b F_{y'} \cdot \eta' \cdot \mathrm{d}x = [F_{y'} \cdot \eta]_a^b - \int_a^b \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \cdot \mathrm{d}x = -\int_a^b \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \cdot \mathrm{d}x. \tag{1.353}$$

$$\int_a^b F_y \cdot \eta \cdot \mathrm{d}x = [G \cdot \eta]_a^b - \int_a^b G \cdot \eta' \cdot \mathrm{d}x = -\int_a^b G \cdot \eta' \cdot \mathrm{d}x, \tag{1.354}$$

unde:

$$G = \int_a^x F_y \cdot \mathrm{d}x. \tag{1.355}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul transformărilor (1.353) și (1.354), prima datorată lui *Lagrange* și a doua lui *Du-Bois-Raymond*, putem scrie condiția (1.351) sub una din formele:

$$\int_a^b \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) \cdot \eta' \cdot \mathrm{d}x = 0, \tag{1.356}$$

sau:

$$\int_a^b (F_{y'} - G) \cdot \eta' \cdot \mathrm{d}x = 0. \tag{1.357}$$

Vom prezenta acum trei leme fundamentale ale calculului variațional, și anume:

Lema 1 (Lagrange). *Dacă pentru o funcție* $H_0(x)$ *de clasa* C_0 *și pentru orice funcție* $\eta(x)$ *de clasa* C_1 *pentru care* $\eta(a) = \eta(b) = 0$, *avem relația:*

$$\int_a^b H_0(x)\, \eta(x)\, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.358}$$

atunci:

$$H_0(x) = 0 \qquad x \in [a, b] \tag{1.359}$$

Lema 2 (Du-Bois-Raymond). *Dacă pentru o funcție* $H_0(x)$ *de clasa* C_0 *și pentru orice funcție* $\eta(x)$ *de clasa* C_1 *pentru care* $\eta(a) = \eta(b) = 0$, *avem relația:*

$$\int_a^b H_0(x)\, \eta'(x)\, \mathrm{d}x = 0, \tag{1.360}$$

atunci:

$$H_0(x) = \textit{constant} \qquad x \in [a, b] \tag{1.361}$$

Lema 3 (Legendre). *Dacă pentru două funcții* $P(x)$ *și* $Q(x)$ *de clasa* C_0 *și pentru orice funcție* $\eta(x)$ *de clasă* C_1 *pentru care* $\eta(a) = \eta(b) = 0$, *avem:*

$$\int_a^b [P(x)\, \eta^2(x) + Q(x)\, \eta'^2(x)]\, \mathrm{d}x > 0\ (< 0), \tag{1.362}$$

atunci:

$$Q(x) > 0\ (< 0) \qquad x \in [a, b]. \tag{1.363}$$

Demonstrațiile acestor leme, deși simple, nu le considerăm revelatoare pentru această succintă expunere a unor rezultate ale calculului variațional și le vom omite, ca de altfel, și alte demonstrații ale unor teoreme prezentate în continuare.

Pentru o deplină documentare cititorii sînt îndrumați spre tratatele de specialitate.

Din compararea relațiilor (1.356) și (1.358) rezultă că relația (1.356) se scrie sub forma:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0 \tag{1.364}$$

Relația (1.364) se numește *ecuația lui Euler*, care a dedus-o într-un mod cu totul diferit de cel prezentat aici (și care se datorează lui *Lagrange*). Demonstrația are însă o mică inexactitate. Funcția $y(x)$ am presupus-o de

Scanned with OKEN Scanner

clasa C_1, deci cu derivata $y'(x)$ continuă, însă nu neapărat și derivabilă. De aceea transformarea lui *Lagrange* (1.353) în care intervine $y''(x)$ nu este permisă. Pentru a evita acest neajuns *Du-Bois-Raymond* a propus transformarea (1.354), care nu mai presupune a priori existența derivatei a doua $y''(x)$, și în felul acesta, comparînd (1.357) cu implicația (1.360) ⇒ (1.361) se deduce relația:

$$F_{y'} - G = C \quad (C = \text{constant}) \tag{1.365}$$

sau cu (1.355):

$$F_{y'} - \int_a^x F_y \, dx = C. \tag{1.366}$$

Derivînd în raport de x relația:

$$F_{y'} = \int_a^x F_y \, dx + C \tag{1.367}$$

obținem:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_y. \tag{1.368}$$

Dar membrul drept al acestei relații fiind o funcție continuă prin ipoteză trebuie ca și membrul stîng să fie tot o funcție continuă. Deci F_y trebuie să fie derivabilă. Însă:

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = F_{y'x} + F_{y'y} \cdot y' + F_{y'y'} \cdot y''. \tag{1.369}$$

Funcțiile $F_{y'x}$, $F_{y'y'}$, $F_{y'y}$, și y' sînt continue prin ipoteză. Deci pentru ca $\frac{d}{dx} F_{y'}$ să fie continuă trebuie ca y'' să existe și să fie continuă pentru $F_{y'y'} \neq 0$.

După cum se vede relația (1.368) este tot ecuația lui Euler (1.364):

Vom numi variația a doua a funcționalei $J(y)$ expresia:

$$\delta^2 J = \int_a^b (F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta \cdot \eta' + F_{y'y'} \cdot \eta'^2) \, dx, \tag{1.370}$$

în care $F(x, y, y')$ și $\eta(x)$ sînt funcțiile definite mai sus.

În clasa funcțiilor $y + t\eta$ funcționala $J(y + t\eta)$ devine o funcție de parametrul t:

$$f(t) = J(y + t\eta). \tag{1.371}$$

Pentru ca extremala $y(x)$ să realizeze un minim relativ slab al funcționalei J trebuie ca:

$$\left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=0} > 0, \tag{1.372}$$

iar pentru ca $y(x)$ să realizeze un maxim relativ slab al funcționalei J trebuie ca:

$$\left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=0} < 0. \tag{1.373}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (1.341) și (1.371) se deduce că:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \int_a^b [F_{\overline{y}\overline{y}}(x, \overline{y}, \overline{y}') \cdot \eta^2 + 2F_{\overline{y}\overline{y}'}(x, \overline{y}, \overline{y}')\, \eta \cdot \eta' + F_{\overline{y}'\overline{y}'}(x, \overline{y}, \overline{y}')\, \eta'^2]\, dx \tag{1.374}$$

în care:

$$\begin{cases} \overline{y} = y + t\eta \\ \overline{y}' = y' + t\eta' \end{cases} \tag{1.375}$$

Se vede atunci că:

$$\left.\frac{d^2f}{dt^2}\right|_{t=0} = \delta^2 J. \tag{1.376}$$

Pe de altă parte, observînd că:

$$2\int_a^b F_{yy'} \cdot \eta \cdot \eta'\, dx = [F_{yy'} \cdot \eta^2]\Big|_a^b - \int_a^b \eta^2 \frac{d}{dx} F_{yy'}\, dx =$$

$$= -\int_a^b \eta^2 \frac{d}{dx} F_{y'y'}\, dx, \tag{1.377}$$

relația (1.370) se scrie:

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\right) \cdot \eta^2 + F_{y'y'} \cdot \eta'^2\right] dx. \tag{1.378}$$

Condiția necesară de minim (1.372), respectiv cea de maxim (1.373) se scriu, ținînd cont de (1.376), (1.378) și implicația (1.362) $\Rightarrow$ (1.363), sub forma:

$$F_{y'y'} > 0 \quad \text{(pentru minim);} \tag{1.379}$$

$$F_{y'y'} < 0 \quad \text{(pentru maxim).} \tag{1.380}$$

Rezumînd, vom spune că dată fiind funcția $F(x, y, y')$, continuă împreună cu derivatele ei parțiale pînă la ordinul al doilea inclusiv, pentru $x \in [a, b]$ și orice $y(x)$ de clasa C_1 pentru care $y(a) = y_1$ și $y(b) = y_2$, funcția $y(x)$, numită extremală, care realizează extremum-ul relativ slab al funcționalei:

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{1.341'}$$

este soluția ecuației lui Euler:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \tag{1.381}$$

cu condițiile la limită:

$$\begin{cases} y(a) = y_1 \\ y(b) = y_2 \end{cases} \tag{1.382}$$

iar $y''(x)$ există și este continuă pentru orice x pentru care:

$$F_{y'y'} \neq 0 \tag{1.383}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția necesară pentru ca acest extremum să fie un minim relativ slab este:

$$F_{y'y'} > 0 \tag{1.384}$$

de-a lungul extremalei, iar condiția necesară de maxim relativ slab este:

$$F_{y'y'} < 0 \tag{1.385}$$

de-a lungul extremalei.

Toate aceste condiții sînt și condiții necesare pentru un extremum relativ tare sau pentru un extremum absolut.

În continuare ne vom mărgini la o expunere fără demonstrații a unor rezultate ale calculului variațional referitoare la funcționalele de tipul (1.335), (1.336) și (1.337).

Dată fiind o funcție $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, continuă împreună cu derivatele ei parțiale pînă la ordinul al doilea inclusiv, pentru $x \in [a, b]$ și orice $y(x)$ de clasă C_n pentru care:

$$\begin{cases} y(a) = y_1 \\ y'(a) = y_1' \\ \vdots \\ y_{(a)}^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} y(b) = y_2 \\ y'(b) = y_2' \\ \vdots \\ y_{(b)}^{(n-1)} = y_2^{(n-1)} \end{cases} \tag{1.386}$$

funcția $y(x)$, numită extremală, care realizează un extremum al funcționalei:

$$J = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx \tag{1.387}$$

este soluția ecuației *Euler—Poisson*:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \tag{1.388}$$

cu condițiile la limită (1.386).

Dată fiind funcția $F(x, y_i, y_i')$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, continuă împreună cu derivatele sale parțiale pînă la ordinul al doilea inclusiv, pentru orice $x \in [a, b]$ și orice set de funcții $y_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de clasa C_1 pentru care:

$$\begin{cases} y_i(a) = y_{i_1} \\ y_i(b) = y_{i_2} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.389}$$

setul de funcții $y_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, numite extremale, care realizează un extremum al funcționalei:

$$J = \int_a^b F(x, y_i, y_i')\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.390}$$

este soluția sistemului de ecuații *Euler*:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.391}$$

cu condițiile la limită (1.389).

Scanned with OKEN Scanner

Dată fiind o funcție $F\left(x_i, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, continuă împreună cu derivatele sale parțiale pînă la ordinul doi inclusiv, pentru orice punct $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al unui domeniu Q mărginit de frontiera A și orice funcție $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continuă împreună cu derivatele sale parțiale de ordinul întîi și pentru care:

$$y|_A = f_A, \tag{1.392}$$

funcția y (numită extremală) care realizează un extremum al funcționalei:

$$J = \iint_Q \ldots \int F(x_i, y, y_{x_i})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1.393}$$

$$y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

este soluția ecuației *Euler — Ostrogradski*:

$$F_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{(y_{x_i})} = 0 \tag{1.394}$$

cu condiția (1.392).

1.4.3. **Extremum-uri condiționate.** În cele expuse pînă acum funcțiilor y sau y_i nu li s-a impus nici o condiție suplimentară în afara condițiilor de continuitate, derivabilitate și condițiilor la limită. Vom vedea acum cum se studiază problemele de extremum cînd se impun anumite condiții suplimentare. Aceste condiții pot fi de tip integral și în acest caz problema se numește a lui *Lagrange*.

În legătură cu extremum-ul condiționat izoperimetric, *Euler* a demonstrat următoarea teoremă:

Dacă $y(x)$ realizează extremum-ul funcționalei:

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{1.395}$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} y(a) = y_1; \quad y(b) = y_2 \\ K = \int_a^b G(x, y, y')\, dx = C (C = \text{constant}) \end{cases} \tag{1.396}$$

și dacă $y(x)$ nu este o extremală a funcționalei K, atunci există o constantă λ astfel încît $y(x)$ este o extremală a funcționalei:

$$L = \int_a^b H(x, y, y')\, dx, \tag{1.397}$$

în care:

$$H = F + \lambda G. \tag{1.398}$$

Această teoremă ne permite ca prin rezolvarea ecuației lui *Euler*:

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0 \tag{1.399}$$

Scanned with OKEN Scanner

să găsim soluția:

$$y = y(x, \lambda, C_1, C_2) \tag{1.400}$$

în care constanta λ și cele două constante de integrare C_1 și C_2 se vor determina din cele trei condiții (1.396), rezultînd în felul acesta în mod unic extremala $y(x)$.

În legătură cu problema generală a lui *Lagrange*, acesta a demonstrat următoarea teoremă:

Dacă $y_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ este setul de funcții care realizează extremum-ul funcționalei:

$$J = \int_b^a F(x, y_i, y_i')\, dx \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1.401}$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} y_i(a) = y_{i_1}; \quad y_i(b) = y_{i_2} & (i = 1, 2, .., n) \\ f_j(x, y_i, y_i') = 0 & (j = 1, 2, .., k) \end{cases} \tag{1.402}$$

și dacă pentru acest set unul dintre determinanții principali ai matricei funcționale:

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right) \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, ..., k) \\ (i = 1, 2, ..., n) \end{matrix} \tag{1.403}$$

este diferit de zero pentru $x \in [a, b]$, atunci setul de funcții $y_i(x)$ $(i = 1, 2, .., n)$ realizează extremum-ul funcționalei:

$$K = \int_a^b G(x, y_i, y_i')\, dx \qquad (i = 1, 2, .., n) \tag{1.404}$$

în care:

$$G = F + \sum_{j=1}^{K} \lambda_j(x) \cdot f_j. \tag{1.405}$$

Această teoremă ne permite ca prin rezolvarea sistemului format din cele n ecuații *Euler* de ordinul al doilea:

$$G_{y_i} - \frac{d}{dx} G_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1.406}$$

și cele k ecuații de ordinul întîi:

$$f_j(x, y_i, y_i') = 0 \quad (j = 1, 2, .., k) \tag{1.407}$$

să găsim setul de soluții:

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, ..., C_{2\,n+k}) \quad (i = 1, 2, .., n). \tag{1.408}$$

Cele $2n + k$ constante de integrare se determină din cele $2n + k$ condiții (1.402), rezultînd în felul acesta în mod unic setul de extremale $y_i(x)$.

Această metodă bazată pe scrierea funcției G(1.405) se numește *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*.

Scanned with OKEN Scanner

1.5. ELEMENTE DE ALGEBRĂ MATRICIALĂ

Numim matrice $[a]$ un tablou dreptunghiular de $m \cdot n$ numere sau funcții a_{ij} care are n linii și m coloane:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \ldots\ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \ldots\ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots\ldots a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.409}$$

sau în notație prescurtată:

$$[a] = \overset{m}{n}\,[a_{ij}] \tag{1.410}$$

Cînd $n=m$, matricea se numește pătrată.

Cînd elementele a_{ij} sînt reale matricea se numește reală, iar cînd elementele a_{ij} sînt complexe matricea se numește complexă.

În cele ce urmează ne vom ocupa doar de matricile reale. Două matrici sînt egale cînd au elementele corespunzătoare egale:

$$[a] = [b] \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}. \tag{1.411}$$

Deci pentru a putea fi egale două matrici trebuie să aibă în primul rînd același număr de linii și același număr de coloane.

Înmulțirea unei matrici cu un număr λ se face după regula:

$$\lambda[a] = [b] \Rightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}. \tag{1.412}$$

Înmulțirea a două matrici se face după regula:

$$[a]\,[b] = [C] \Rightarrow C_{ij} = \sum_{K=1}^{p} a_{iK} \cdot b_{Kj} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{1.413}$$

pe care o scriem explicit sub formele:

$$\overset{p}{n}\,[a] \cdot \overset{m}{p}\,[b] = \overset{m}{n}\,[C] \tag{1.414}$$

Deci pentru a putea înmulți două matrici e necesar ca numărul de coloane al primei să fie egal cu numărul de linii al celei de-a doua, rezultatul avînd numărul de linii al primei matrici și numărul de coloane al celei de-a doua, conform schemei din figura 1.45.

Se poate vedea ușor că produsul a două matrici nu este în general comutativ, însă este asociativ, adică:

$$[a] \cdot [b] \neq [b] \cdot [a] \tag{1.415}$$

$$([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c]). \tag{1.416}$$

Scanned with OKEN Scanner

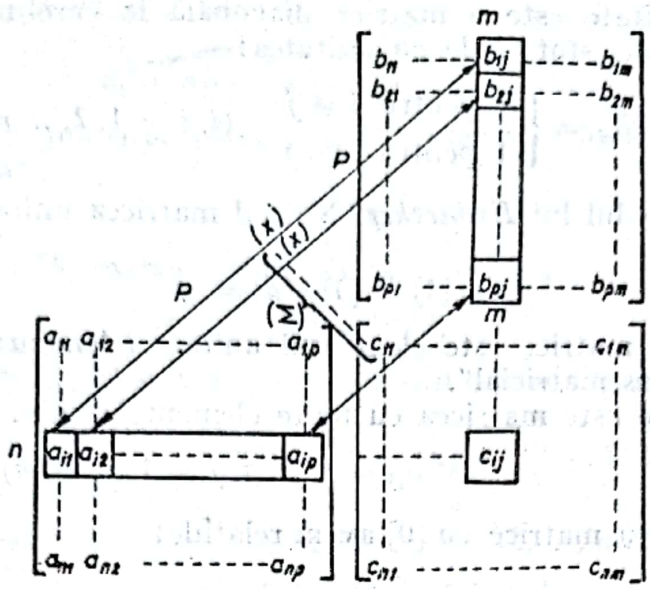


Fig. 1.45

În cazul matricilor pătrate notînd prin $|[a]|$ determinantul format de elementele matricei $[a]$, se poate scrie relația:

$$|[a] \cdot [b]| = |[a]| \cdot |[b]|. \tag{1.417}$$

Într-o matrice pătrată elementele a_{ii} aflate pe diagonala ce coboară de la stînga la dreapta formează ceea ce numim diagonală principală a matricei. Cealaltă diagonală se numește secundară.

Vom defini acum cîteva tipuri de matrici pătrate.

Matricea simetrică se caracterizează prin faptul că are elementele simetrice față de diagonala principală egale:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.418}$$

Matricea antisimetrică are elementele simetrice față de diagonala principală opuse:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.419}$$

Urmează imediat că la o astfel de matrice elementele diagonalei principale sînt nule:

$$a_{jj} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.420}$$

Matricea diagonală are toate elementele nule în afară de cele ale diagonalei principale:

$$a_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{pentru } i \neq j \\ \neq 0 & \text{pentru } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.421}$$

Se vede ușor că produsul a două matrici diagonale este comutativ, iar rezultatul este tot o matrice diagonală.

Scanned with OKEN Scanner

Matricea unitate este o matrice diagonală la care toate elementele diagonalei principale sînt egale cu unitatea:

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq j \\ 1 \text{ pentru } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, .., n) \tag{1.422}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui *Kronecker*. Notînd matricea unitate cu [1], avem relaţiile:

$$[a] \cdot [1] = [1] \cdot [a] = [a] \tag{1.423}$$

Deci această matrice este elementul unitate (elementul de efect nul) al operaţiei „produs matricial".

Matricea zero este matricea cu toate elementele nule:

$$a_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, ..., n) \tag{1.424}$$

Notînd această matrice cu [0] avem relaţiile:

$$[a] + [0] = [a] \tag{1.425}$$

$$[a] \cdot [0] = [0]. \tag{1.426}$$

Vom defini acum ordinul şi rangul unei matrice. Dacă o matrice pătrată are n linii şi n coloane spunem că ordinul matricei este n. Dacă determinantul matricei este nul spunem că matricea este degenerată, în caz contrar ea este nedegenerată. Fie o matrice degenerată la care toţi minorii pe care îi putem forma din determinantul ei sînt nuli, pînă la minorii cu r linii şi r coloane, dintre care cel puţin unul nu este nul. În acest caz spunem că r este rangul matricei.

În algebra matricială se pot găsi două matrici nenule al căror produs să fie nul. Datorită acestei constatări se spune că operaţia de produs matricial admite divizori ai lui zero. Vom arăta condiţia necesară pentru ca două matrici nenule să aibă produsul nul. O teoremă datorată lui *Sylvester* afirmă că n fiind ordinul a două matrici pătrate de rang r_1 şi r_2, rangul r al produsului lor satisface relaţiile:

$$\begin{aligned} r &\leqslant r_1 \\ r &\leqslant r_2 \\ r + n &\geqslant r_1 + r_2 \end{aligned} \tag{1.427}$$

În cazul cînd produsul lor este matricea zero, rangul ei este evident $r = 0$ şi deci primele două relaţii de la (1.427) sînt îndeplinite, iar din ultima relaţie deducem:

$$r_1 + r_2 \leqslant n, \tag{1.428}$$

Concluzia este că aceste două matrici sînt cu siguranţă degenerate.

Vom defini acum matricea transpusă $[\tilde{a}]$ a unei matrici date $[a]$ matricea obţinută din $[a]$ prin permutarea liniilor cu coloanele:

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, ..., n). \tag{1.429}$$

Se poate deduce imediat următoarea formulă:

$$\widetilde{[a] \cdot [b]} = [\tilde{b}] \cdot [\tilde{a}] \tag{1.430}$$

Scanned with OKEN Scanner

care se generalizează sub forma:

$$[a_1] \cdot [a_2] \ldots [a_p] = [\widetilde{a_p}] \cdot [\widetilde{a_{p-1}}] \ldots [\widetilde{a_1}] \tag{1.431}$$

Vom defini matricea inversă $[a]^{-1}$ a unei matrici date $[a]$ matricea care satisface relaţia:

$$[a]^{-1} \cdot [a] = [1] \tag{1.432}$$

Notînd cu $[b]$ matricea inversă de mai sus:

$$[b] = [a]^{-1}, \tag{1.433}$$

elementele matricei $[b]$ se vor determina din cele n sisteme de ecuaţii liniare:

$$\sum_{K=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.434}$$

Pentru un i arbitrar fix şi pentru $j = 1, 2, \ldots, n$ obţinem sistemul:

$$\begin{cases} b_{i1}a_{11} + b_{i2}a_{21} + \ldots + b_{ik}a_{k1} + \ldots + b_{in}a_{n1} = \delta_{i1} = 0 \\ b_{i2}a_{21} + b_{i2}a_{22} + \ldots + b_{ik}a_{k2} + \ldots + b_{in}a_{n2} = \delta_{i2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{i1}a_{1i} + b_{i2}a_{2i} + \ldots + b_{ik}a_{ki} + \ldots + b_{in}a_{ni} = \delta_{ii} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{i1}a_{1n} + b_{i2}a_{2n} + \ldots + b_{ik}a_{kn} + \ldots + b_{in}a_{nn} = \delta_{in} = 0. \end{cases} \tag{1.435}$$

Necunoscuta b_{ik} este conform regulii lui *Cramer*:

$$b_{ik} = \frac{\Delta ik}{\Delta}, \tag{1.436}$$

în care:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{21} \ldots a_{k1} \ldots a_{n1} \\ a_{12}a_{22} \ldots a_{k2} \ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1i}a_{2i} \ldots a_{ki} \ldots a_{ni} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}a_{2n} \ldots a_{kn} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = |[a]| \tag{1.437}$$

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{21} \ldots 0 \ldots a_{n1} \\ a_{12}a_{22} \ldots 0 \ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1i}a_{2i} \ldots 1 \ldots a_{ni} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}a_{2n} \ldots 0 \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ik} \tag{1.438}$$

A_{ik} fiind complementul algebric al termenului de pe linia i şi coloana k din determinantul (1.437), care după cum se vede este determinantul matricei $[\tilde{a}]$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom numi matrice complementară $[m]^c$ a matricei $[m]$ matricea obținută din $[m]$ prin înlocuirea fiecărui element prin complementul său algebric. În acest caz matricea $[b] = [a]^{-1}$ se poate scrie:

$$[a]^{-1} = \frac{1}{|[a]|}[\widetilde{a}]^c. \tag{1.439}$$

Deci inversa unei matrice este complementara matricei transpuse, împărțită la determinantul matricei date.

Se poate verifica ușor relația:

$$([a] \cdot [b])^c = [a]^c \cdot [b]^c. \tag{1.440}$$

Cu definiția (1.399) și cu relațiile (1.417), (1.430) și (1.440) se vede ușor că:

$$([a] \cdot [b])^{-1} = \frac{1}{|[a] \cdot [b]|}([\widetilde{a}] \cdot [\widetilde{b}])^c = \frac{1}{|[a]| \cdot |[b]|}([\widetilde{b}] \cdot [\widetilde{a}])^c =$$

$$= \frac{1}{|[b]|}[\widetilde{b}]^c \cdot \frac{1}{|[a]|}[\widetilde{a}]^c. \tag{1.441}$$

Deci:

$$([a] \cdot [b])^{-1} = [b]^{-1} \cdot [a]^{-1}, \tag{1.442}$$

care se generalizează imediat sub forma:

$$([a_1] \cdot [a_2] \dots [a_n])^{-1} = [a_n]^{-1} \cdot [a_{n-1}]^{-1} \dots [a_1]^{-1}. \tag{1.443}$$

Observăm că se pot inversa numai matricile nedegenerate, adică matricile cu determinant nenul.

Putem reprezenta un vector printr-o matrice coloană care are ca elemente proiecțiile vectorului pe axe scrise în matrice de sus în jos. Deci vectorul $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ îl vom scrie matricial:

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \tag{1.444}$$

Noțiunea se poate extinde imediat în spațiul cu n dimensiuni în care cele n „proiecții" ale vectorului se scriu pe coloană de sus în jos:

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{1.445}$$

Operațiile elementare cu vectori se pot transcrie matricial foarte ușor. Astfel, suma vectorială a doi vectori, înmulțirea unui vector cu un scalar, produsul scalar, proiectarea unui vector pe axe, produsul vectorial, produsul mixt și produsul dublu vectorial se scriu respectiv:

$$\bar{a} + \bar{b} = [\bar{a}] + [\bar{b}] \tag{1.446}$$

$$\lambda\bar{a} = \lambda[\bar{a}] \tag{1.447}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = [\widetilde{\bar{a}}] \cdot [\bar{b}] = [\widetilde{\bar{b}}][\bar{a}] \tag{1.448}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} a_x = \bar{a} \cdot \bar{i} = [1\,0\,0]\,[\bar{a}] \\ a_y = \bar{a} \cdot \bar{j} = [0\,1\,0]\,[\bar{a}] \\ a_z = \bar{a} \cdot \bar{k} = [0\,0\,1]\,[\bar{a}] \end{cases} \tag{1.449}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = [a_p] \cdot [\bar{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \tag{1.450}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = [\widetilde{\bar{a}}] \cdot [b_p] \cdot [\bar{c}] \tag{1.451}$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = [a_p] \cdot [b_p] \cdot [\bar{c}]. \tag{1.452}$$

Rezultă imediat că modulul unui vector se poate scrie

$$a = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{[\widetilde{\bar{a}}]\,[\bar{a}]}. \tag{1.453}$$

O formă biliniară în variabilele x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = [\widetilde{\bar{x}}] \cdot [a] \cdot [\bar{y}] \tag{1.454}$$

în care:

$$[\bar{x}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [\bar{y}] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad [a] = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.455}$$

Cînd $[\bar{x}]$ este egal cu $[\bar{y}]$ forma (1.454) devine pătratică:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i\, a_{ij} x_j = [\widetilde{\bar{x}}] \cdot [a] \cdot [\bar{x}]. \tag{1.456}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. ELEMENTELE, PRINCIPIILE ŞI TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE MECANICII

2.1. ELEMENTELE FUNDAMENTALE ALE MECANICII

2.1.1. Mărimi fizice. Unităţi de măsură. Factor de transformare. O mulţime de obiecte fizice de aceeaşi natură, considerate din punctul de vedere al unei anumite însuşiri comune, permite elaborarea noţiunii de mărime fizică corespunzătoare acestei însuşiri, dacă există posibilitatea stabilirii unui criteriu de echivalenţă (care să permită repartizarea obiectelor respective în clase de echivalenţă), a unui criteriu de ordonare (care să permită aprecierea din punctul de vedere al însuşirii considerate, a obiectelor aparţinînd unor clase diferite) şi a unui criteriu de comparaţie (care să permită afirmaţia nu numai că obiectele dintr-o anumită clasă de echivalenţă sînt mai mari sau mai mici decît cele din altă clasă de echivalenţă, ci şi de cîte ori sînt mai mari sau mai mici).

Pe baza criteriului de comparaţie se atribuie fiecărei clase de mărimi fizice cîte un număr abstract n, denumit valoare numerică. Valoarea numerică a unei clase se determină experimental, ca raport dintre o mărime M aparţinînd acesteia şi mărimea de aceeaşi natură U din clasa căreia i s-a atribuit în mod convenţional numărul unu, denumită unitate de măsură a mărimii fizice respective. Mărimea fizică se va exprima deci prin ecuaţia:

$$M = nU, \tag{2.1}$$

numită ecuaţia fundamentală a măsurării.

Dacă o mărime fizică se măsoară cu două unităţi de măsură diferite U_1 şi U_2, în baza ecuaţiei fundamentale a măsurării avem:

$$M = n_1 \cdot U_1, \text{ respectiv } M = n_2 \cdot U_2.$$

Făcînd raportul acestor ecuaţii se deduce:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_2}{n_1} = K, \tag{2.2}$$

de unde rezultă că valoarea numerică a unei mărimi variază invers proporţional cu unitatea de măsură aleasă pentru măsurarea ei.

Raportul K dintre unităţile de măsură U_1 şi U_2 se numeşte factor de transformare şi reprezintă numărul cu care trebuie înmulţită valoarea numerică a unei mărimi măsurate cu o unitate de măsură pentru a obţine valoarea sa numerică, exprimată într-o altă unitate.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.2. **Mărimi și unități fundamentale. Mărimi și unități derivate.** Deoarece în realitate mărimile fizice sînt legate prin legi și definiții determinate, este posibil să se aleagă un număr restrîns de mărimi fizice independente, în funcție de care se pot exprima toate celelalte mărimi. Mărimile astfel alese, care se definesc direct, adică prin indicarea unității de măsură și a procedeului de măsurare, se numesc mărimi fundamentale, iar unitățile lor de măsură — unități fundamentale. Noțiunile fundamentale ale mecanicii clasice sînt: spațiul, timpul și masa, reprezentînd diferitele forme de existență ale realității obiective, care este materia. Mărimile mecanice fundamentale corespunzătoare sînt lungimea, timpul și masa.

Celelalte mărimi fizice deduse din mărimile fundamentale pe baza ecuațiilor de definiție alese pentru aceste mărimi, se numesc mărimi derivate, iar unitățile respective, unități derivate.

Dacă în relațiile de definiție a mărimilor derivate se înlocuiesc mărimile fundamentale prin simbolurile lor dimensionale se obține ecuația dimensională a mărimilor derivate respective. Spre exemplificare, ecuația dimensională a forței, dedusă din relația de definiție:

$$F = ma = m\frac{v}{t} = m\frac{\frac{l}{t}}{t} = m\frac{l}{t^2},$$

se scrie astfel: $[F] = \mathrm{LT^{-2}\,M}$.

Ecuațiile dimensionale ale mărimilor servesc la verificarea omogenității relațiilor fizice, proprietate importantă pe care trebuie să o îndeplinească acestea. De asemenea, cu ajutorul acestor relații se pot stabili ecuațiile unităților de măsură care indică modul în care variază unitățile mărimilor derivate, atunci cînd se schimbă unitățile fundamentale, precum și modul de schimbare a valorii numerice a unei mărimi, cînd se schimbă unitățile de măsură.

Un sistem de dimensiuni este determinat de grupul de mărimi fundamentale cu ajutorul cărora se pot defini univoc toate mărimile derivate. Așa, de exemplu, în cinematică sistemul de dimensiuni este LT, iar în dinamică LTM.

Forma generală a ecuației dimensionale a unei mărimi mecanice derivate M_D este:

$$[M_D]_{\mathrm{LMT}} = \mathrm{L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}}, \tag{2.3}$$

unde α, β, γ reprezintă, fiecare în parte, dimensiunea mărimii derivate M_D în raport cu mărimile fundamentale lungime, masă și timp.

Membrul din partea dreaptă a ecuației dimensionale a unei mărimi derivate reprezintă „termenul dimensional al mărimii derivate respective": Înlocuind mărimile fundamentale din ecuația dimensională cu unitățile fundamentale respective și păstrînd aceiași exponenți, se obține ecuația dimensională a unității, pe baza căreia se stabilește denumirea unității.

De exemplu, pentru viteză, în sistemul dimensional LT, ecuația dimensională este:

$$[V]_{\mathrm{LT}} = \mathrm{LT^{-1}}, \tag{2.4}$$

iar ecuația unității de viteză în sistemul de unități care folosește pentru lungime unitatea metru (simbol m), iar pentru timp unitatea secundă (simbol s) este

$$\langle v\rangle_{\mathrm{m.s}} = \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \tag{2.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Denumirea unității de viteză este deci metru pe secundă și se definește ca fiind viteza unui punct în mișcare rectilinie și uniformă, care parcurge distanța de 1 metru în timp de 1 secundă.

2.1.3. **Sisteme de unități de măsură.** Totalitatea unităților fundamentale, precum și a celor derivate, care se definesc cu ajutorul unităților fundamentale, constituie un sistem de unități de măsură.

Un sistem de unități de măsură este caracterizat, în principal, de grupul de unități fundamentale în funcție de care se definesc unitățile derivate în domeniul pentru care a fost adoptat acel sistem.

Deoarece pentru o anumită mărime fundamentală se pot alege una sau mai multe unități fundamentale și unui sistem de dimensiuni îi pot corespunde unul sau mai multe sisteme de unități. De exemplu, sistemului de dimensiuni LMT îi corespund sistemele de unități: MKS (metru, pentru lungime; kilogram pentru masă și secundă pentru timp); CGS (centimetru, gram, secundă), MTS (metru, tonă, secundă); sistemului de dimensiuni LFT, care a avut o largă utilizare în domeniul mărimilor mecanice folosite în tehnică, îi corespunde sistemul de unități MKfS (metru pentru lungime; kilogram forță, pentru forță și secundă pentru timp).

În prezent, ca urmare a celei de a XI-a Conferințe Internaționale de măsuri și greutăți (Paris 1960), în țara noastră și în numeroase țări din lume, a fost introdus în mod obligatoriu Sistemul Internațional de unități cu prescurtarea SI.

Tabelul 2.1 cuprinde denumiri, simboluri, factori dimensionali și de transformare a unităților de măsură, precum și definiții atît pentru unitățile SI adoptate de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți, cît și pentru unități SI care nu au fost încă adoptate de aceasta și care au o largă utilizare în mecanică.

2.1.4. **Omogenitatea dimensională.** Cea mai generală relație între valorile numerice ale unor mărimi fizice se poate exprima sub forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots) = 0, \tag{2.6}$$

unde f reprezintă un operator, iar x_1, x_2, ... valorile numerice ale mărimilor fizice care intervin în legea respectivă. Relația trebuie să fie independentă de unitățile de măsură folosite, deci la schimbarea acestora să devină:

$$f(x_1', x_2', \ldots) = 0. \tag{2.7}$$

Pentru a fi îndeplinită această condiție este necesar și suficient să rezulte relația:

$$f(x_1, x_2, \ldots) = C f(x_1', x_2', \ldots), \tag{2.8}$$

în care C este o constantă care depinde exclusiv de rapoartele între noile și vechile mărimi primitive. Această condiție se realizează numai dacă relațiile între mărimile fizice sînt omogene, adică numai atunci cînd dimensiunile termenilor care intervin în expresia lor sînt aceleași.

Omogenitatea dimensională permite verificarea corectitudinii unei relații, determinarea naturii unor mărimi, stabilirea dimensiunilor și semnificației fizice a coeficienților din relații, precum și stabilirea unor formule în cazuri speciale.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1

Mărimea				Unitatea SI		Unit. CGS Simbol	Unit. MKfS Simbol	Relaţii de legătură între unităţile de măsură
Denumire	Simbol	Relaţie de definiţie (sau definiţie)	Termen dimensional	Denumire Simbol	Definiţie			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lungime	l, s	—	L	metru m	Lungimea egală cu 1650763,73 lungimi de undă în vid ale radiaţiei care corespunde tranziţiei între nivelele $2p_{10}$ şi $5\,d_5$ ale atomului de kripton 36.	cm	m	1 m = 10^2 cm 1 cm = 10^{-2} m
Arie	A, S	$A = l \cdot b$ (b = lăţime)	L^2	metru pătrat m^2	Aria unui pătrat cu latura de un metru	cm^2	m^2	1 m^2 = 10^4 cm^2 1 cm^2 = 10^{-4} m^2
Volum	V	$V = l \cdot b \cdot h$ (h = înălţime)	L^3	metru cub m^3	Volumul unui cub cu latura de 1 metru	cm^3	m^3	1 m^3 + 10^6 cm^3 1 cm^3 = 10^{-6} m^3
Unghi plan (deplasare unghiulară)	α, β, γ, θ, δ, φ,	$\varphi = \frac{\text{lung.arc}}{\text{rază}}$	—	radian rad.	Unghiul plan cu vîrful în centrul unui cerc, care delimitează pe circumferinţa cercului de arc, a cărui lungime este egală cu raza cercului	rad	rad	—
Timp	t	—	T	secundă s	Durata a 9192631770 perioade ale radiaţiei corespunzătoare tranziţiei între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133.	s	s	—

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Viteză	v	$v = \frac{ds}{dt}$	LT^{-1}	metru pe secundă m/s	Viteza unui punct în mișcare rectilinie și uniformă, care parcurge distanța de 1 metru în timp de 1 secundă	cm/s	m/s	1 cm/S = 0,01 m/s = 0,6 m/min = 0,036 km/h 1m/s = 10^2 cm/s = 60 m/min = 3,6 km/h 1 m/min = 0,06 km/h = = 0,0167 m/s. 1 km/h = 27,78 cm/s = = 0,2778 m/s = 16,67 m/min.
Accelerație	a	$a = \frac{dv}{dt}$	LT^{-2}	metru pe secundă la pătrat m/s^2	Accelerația unui punct în mișcare rectilinie și uniform variată, a cărui viteză se modifică cu 1 metru pe secundă în timp de 1 secundă	cm/s^2	m/s^2	1 m/s^2 = 10^2 cm/s^2 1 cm/s^2 = 10^{-2} m/s^2
Viteză unghiulară	ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	T^{-1}	Radian pe secundă rad/s	Viteza unghiulară a unui punct în mișcare circulară uniformă, a cărui rază vectoare parcurge un unghi la centru de 1 radian în timp de 1 secundă	rad/s	rad/s	1 rad/s = 57,269°/s = = 9,5493 rot/min. 1°/s = 0,01745 rad/s = = 0,1667 rot/min 1 rot/min = 6°/s = = 0,1047 rad/s
Accelerație unghiulară	ν, α, ε	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	T^{-2}	radian pe secundă la pătrat rad/s^2	Accelerația unghiulară a unui punct în mișcare circulară uniform variată a cărui viteză unghiulară se modifică cu 1 radian pe secundă în timp de 1 secundă	rad/s^2	rad/s^2	—
Perioadă	T	$f(t) = f(t + T)$	T	secundă s	vezi „Timp"	s	s	—

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecvență	f, ν	$f = \frac{1}{T}$	T^{-1}	hertz Hz	Frecvența unui fenomen periodic a cărei perioadă este de 1 secundă	Hz	Hz	—
Frecvență de rotație (turație)	n	$n = \frac{1}{T}$	T^{-1}	unu pe secundă 1/s	Frecvența de rotație (turația) unui punct în mișcare circulară, care efectuează 1 rotație în timp de 1 secundă	1/s	1/s	—
Frecvență unghiulară (pulsație)	ω	$\omega = 2\pi f$	T^{-1}	unu pe secundă 1/s	Frecvența unghiulară (pulsația) a unei oscilații armonice, a cărei frecvență este de $\frac{1}{2\pi} = 0{,}1593$ herți	1/s	1/s	—
Amplitudine	A	Valoarea de vîrf a unei mărimi sinusoidale	Termenul dimensional al mărimii sinusoidale	Denumirea, simbolul și definiția unității de măsură a mărimii sinusoidale				
Fază (unghi de fază)	$\omega t + \varphi$	Argumentul dependent de timp al unei mărimi cu variație sinusoidală	—	radian rad.	vezi „Unghi plan"	rad.	rad.	—

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lungime de undă	λ	Distanța dintre două puncte succesive, în direcția de propagare a unei unde periodice, în care oscilația are aceeași fază	L	metru m	vezi „Lungime"	cm.	cm.	Vezi „Lungime"
Masă	m	—	M	Kilogram kg	Masa „kilogramului prototip internațional"	g	$\frac{kgf\ s^2}{m} = u$ (unitatea tehnică de masă)	1 kg = 10^3 g 1 g = 10^{-3} kg $1\ \frac{kgf\ s^2}{m} = 9{,}80665$ kg
Densitate (masă volumică)	ρ	$\rho = \frac{m}{V}$	$L^{-3}M$	Kilogram pe metru cub kg/m³	Densitatea (masa volumică) a unui corp omogen cu volumul de 1 metru cub, a cărui masă este de 1 kilogram	g/cm³	kgf · s^2/m^4	1 kg/m³ = 10^{-3} g/cm³ 1 g/cm³ = 10^3 kg/m³ 1 kgfs^2/m⁴ = 9,80665 kg/m³
Impuls (cantitate de mișcare)	H, p	$H = m \cdot v$	LMT^{-1}	Kilogram-metru pe secundă kg · m/s	Impulsul (cantitatea de mișcare) a unui corp cu masa de 1 kilogram, care se deplasează cu viteza de 1 metru pe secundă	g · cm/s	kgf · s	1 kg · m/s = 10^5g · cm/s = =0,101972 kgf · s 1 g · cm/s = 10^{-5} kg · m/s = = 1,01972 · 10^{-6} kgf · s 1 kgf · s = 9,80665 kg · m/s= = 9,80665 · 10^5 g · cm/s.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Moment cinetic (momentul impulsului, momentul cantității de mișcare)	b, p_0, K	$K = H \cdot l$	L^2MT^{-1}	Kilogram-metru pătrat pe secundă $kg \cdot m^2/s$	Momentul cinetic al unui corp punctiform care are impulsul de 1 kilogram, metru pe secundă și se deplasează pe un cerc cu raza de 1 metru	$g \cdot cm^2/s$	kgf · · m · s	1 kg · m^2/s = 10^7 g · cm^2/s = = 0,101972 kgf · m · s 1 g · cm^2/s = 10^{-7} kg · m^2/s = = 1,01972 · 10^{-8} kgf · m · s 1 kgf · m · s = 9,80665 kg · · m^2/s = 9,80665 · 10^7 g · · cm^2/s.
Moment de inerție (moment de inerție dinamic) planar	J_{yoz} J_{zox} J_{xoy}	$J_{yoz} = \int x^2 \cdot dm$	L^2M	Kilogram-metru pătrat $kg \cdot m^2$	Momentul de inerție planar al unui corp punctiform cu masa de 1 kilogram, față de un plan situat la distanța de 1 metru	$g \cdot cm^2$	kgf · m · · s^2	1 kg · m^2 = 10^7 g · cm^2 = = 0,101972 kgf · m · s^2 1 g · cm^2 = 10^{-7} kg · m^2 = = 1,01972 · 10^{-8} kgf · m · s^2 1 kgf · m · s^2 = 9,80565 kg · · m^2 = 9,80665 · 10^7 g · cm^2.
Moment de inerție (moment de inerție dinamic) axial	J_x J_y J_z	$J_x = (y^2 + + z^2) \cdot dm$			Momentul de inerție axial al unui corp punctiform cu masa de 1 kilogram, față de o axă situată la distanța de 1 m			
Moment de inerție (moment de inerție dinamic) polar	J_p,	$J_p = \int r^2 \cdot dm$			Momentul de inerție al unui corp punctiform cu masa de 1 kg față de un punct situat la distanța de 1 metru			
Moment de inerție (moment de inerție dinamic) centrifugal	J_{xy}, J_{yz}, J_{zx},	$J_{xy} = \int x \cdot \cdot y \cdot dm$			Momentul de inerție centrifugal al unui corp punctiform cu masa de 1 kg față de 2 plane situate fiecare la distanța de 1 metru de corp			

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1. (*continuare*)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Forță	F	$F = m \cdot a$	LMT^{-2}	newton N	Forța care acționînd asupra unui corp cu masa de 1 kilogram îi imprimă accelerația de 1 metru pe secundă la pătrat	dyn	kgf	1 dyn = 10^{-5}N = 1,01972 · $\cdot 10^{-6}$ kgf 1 N = 0,101972 kgf = 10^5 dyn 1 kgf = 9,80665 · 10^5 dyn = = 9,80665N
Greutate	G, P	$G = m \cdot g$			Greutatea unui corp cu masa de 1/9,80665 kilograme, care se găsește în vid, într-un punct de pe suprafața Pămîntului situat la o latitudine $\pi/4$ radiani și altitudinea de 0 metri			
Greutate volumetrică (greutate specifică)	γ	$\gamma = \frac{G}{V}$	$L^{-2}MT^{-2}$	newton pe metru cub N/m³	Greutatea volumică a unui corp omogen cu volumul de 1 metru cub a cărui greutate este de 1 newton	dyn/cm³	kgf/m³	1 N/m³ = 0,101972 kgf/m³ 1 kgf/m³ = 9,80665 N/m³
Momentul unei forțe față de un punct (sau axă); momentul unui cuplu	$M(F)$	$M = F \cdot l$	L^2MT^{-2}	newton-metru N.m	Momentul unei forțe de un newton, față de un punct sau de o axă perpendiculară pe forță situat(ă) la distanța de 1 metru de suportul forței	dyn · cm	kgf · m	1 N · m = 10^7 dyn · cm = = 0,101972 kgf/m 1 dyn · cm = 10^{-7} N · m = = 1,01972 · 10^{-8} kgf · m 1 kgf · m = 9,80665 N · m = = 9,80665 10^7 dyn · cm.
Impuls (percuție)	H (P)	$H = m \cdot v$ $P = m \cdot \Delta v$	LMT^{-1}	newton-secundă N.s	Impulsul unei forțe de 1 newton care acționează timp de 1 secundă	dyn · s	kgf · s	1 N · s = 10^5 dyn · s = = 0,101972 kgf · s. 1 dyn · s = 10^{-5} N · s = = 1,01972 · 10^{-6} kgf · s. 1 kgf · s = 9,80665 N · s = = 9,80665 · 10^5 dyn · s.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Presiune	p	$p = \frac{F}{A}$	$L^{-1}MT^{-2}$	newton pe metru pătrat	Presiunea produsă de forța de 1 newton, normală și uniform distribuită pe o suprafață cu aria de 1 metru pătrat	dyn/cm²	kgf/m²	1 N/m² = 10 dyn/cm² = = 0,101972 kgf/m² = = 0,101972 mm H_2O 1N/m² = 1,01972 · 10^{-5} at = = 9,86923 · 10^{-6} atm = 10^{-5} bar
Lucru mecanic	L, A	$L = F \cdot l \cdot \cos \alpha$	L^2MT^{-2}	joule J	Lucrul mecanic efectuat de forța de 1 newton, al cărei punct de aplicație se deplasează cu 1 metru în direcția și sensul forței	erg	kgf · m	1 erg = LO^{-7} J = 1,01972 kgf · · m 1 J = 0,101972 kgf · m = 10^7 erg 1 kgf · m = 9,80666 J
Energie potențială	E_p, W_p, U	$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$	L^2MT^{-2}	Joule J	Creșterea energiei potențiale a unui corp punctiform cu greutate de 1 newton, cînd acesta e ridicat pe verticală în cîmpul gravitațional pe o distanță de 1 metru	erg	kgf · m	Vezi „Lucru mecanic"
Energie cinetică	E_c, W_c	$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$			Energia cinetică a unui corp cu masa de 2 kilograme, care se deplasează cu viteza de 1 metru pe secundă			
Putere mecanică	P	$P = \frac{E}{t}$	L^2MT^{-3}	watt W	Putere mecanică care corespunde transferului de energie de 1 joule în timp de 1 secundă	erg/s	kgf · · m/s	1 erg/s = 10^{-7} W = 1,35964 · · 10^{-10} CP = 0,101972 kgf · m/s. 1 kgf · m/s = 9,80665 W = = 1,33333 · 10^{-2} CP 1 CP = 7,35499 · 10^2 W = = 75 kgf · m/s.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.5. **Similitudine.** Pentru a putea prevedea modul de comportare a unei viitoare realizări tehnice, al cărui studiu teoretic este complicat sau incomplet și nesigur, se recurge la cercetări experimentale pe modele, care reproduc la scară redusă obiectul respectiv. Cunoscînd rezultatele măsurării unei mărimi fizice pe model se pune problema determinării aceleiași mărimi pentru obiectul de realizat.

Notînd cu A_m valoarea numerică a unei mărimi fizice oarecare A, măsurată direct pe model și cu A_r valoarea sa pe obiectul ce va fi realizat și admițînd că aceste mărimi fizice sînt proporționale, se pune problema cunoașterii unui coeficient k_A cu care se poate stabili legătura funcțională dintre ele:

$$A_r = k_A A_m. \tag{2.9}$$

Modelul ideal ar trebui să prezinte o similitudine perfectă, respectiv același coeficient de similitudine K, pentru orice mărime fizică A, ceea ce practic este imposibil, deoarece multe mărimi, ca: accelerația gravitației, coeficientul de elasticitate, frecarea, densitatea materialului etc., nu pot fi reduse în același raport.

De aceea, practic se caută să se realizeze similitudine pentru mărimile care interesează în fenomenul studiat.

În funcție de mărimea fizică care prezintă interes rezultă unele relații între coeficienții de similitudine ai mărimilor de bază: lungimi, mase și timpi, adică:

$$\frac{L_r}{L_m} = \lambda, \quad \frac{M_r}{M_m} = \mu, \quad \frac{T_r}{T_m} = \tau, \tag{2.10}$$

și se disting cîteva modele.

a) — Modelul mecanic a lui Freude. Dacă se pune condiția realizării aceleiași accelerații pe model și pe obiectul real, rezultă:

$$\frac{a_r}{a_m} = 1 \text{ sau } \frac{L_r \cdot T_r^{-2}}{L_m \cdot T_m^{-2}} = 1 \text{ sau } \lambda\tau^{-2} = 1, \text{ deci } \tau = \sqrt{\lambda} \tag{2.11}$$

$$\mu = \frac{M_r}{M_m} = \frac{\rho_r V_r}{\rho_m V_m} = \frac{\rho_r}{\rho_m}\lambda^3, \tag{2.12}$$

iar, în cazul în care modelul și corpul real sînt executate din același material ($\rho_r = \rho_m$):

$$\mu = \lambda^3. \tag{2.13}$$

b) — Modelul clastic al lui Cauchy. Dacă se pune condiția realizării aceleiași eforturi unitare σ pe model și pe obiectul real, rezultă:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_m} = \frac{L_r M_r T_r^{-2} L_r^{-2}}{L_m M_m T_m^{-2} L_m^{-2}} = \mu\lambda^{-1}\tau^{-2} = 1, \tag{2.14}$$

iar dacă modelul și obiectul real sînt din același material:

$$\mu = \lambda^3, \text{ respectiv } \tau = \lambda.$$

c) — Modelul dinamic al lui Reynolds. Dacă se pune condiția ca pentru aceleași lichide coeficientul de viscozitate cinematică ν să fie același pe model și pe obiectul real, rezultă:

$$\frac{\nu_r}{\nu_m} = \frac{L_r^2 T_r^{-1}}{L_m^2 T_m^{-1}} = \lambda^2\tau^{-1} = 1, \text{ de unde: } \tau = \lambda^2 \text{ și } \mu = \lambda^3. \tag{2.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

d) — Modelul lui Weber. Dacă se pune condiția ca pentru aceleași lichide tensiunea superficială măsurată pe model și pe obiectul real să fie aceeași, rezultă:

$$\frac{L_r M_r T_r^{-2} L_r^{-1}}{L_m M_m T_m^{-2} L_m^{-1}} = \mu\tau^{-2} = 1, \text{ deci: } \mu = \tau^2. \tag{2.16}$$

Lichidele fiind aceleași $\mu = \lambda^3$ și se obține:

$$\tau = \sqrt{\mu} = \sqrt{\lambda^3}, \text{ deci } \tau = \lambda^{3/2}. \tag{2.17}$$

2.2. PRINCIPIILE FUNDAMENTALE

2.2.1. **Principiul inerției.** Enunțat pentru prima dată de *Galilei* și formulat mai tîrziu de *Newton*, în *Legea I* (lex prima), acest principiu are următorul cuprins: *„Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă, atît timp cît nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare".*

Denumirea de corp inclusă în formularea acestei legi trebuie înțeleasă în sensul de punct material, deoarece un corp de dimensiuni finite are o mișcare mai complicată decît cea de translație rectilinie și uniformă.

Starea de mișcare rectilinie și uniformă a particulei materiale împreună cu cazul său particular, starea de repaus, se numesc stări inerțiale. Deoarece *Newton* a considerat mișcarea mecanică raportată la un sistem de referință absolut și imobil, care nu există în univers, principiul inerției poate servi la definirea unui sistem de referință preferențial, și anume a sistemului inerțial. Acesta va fi deci sistemul în care orice particulă materială izolată sau supusă acțiunilor în echilibru permanent ale altor particule se găsește în stare de mișcare rectilinie uniformă sau în repaus.

2.2.2. **Principiul acțiunii forței.** Formulat de *Newton* în *Legea II* (lex secunda) acest principiu se enunță astfel: *„accelerația unui corp este proporțională cu forța motoare aplicată și este îndreptată în direcția după care acționează forța".*

Pe baza acestui principiu, *Newton* a introdus noțiunea de masă, ca o mărime scalară, constantă și pozitivă definită de raportul: $m = \frac{F}{a}$.

Legea a doua se poate exprima astfel:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}, \tag{2.18}$$

sau ținînd seamă că în mecanica clasică masa m este considerată constantă, iar $\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$ (accelerația punctului), sub forma:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{2.19}$$

exprimînd ecuația fundamentală a Dinamicii.

Dacă în această relație $\bar{F}$ se anulează, rezultă $\bar{a} = 0$, adică punctul material are o mișcare uniformă, în virtutea inerției. Acest rezultat nu poate fi interpretat în sensul că principiul inerției este conținut în principiul acțiunii, deoarece noțiunea de forță se definește ca o consecință a principiului inerției. Rezultatul dovedește doar corespondența și lipsa de contradicție dintre cele două principii.

Scanned with OKEN Scanner

2.2.3. **Principiul acțiunii și reacțiunii.** Acest principiu numit *Legea III* (lex tertia), a fost formulat de *Newton* astfel: *„La orice acțiune corespunde totdeauna o reacțiune egală și contrară, sau acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale și dirijate în sensuri contrare"*.

Principiul se aplică în Mecanica clasică, atît în cazul contactului direct dintre corpuri, cît și în cazul acțiunii de la distanță. El este valabil atît în starea de repaus cît și în starea de mișcare oarecare a punctelor materiale.

Dacă se notează cu $\bar{F}_{ij}$ acțiunea unui punct material M_j asupra lui M_i și cu $\bar{F}_{ji}$ acțiunea punctului M_i asupra lui M_j relația vectorială care exprimă principiul III este:

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0. \tag{2.20}$$

Dacă se studiază mișcarea punctului material M_i, $\bar{F}_{ij}$ reprezintă acțiunea din afară asupra lui, iar $\bar{F}_{ji}$ reprezintă reacțiunea punctului considerat M_i asupra „agentului motor" (aici punctul material M_j), reacțiune numită „forță de inerție". Acționînd asupra a două puncte diferite, cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, este impropriu să se considere în echilibru deși au aceeași direcție (M_iM_j), sînt egale și de sens contrar.

Acest principiu exprimă deci dualismul forțelor din natură: apariția unei acțiuni este însoțită simultan de reacțiunea sa egală și direct opusă.

2.2.4. **Principiul independenței acțiunii forțelor și principiul paralelogramului.** Acest principiu, prezentat de *Newton* sub formă de *Corolarul I al legii a doua*, se exprimă astfel: *„Un corp sub acțiunea a două forțe unite descrie diagonala unui paralelogram în același timp în care ar descrie laturile sub acțiunile separate ale forțelor"*.

Dacă cele două forțe care acționează simultan asupra punctului material sînt $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, relația vectorială:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}, \tag{2.21}$$

în care $\bar{F}$ se numește rezultanta forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, iar acestea se numesc componentele forței $\bar{F}$, exprimă așa-zisul principiu al paralelogramului.

În esență se poate afirma că principiul paralelogramului atestă posibilitatea aplicării regulii paralelogramului în cazul forțelor ce acționează simultan asupra unui punct material.

2.2.5. **Principiul condițiilor inițiale.** *Dacă două puncte materiale formează un sistem izolat, forțele lor de interacțiune sînt bine determinate la momentul t, în mărime, direcție și sens, dacă se cunosc la acel moment pozițiile și vitezele relative ale celor două puncte.*

Acest principiu, enunțat încă de *Galileo Galilei*, arată că forțele ce acționează asupra punctelor depind în general numai de timp, de coordonatele punctelor față de un sistem de referință și de vitezele lor.

2.2.6. **Problemele generale ale dinamicii.** Problemele generale ale dinamicii sînt:

a) Problema directă care cere să se determine mișcarea unui sistem material cunoscînd forțele ce acționează asupra acestuia și condițiile inițiale (configurația și distribuțiile de viteze în momentul inițial). În cazul particular al punctului material problema directă cere să se găsească funcția vecto-

Scanned with OKEN Scanner

rială $\bar{r} = \bar{r}(t)$, care determină poziția punctului în orice moment. Această problemă se rezolvă prin integrarea ecuației:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}), \tag{2.22}$$

constantele de integrare determinîndu-se cu ajutorul condițiilor inițiale: la $t = 0$: $\bar{r}(0) = \bar{r}_0$, și $\dot{\bar{r}}(0) = \bar{v}_0$. Integrala generală a acestei ecuații diferențiale va avea forma: $\bar{r} = \bar{r}(t, \bar{r}_0, \bar{v}_0)$.

b) Problema inversă care cere să se determine forțele ce acționează asupra corpurilor materiale ale unui sistem cunoscînd mișcarea acestuia. În cazul punctului material, presupunînd cunoscută mișcarea sa, deci funcția vectorială $\bar{r}(t)$, problema inversă constă în determinarea vectorului forță $\bar{F}$ care provoacă mișcarea. Determinînd accelerația punctului, în urma multiplicării cu masa sa m, se obține forța în baza ecuației:

$$\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}. \tag{2.23}$$

Deosebit de aceste probleme generale se mai pot întîlni altele particulare în care, datorită unor împrejurări impuse de practică, nu se cer să fie determinate decît unele forțe și unele elemente ale mișcării sistemului material. Acest tip de probleme se întîlnește cel mai des în aplicații.

2.3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE MECANICII

Pentru a putea trece la studiul teoremelor fundamentale ale Mecanicii e necesar mai întîi să definim și să studiem unele noțiuni și relații care intervin în demonstrația acestor teoreme. Acestui scop îi sînt dedicate paragrafele 2.3.1—2.3.7, restul paragrafelor ocupîndu-se cu studiul teoremelor fundamentale și a consecințelor lor.

2.3.1. **Legături. Clasificarea legăturilor. Forțe și momente de legătură. Principiul forțelor de legătură.** Poziția unui punct material în spațiu poate fi precizată prin trei coordonate (carteziene de exemplu). Cînd aceste trei coordonate se pot schimba în timp independent (una de celelalte) spunem că punctul are trei grade de libertate în deplasări finite. Cînd, dintr-un motiv oarecare, între coordonatele punctului este impusă o relație de forma:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{2.24}$$

spunem că punctul are numai două grade de libertate în deplasări finite sau că este legat pe suprafața de ecuație (2.24).

Cînd între coordonatele punctului sînt impuse două relații:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

spunem că punctul mai are un singur grad de libertate în deplasări finite, sau că este legat pe curba de ecuații (2.25). În fine, cînd între coordonatele punctului sînt impuse trei relații:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

spunem că punctul nu mai are nici un grad de libertate, sau că este legat într-un anume punct din spațiu.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd acum legătura pe o suprafață putem generaliza noțiunea prin considerarea unei suprafețe mobile și deformabile în timp:

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{2.27}$$

O asemenea legătură impusă unui punct material o vom numi *reonomă*, în timp ce o legătură de tipul (2.24) o vom numi *scleronomă*.

O nouă generalizare a noțiunii de legătură pleacă de la observația că orice legătură de tipul (2.27) se poate pune sub forma diferențială echivalentă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt = 0, \tag{2.28}$$

dar nu orice relație diferențială de forma:

$$A(x, y, z, t) \cdot dx + B(x, y, z, t) \cdot dy + C(x, y, z, t) \cdot dz + \\ + D(x, y, z, t) \cdot dt = 0 \tag{2.29}$$

este echivalentă cu o formă finită de tipul (2.27), o asemenea echivalență putîndu-se stabili doar dacă membrul stîng al relației (2.29) este o diferențială totală exactă, ceea ce se întîmplă doar atunci cînd:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}; \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}; \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial x}; \\ \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}; \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial y}; \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial z}. \tag{2.30}$$

Prin urmare cel mai general tip de legătură a unui punct este exprimat printr-o relație diferențială de forma (2.29).

În cazul îndeplinirii condițiilor (2.30), deci cînd forma (2.29) este integrabilă, legătura se numește *olonomă*, în caz contrar ea se numește *neolonomă*. În cazul prezenței variabilei t (timpul) și bineînțeles a diferențialei sale dt în ecuația (2.29) legătura se numește reonomă, iar în cazul cînd acestea lipsesc legătura se numește scleronomă. Deci cel mai general tip de legătură este legătura neolonomă reonomă.

Legătura olonomă scleronomă de tipul (2.24) se numește bilaterală deoarece deplasările punctului legat în ambele sensuri ale normalei la suprafață sînt interzise. În practică apar însă frecvent legături de tipul:

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \tag{2.31}$$

sau

$$f(x, y, z) \leqslant 0 \tag{2.32}$$

care se numesc unilaterale, deoarece numai una dintre deplasările punctului în cele două sensuri ale normalei la suprafață e interzisă.

Vom reveni acum la două abstractizări introduse de Mecanica teoretică: noțiunea de punct material și noțiunea de rigid. *Punctul material* se definește a fi un corp fără dimensiuni (un punct geometric) înzestrat cu o masă. *Rigidul* se definește ca un sistem cu dimensiuni finite format dintr-un număr infinit de puncte materiale aflate unele față de altele la distanțe invariabile în timp, indiferent de mărimea forțelor exterioare aplicate corpului. Aceste două abstractizări se înlocuiesc în Mecanica aplicată prin noțiunea de *corp punctiform*.

Scanned with OKEN Scanner

form (corp cu dimensiuni neglijabile la scara fenomenului studiat) şi noţiunea de *corp elastic* (corp deformabil în funcţie de mărimea forţelor exterioare aplicate).

Vom defini numărul de grade de libertate ale unui corp ca fiind numărul de parametri independenţi care determină poziţia momentană a unui corp în spaţiu. Este evident atunci că punctul material liber are trei grade de libertate şi că fiecare legătură de tipul (2.24) sau (2.27) îi micşorează cu unul numărul gradelor de libertate. Poziţia momentană a unui rigid în spaţiu este determinată cînd se cunosc poziţiile în spaţiu a trei puncte $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ şi $C(x_C, y_C, z_C)$ necoliniare ale rigidului. Între cele două coordonate ale punctelor A, B şi C avînd impuse trei condiţii de rigiditate:

$$\begin{cases} (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = d_1^2 \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = d_2^2 \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = d_3^2 \end{cases} \tag{2.33}$$

(d_1, d_2, d_3 fiind lungimile laturilor triunghiului ABC), numărul parametrilor independenţi rămîne egal cu şase. Deci un rigid liber are şase grade de libertate. Cei şase parametri independenţi care determină poziţia în spaţiu a unui rigid liber pot fi însă definiţi într-un mod mult mai util în studiul legăturilor. Fie un sistem de referinţă cartezian fix (T_0) $Oxyz$, figura 2.1, şi fie un rigid liber (R) de care este solidar ataşat sistemul de referinţă cartezian (T_4); $O_1x_4y_4z_4$.

Poziţia rigidului (R) faţă de triedrul (T_0) este definită evident prin poziţia triedrului (T_4) faţă de (T_0). Fie (T_1) sistemul de referinţă cartezian cu originea în O_1 şi cu axele paralele cu ale triedrului (T_0).

Dacă O_1 are coordonatele a, b şi c faţă de (T_0), atunci se poate spune că (T_1) se obţine din (T_0) prin trei translaţii ale acestuia din urmă, în lungul axei Ox cu a, în lungul axei Oy cu b şi în lungul axei Oz cu c. În continuare vom arăta că oricare ar fi poziţia lui (T_4) el se poate obţine din (T_1) prin trei rotaţii succesive ale acestuia din urmă în jurul axelor sale şi că unghiurile de rotaţie α, β şi γ sînt unic determinate pentru fiecare poziţie a lui (T_4) faţă de (T_1). Să presupunem că problema este posibilă şi să notăm prin (T_2) triedrul $O_1\,x_2\,y_2\,z_2$ obţinut prin rotaţia lui (T_1) în jurul axei O_1x_1 cu unghiul po-

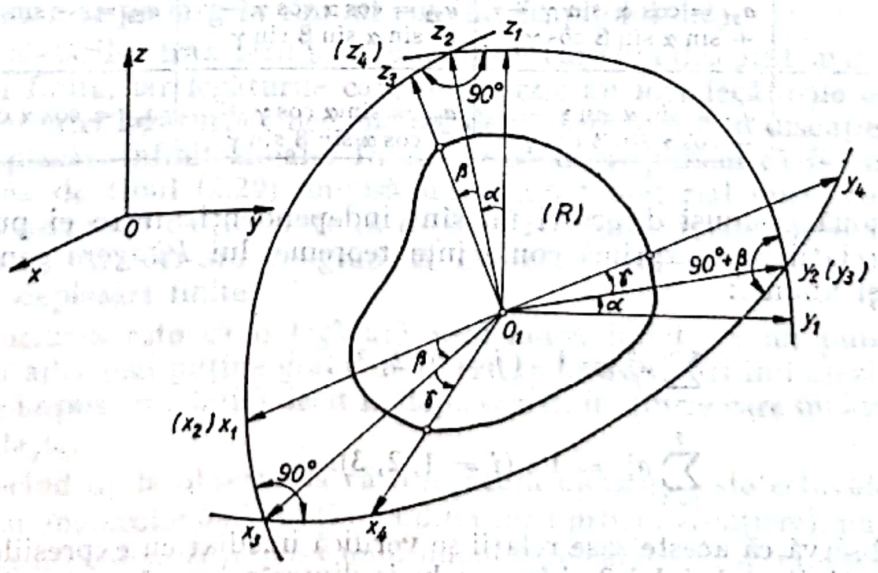


Fig. 2.1

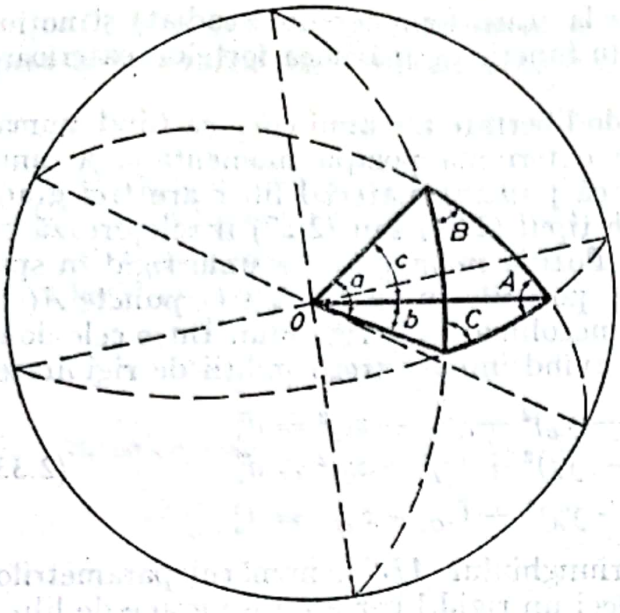


Fig. 2.2

zitiv α (se aplică regula burghiului considerîndu-se α pozitiv sau negativ după cum burghiul rotit ca și triedrul înaintează în sensul pozitiv sau negativ al axei de rotație). Vom nota prin (T_3) triedrul $O_1x_3y_3z_3$ obținut prin rotația lui (T_2) în jurul axei O_1y_2 cu unghiul pozitiv β și, în fine, îl vom obține pe (T_4) prin rotația lui (T_3) cu unghiul pozitiv γ în jurul axei O_1z_3. Vom calcula cosinusurile unghiurilor dintre axele triedrului (T_4) și cele ale triedrului (T_1) folosind formula fundamentală din trigonometria sferică:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \\ + \sin b \sin c \cos A, \quad (2.34)$$

în care mărimile ce intervin sînt reprezentate în figura 2.2.

Triunghiurile sferice considerate în figura 2.1 sînt determinate, pe rînd, de cîte trei raze și anume: perechea de axe între care dorim să calculăm cosinusul unghiului și o a treia axă care este, după caz, fie O_1x_3, fie O_1y_2, fie O_1z_2.

Lăsînd pe seama cititorului verificarea acestor calcule simple vom înscrie doar rezultatele în tabelul 2.2 în care în fiecare căsuță este înscris cosinusul unghiului dintre axele (și deci versorii) ce apar pe linia și coloana căsuței respective.

Tabelul 2.2

	$O_1X_4(\bar{i}_4)$	$O_1Y_4(\bar{j}_4)$	$O_1Z_4(\bar{k}_4)$
$O_1x_1(\bar{i}_1)$	$a_{11} = \cos\beta\cos\gamma$	$a_{12} = -\cos\beta\sin\gamma$	$a_{13} = \sin\beta$
$O_1y_1(\bar{j}_1)$	$a_{21} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$	$a_{22} = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$a_{23} = -\sin\alpha\cos\beta$
$O_1z_1(\bar{k}_1)$	$a_{31} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$	$a_{32} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$a_{33} = \cos\alpha\cos\beta$

Cei nouă cosinuși directori nu sînt independenți, între ei putîndu-se scrie șase relații care exprimă consecința teoremei lui *Pitagora* generalizată în spațiu și anume:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}^2 = 1 \quad (j = 1, 2, 3); \\ \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.35)$$

Se observă că aceste șase relații se verifică imediat cu expresiile cosinușilor directori din tabelul 2.2 și în concluzie dintre cei nouă cosinuși directori

Scanned with OKEN Scanner

care determină poziția triedrului (T_4) față de (T_1) doar trei sînt independenți, aceștia putînd fi aleși după voie cu condiția de a nu se afla toți trei pe aceeași linie sau coloană a tabelului.

Alegînd, spre exemplu, ca parametri independenți cosinușii directori a_{11}, a_{13} și a_{33}, care evident sînt unic determinați pentru o anumită poziție a lui (T_4) față de (T_1) și considerînd, după cum am convenit, unghiurile α, β și γ pozitive, se vede ușor că din relațiile:

$$\begin{cases} \cos\beta\cos\gamma = a_{11} \\ \sin\beta = a_{13} \\ \cos\alpha\cos\beta = a_{33}, \end{cases} \tag{2.36}$$

rezultă în mod unic unghiurile α, β și γ.

Concluzia importantă pentru noi în acest moment este faptul că pentru un rigid liber cei șase parametri independenți care determină poziția sa momentană în spațiu pot fi considerați ca fiind cele trei translații cu a, b și c în lungul axelor unui triedru fix pe care le execută rigidul dintr-o poziție inițială dată și cele trei rotații cu unghiurile α, β și γ în jurul axelor unui triedru atașat solidar rigidului, astfel încît acesta să ajungă în poziția finală (arbitrară). Aceste șase mișcări independente corespund, vom spune pe viitor, celor șase grade de libertate ale unui rigid liber.

Este evident acum că orice legătură olonomă impusă unui punct sau rigid îi micșorează numărul gradelor de libertate, aceasta făcîndu-se practic prin interzicerea unora dintre cele trei (la punct), respectiv șase (la rigid) mișcări independente. Astfel, punctul legat pe o suprafață are două grade de libertate, punctul legat pe o curbă doar unul, rigidul cu două puncte fixe are un grad de libertate, pe cînd rigidul cu un punct fix are trei grade de libertate ș.a.m.d. Mai facem aici observația că în studiul rigidului cu un punct fix, *Euler* a introdus ca parametri independenți cele trei unghiuri care-i poartă numele și care sînt similare unghiurilor α, β și γ de mai sus, însă reprezintă unghiurile de rotație în jurul axelor: O_1Z_1 (unghiul de precesie), O_1X_1 (unghiul de mutație) și O_1Z_3 (unghiul de rotație proprie). Ne vom ocupa de acestea mai pe larg la timpul cuvenit (capitolul 4.2).

Deplasările (translații sau rotații) de care am discutat mai sus au fost deplasări finite, iar legăturile care le interzic au fost legăturile olonome. În cazul prezenței legăturilor neolonome, deplasările luate în discuție vor trebui să fie deplasări infinitezimale. În aceste condiții spunem că fiecare legătură neolonomă de tipul (2.29) impusă unui punct material micșorează cu unu numărul de grade de libertate în deplasări infinitezimale ale punctului respectiv. Punctul liber are trei grade de libertate atît în deplasări infinitezimale cît și în deplasări finite.

Concluzia este că o legătură neolonomă impusă unui punct face ca acesta să aibă mai puține grade de libertate în deplasări infinitezimale (între care este impusă o relație) decît în deplasări finite (între care nu avem impusă nici o relație).

Plecînd de la observația că o legătură olonomă este echivalentă întotdeauna cu una neolonomă (obținută din prima prin diferențiere), putem afirma că o legătură olonomă impusă unui punct face ca acesta să rămînă cu același număr de grade de libertate atît în deplasări infinitezimale cît și în deplasări finite.

Scanned with OKEN Scanner

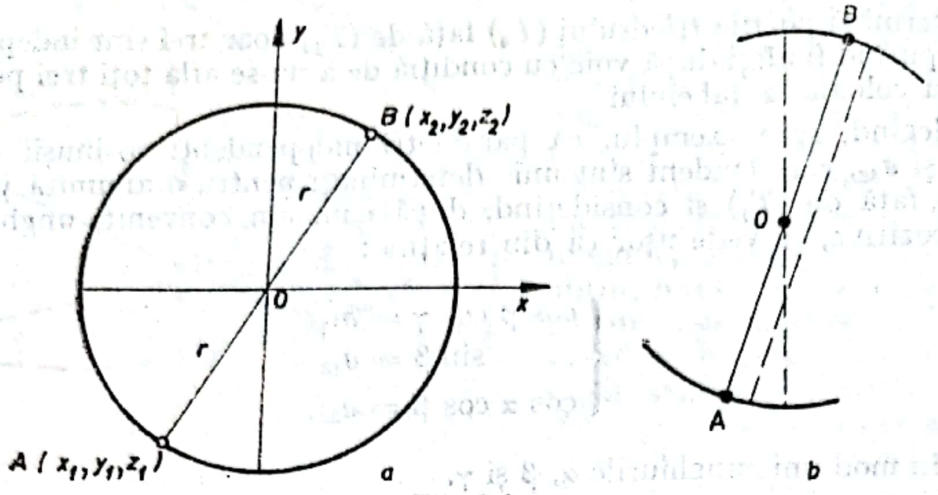


Fig. 2.3

În cazul prezenței mai multor legături olonome impuse unor puncte lucrurile se pot schimba. Se poate ivi situația cînd relațiile finite (prin care se exprimă legăturile olonome) să fie independente, pe cînd relațiile diferențiale obținute din acestea prin diferențiere să nu mai fie independente. În acest caz numărul gradelor de libertate în deplasări infinitezimale este mai mare decît în deplasări finite (pentru întregul sistem de puncte) și spunem că avem de-a face cu așa-zisele legături critice. Un astfel de exemplu îl constituie legătura a două puncte la cele două capete ale unui diametru mobil într-un cerc fix de rază r (fig. 2.3, *a*), situat în planul xOy.

Ecuațiile legăturilor celor două puncte se scriu:

$$\begin{cases} (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4r^2 \\ x_1^2+y_1^2=r^2 \\ x_2^2+y_2^2=r^2 \\ z_1=0 \\ z_2=0 \end{cases} \tag{2.37}$$

Scăzînd prima relație din dublul sumei următoarelor două se obține:

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=0 \tag{2.38}$$

sau:

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ y_1+y_2=0 \end{cases} \tag{2.39}$$

Scăzînd în (2.37) prima relație din suma următoarelor două și împărțind apoi la 2 se obține:

$$x_1x_2+y_1y_2=-r^2. \tag{2.40}$$

Rezultă că grupul de relații (2.37) este echivalent cu relațiile:

$$\begin{cases} x_1x_2+y_1y_2=-r^2 \\ x_1+x_2=0 \\ y_1+y_2=0 \\ z_1=0 \\ z_2=0 \end{cases} \tag{2.41}$$

Scanned with OKEN Scanner

care se vede ușor că sînt independente. Pe de altă parte, prin diferențierea primei relații de la (2.37) se obține:

$$(x_1 - x_2)\,dx_1 + (x_2 - x_1)\,dx_2 + (y_1 - y_2)\,dy_1 + (y_2 - y_1)\,dy_2 = 0. \qquad (2.42)$$

Înlocuind în această relație termenii negativi din paranteze prin termenii pozitivi cu ajutorul relațiilor (2.41) obținem:

$$x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + y_1\,dy_1 + y_2\,dy_2 = 0, \qquad (2.43)$$

astfel încît prin diferențierea relațiilor (2.39) obținem în final sistemul:

$$\begin{cases} x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + y_1\,dy_1 + y_2\,dy = 0 \\ x_1\,dx_1 + y_1\,dy_1 = 0 \\ x_2\,dx_2 + y_2\,dy_2 = 0 \\ dz_1 = 0 \\ dz_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.44)$$

În acest sistem doar patru relații sînt independente, prima fiind suma următoarelor două. Rezultă că în deplasări infinitezimale sistemul celor două puncte A și B are două grade de libertate, pe cînd în deplasări finite, doar unul.

Să vedem căror mișcări independente le corespund aceste grade de libertate. Punctele A și B menținîndu-se la distanță constantă unul față de celălalt (fig. 2.3, *a*) rămîn în deplasări finite cu o singură mișcare posibilă: rotația unică odată cu diametrul AB în jurul axei normale la planul cercului; în deplasări infinitezimale (fig. 2.3, *b*), datorită faptului că arcele elementare de cerc se pot asimila cu coardele, punctele A și B au două posibilități de mișcare independentă: o rotație infinitezimală în jurul axei normale la planul cercului și o translație infinitezimală în planul cercului pe direcția perpendiculară pe AB.

Din cele de mai sus rezultă faptul că legăturile impuse punctelor sau rigidelor reduc numărul mișcărilor independente ale respectivelor corpuri față de situația cînd acestea ar fi libere. Să vedem cum putem să interzicem aceste mișcări independente suprimate de legături, în situația în care aceste legături ar lipsi și deci corpurile respective ar fi totuși libere. Plecăm de la observația că dacă un punct are tendința de a se mișca pe o direcție dată sub acțiunea unei forțe (pentru moment arbitrare ca sens și mărime) ce lucrează pe respectiva direcție, pentru a interzice această deplasare a punctului e necesar să introducem o forță egală în mărime și opusă ca sens forței de mai sus. Rezultă că pentru a interzice o deplasare a unui punct material pe o anumită direcție vom introduce în acel punct pe direcția respectivă o forță de modul și sens arbitrare, considerînd îndepărtată legătura care interzicea deplasarea. Aceste forțe cu care se înlocuiesc din punct de vedere mecanic legăturile îndepărtate poartă numele de forțe de legătură.

Pentru un rigid, însă, care pe lîngă cele trei translații independente (similare cu ale punctului) mai poate executa și trei rotații independente lucrurile se complică. Cînd un număr finit de puncte ale rigidului sînt supuse la legături se procedează ca în cazul precedent: se introduc în punctele respective, în locul legăturilor, forțe de legătură după direcțiile deplasărilor interzise acestor puncte. Există însă multe cazuri în care un număr infinit de puncte ale rigidului sînt supuse la legături. Aceste puncte delimitează un do-

Scanned with OKEN Scanner

meniu finit unidimensional (un cilindru care vine în contact cu un plan după o generatoare), bidimensional (același cilindru așezat cu baza pe plan) sau tridimensional (o grindă încastrată într-un zid). În toate aceste cazuri Mecanica reușește doar să descrie în mod integral acțiunea legăturilor asupra rigidului procedînd în felul următor. Se alege un punct arbitrar al domeniului de mai sus și se introduc în acest punct forțe de legătură după direcțiile deplasărilor interzise punctului respectiv și momente de legătură (care reprezintă cupluri de forțe) după direcția axelor de rotație interzise ale rigidului. Se face aceasta în urma observației că așa cum o forță poate interzice deplasarea după direcția forței, un cuplu de forțe aplicat unui rigid poate interzice rotația acestuia în jurul axei vectorului moment al cuplului. Mărimea și sensul vectorului moment de legătură rămîn arbitrare la fel ca și mărimea și sensul vectorului forță de legătură, acestea rămînînd a fi determinate din ecuațiile de echilibru sau de mișcare pe care le vom studia la timpul potrivit.

În rezumat, legăturile aplicate punctelor sau rigidelor se înlocuiesc prin forțe și momente de legătură după direcțiile translațiilor și respectiv rotațiilor interzise de legături.

Acest principiu cu ajutorul căruia pe viitor vom transforma întotdeauna o problemă (de echilibru sau mișcare) a unui corp legat (punct sau rigid) într-o problemă a corpului liber, poartă numele de principiul forțelor de legătură.

2.3.2. **Forțe exterioare, interioare și de legătură.** Cînd studiem echilibrul sau mișcarea unui sistem mecanic (punct, rigid, sistem de puncte, sistem de rigide) vom numi forță exterioară sistemului orice forță cunoscută ce acționează asupra lui din exterior. Pe de altă parte însă știm că forța este o mărime care măsoară interacțiunea mecanică între corpuri. Aceste interacțiuni mecanice între corpuri sînt de două feluri: interacțiuni la distanță (cum sînt atracția universală, forțele magnetice și electromagnetice) și interacțiuni directe (datorate contactului direct între corpuri). Observînd că forțele de interacțiune la distanță sînt în general cunoscute la începutul studierii unei probleme de Mecanică, pe cînd forțele de interacțiune directă nu, vom numi pe viitor forțe exterioare unui sistem forțele datorate acțiunii la distanță a corpurilor exterioare sistemului considerat asupra acestuia din urmă.

Într-un sistem mecanic format din cel puțin două puncte, diferitele părți ale sistemului interacționează între ele. Vom numi atunci forță interioară unui sistem orice forță datorată acțiunii la distanță sau directe a unei părți a sistemului considerat asupra altei părți a acestuia. Facem observația că datorită principiului egalității acțiunii cu reacțiunea, forțele interioare unui sistem sînt două cîte două egale ca mărime și opuse ca sens pe același suport.

Revenind acum la conceptul de legătură introdus în paragraful precedent, vom observa că impunerea unor legături unui corp (punct sau rigid), deci restrîngerea posibilităților de mișcare liberă ale acestuia, se datorește întotdeauna acțiunii mecanice directe a altor corpuri asupra corpului studiat. De aceea, de multe ori, aceste corpuri care vin în contact direct cu corpul studiat sînt denumite ele însele legături. Vom numi forțe de legătură pentru un anume sistem forțele datorate acțiunii directe a corpurilor exterioare sistemului dat asupra acestuia din urmă.

Ne vom opri acum puțin asupra unor legături des întîlnite în Mecanica teoretică și aplicată, arătînd în fiecare caz cum se introduc forțele de legătură respective (eventual momentele de legătură).

Scanned with OKEN Scanner

a) Legătura olonomă a unui punct pe o suprafață de ecuație:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (2.45)$$

se înlocuiește cu o forță de legătură $\bar{N}$ arbitrară ca mărime și sens, dar normală la suprafață în punctul studiat M (fig. 2.4) deoarece dintre cele trei deplasări infinitezimale independente ale punctului M, una după normală și celelalte două în planul tangent la suprafață, legătura o interzice doar pe prima.

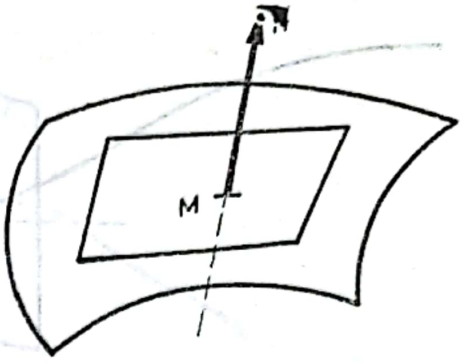


Fig. 2.4

Analitic, forța de legătură $\bar{N}$ (care se mai numește în acest caz și reacțiune) se poate scrie ușor, ținînd cont de faptul că vectorul grad f este normal la suprafața $f = 0$ în punctul în care el se calculează.

Deci putem scrie:

$$\bar{N} = \lambda \cdot \operatorname{grad} f = \lambda \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \right), \qquad (2.46)$$

în care λ este un parametru pentru moment nedeterminat. Dacă legătura e bilaterală sensul forței de legătură $\bar{N}$ este arbitrar și el se va determina în urma rezolvării problemei mecanice a punctului (echilibru sau mișcare), de exemplu prin găsirea semnului lui λ care figurează în relația (2.46). Dacă însă legătura este unilaterală sensul real al reacțiunii $\bar{N}$ este întotdeauna contrar sensului deplasării interzise.

b) Legătura olonomă a unui punct pe o curbă de ecuații:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

se poate înlocui cu două forțe $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$, perpendiculare între ele, situate în planul normal la curbă în punctul studiat M(fig. 2.5) și arbitrare ca mărime și orientare (în planul normal).

Se poate proceda astfel deoarece dintre cele trei deplasări infinitezimale independente, una după direcția tangentei în M la curbă și celelalte două după două direcții perpendiculare din planul normal, ultimele două sînt interzise de legătură.

Pentru a lucra analitic observăm că rezultanta celor două forțe $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ este o forță $\bar{N}$ de mărime arbitrară și orientare arbitrară în planul normal la curbă. Această forță $\bar{N}$ poate fi descompusă după cele două direcții unice ale normalelor la cele două suprafețe $f = 0$ și $g = 0$ care definesc curba, aceste normale găsindu-se evident în planul normal la curbă în punctul M. Putem să scriem deci reacțiunea $\bar{N}$ sub forma:

$$\bar{N} = \lambda \cdot \operatorname{grad} f + \mu \cdot \operatorname{grad} g, \qquad (2.47)$$

în care λ și μ sînt doi parametri pentru moment nedeterminați.

Scanned with OKEN Scanner

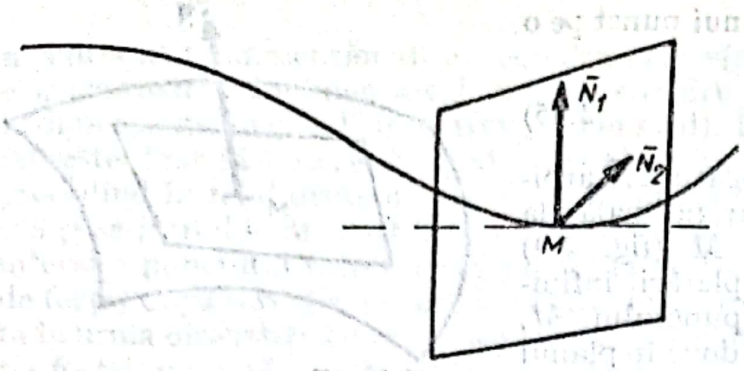


Fig. 2.5

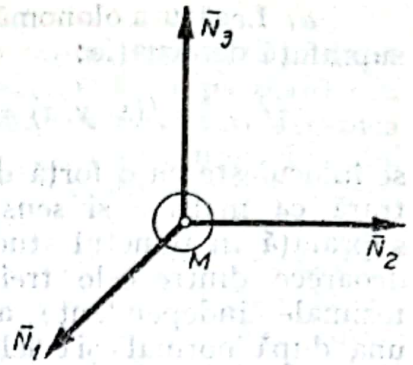


Fig. 2.6

c) Legătura olonomă a unui punct fixat în spațiu (articulația sferică) se înlocuiește prin trei forțe de reacțiune $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ și $\bar{N}_3$ (fig. 2.6), perpendiculare între ele și de mărimi și orientări arbitrare, deoarece toate cele trei deplasări infinitezimale independente ale punctului M sînt interzise de legătură.

d) Legătura unui punct M printr-un fir flexibil și inextensibil care are la celălalt capăt O fix (fig. 2.7) este echivalentă cu legătura unilaterală a punctului M pe o sferă de centru O și rază OM, în care caz forța de legătură este după raza sferei (normală la sferă) spre centrul O. Această forță de legătură $\bar{T}$ de mărime arbitrară, avînd direcția firului și sensul de la M spre celălalt capăt al firului (și care se mai numește și tensiunea din fir) se introduce la fel și în cazul cînd celălalt capăt O al firului nu mai este fix, ci mobil.

e) Legătura unui punct M printr-o bară MO rigidă și inextensibilă, avînd în O o articulație sferică (fig. 2.8) este echivalentă cu legătura bilaterală a lui M pe o sferă de centru O și rază OM. De aceea forța de legătură T (numită și tensiunea din bară) se introduce după direcția barei, avînd mărimea și sensul arbitrare. Cînd sensul real al tensiunii este cel din figură bara este întinsă, cînd tensiunea are sens contrar celui de pe figură, bara e comprimată. Cele spuse mai sus despre tensiunea $\bar{T}$ rămîn valabile și în cazul cînd punctul O nu mai e fix.

Legăturile analizate mai sus se înlocuiesc cu aceleași forțe de legătură și în cazul cînd punctul legat este un anume punct al unui rigid. În cele ce urmează vom analiza două legături specifice numai rigidului.

f) Articulația plană a rigidului (sau legătura de tip ax-lagăr) este o legătură care lasă rigidului două grade de libertate și anume translația în lungul și rotația în jurul unei axe fixe din spațiu. Fie această axă Oz, O fiind un punct arbitrar al axei și să considerăm și celelalte două axe Ox și Oy ale unui sistem de referință cartezian (fig. 2.9). În acest caz legătura se va înlocui

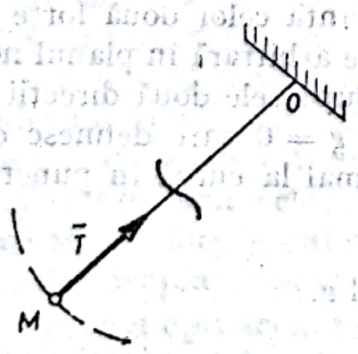


Fig. 2.7

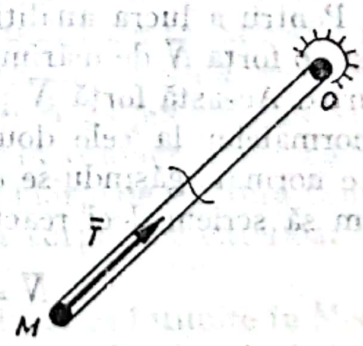


Fig. 2.8

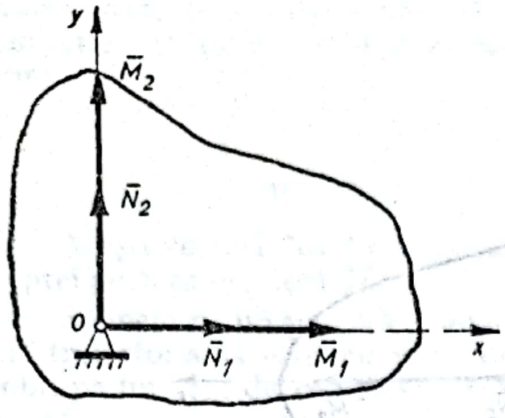


Fig. 2.9

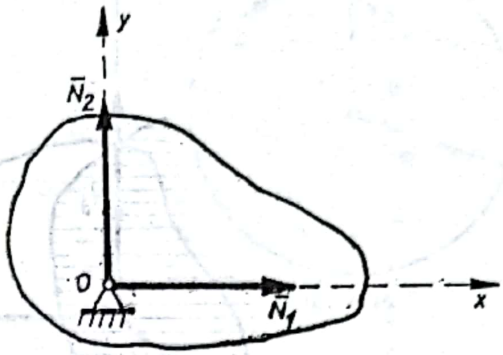


Fig. 2.10

cu două forțe de legătură $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ dirijate după axele Ox și Oy (axele translațiilor interzise) și cu două cupluri de legătură ale căror momente $\bar{M}_1$ și $\bar{M}_2$ sînt dirijate după axele Ox și Oy (care sînt și axele rotațiilor interzise). Mărimile și sensurile tuturor acestor forțe și momente sînt arbitrare (fig. 2.9).

Observație: În cazul unei legături de tip ax-lagăr a unui rigid, cînd lagărul este suficient de scurt, deoarece legătura se aplică doar punctelor unei vecinătăți restrînse a unui punct din rigid se poate vorbi despre o așa-zisă articulație plană a unui punct al rigidului. În acest caz, dacă notăm cu O punctul legat și cu Oz axa legăturii (axa lagărului), este evident faptul că legătura suprimă două din cele trei grade de libertate ale punctului (fig. 2.10) și anume deplasările lui de-a lungul axelor Ox și Oy. După aceste axe se vor lua deci forțele de legătură $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ de mărimi și sensuri arbitrare. Remarcăm acum faptul că un punct care are o articulație plană precum cea din figura 2.10, precum și o legătură bilaterală pe planul Oxy, sau pe o suprafață tangentă în O la acest plan, se comportă din punct de vedere mecanic exact ca și un punct care ar fi legat printr-o articulație sferică, în ambele cazuri punctul avînd zero grade de libertate. Acest lucru se poate urmări și prin echivalența sistemului de forțe de legătură în cele două situații. În practică, un arbore care are cele două fuse de la capete introduse în două lagăre scurte A și B (fig. 2.11) îl putem considera ca un rigid care are în A și B cîte o articulație plană, iar punctul A, de exemplu, îl putem considera ca fiind legat bilateral în planul Axy, datorită umerilor fusurilor A și B, care reprezintă fiecare cîte o legătură unilaterală. Ca urmare sistemul de forțe de legătură poate fi considerat cel din figura 2.11 cu observația că prin rezolvarea problemei meca-

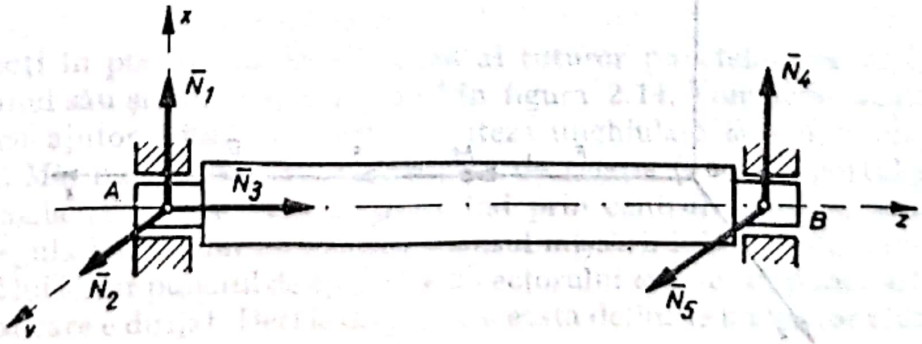


Fig. 2.11

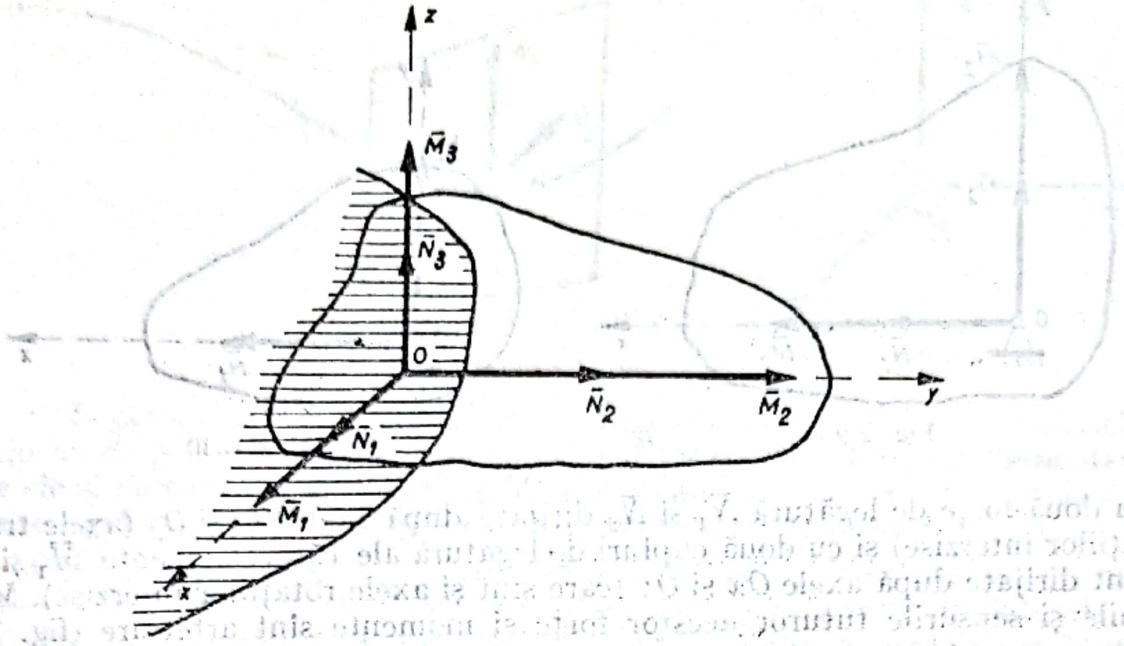


Fig. 2.12

nice (echilibru sau mişcare) a arborelui respectiv rezultă sensul real al forţei $\bar{N}_3$ şi odată cu aceasta putem preciza şi unde anume apare ea: cînd $\bar{N}_3$ e dirijat în sensul pozitiv al axei Oz ea apare în umărul lagărului A, iar cînd are sens contrar ea apare în umărul lagărului B.

g) Încastrarea este legătura unui rigid care are o porţiune finită a sa solidarizată cu un alt rigid fix. Este evident că această legătură suprimă toate cele şase grade de libertate ale rigidului. În concluzie o astfel de legătură se înlocuieşte cu cîte o forţă de legătură şi cîte un moment de legătură după fiecare axă a unui triedru cartezian $Oxyz$, a cărui origine O se ia arbitrar, de exemplu într-un punct al porţiunii încastrate (fig. 2.12).

2.3.3. **Viteza şi acceleraţia la mişcarea rectilinie şi circulară a punctului material.** Spunem că un punct are o mişcare rectilinie cînd traiectoria lui este o dreaptă. Fie Ox o axă dirijată după direcţia acestei drepte, O fiind un punct arbitrar al ei (fig. 2.13). Vectorul de poziţie $\overline{OM} = \bar{r}$, al punctului M se scrie analitic:

$$\bar{r}(x, 0, 0), \tag{2.48}$$

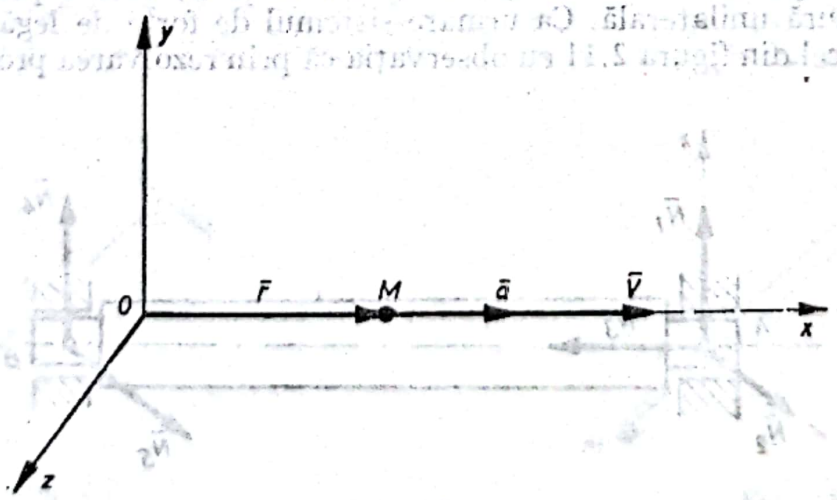


Fig. 2.13

în care $x = x(t)$ este abscisa punctului mobil M. În acest caz, conform relațiilor (1.165) și (1.166) vom scrie analitic viteza și accelerația lui M sub forma:

$$\bar{V}(\dot{x},\ 0,\ 0)\,; \tag{2.49}$$

$$\bar{a}(\ddot{x},\ 0,\ 0), \tag{2.50}$$

Acești vectori sînt dirijați deci după direcția dreptei pe care se mișcă M.

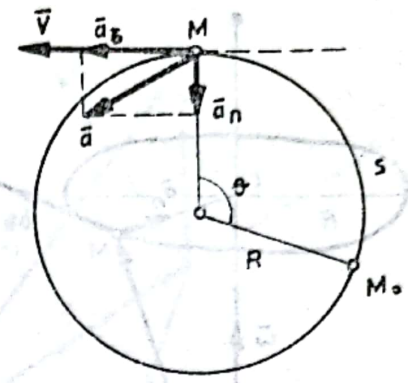


Fig. 2.14

Spunem că un punct are o mișcare circulară cînd traiectoria sa este un cerc. Fie punctul M mobil pe un cerc de centru O și rază R (fig. 2.14). Fie M_0 un punct arbitrar fix pe cerc, ales ca origine de măsurare a arcelor. Se poate scrie atunci relația între arcul $s(t)$ și unghiul la centru corespunzător $\theta(t)$:

$$s = R\theta \tag{2.51}$$

Scriind că raza de curbură a cercului în orice punct al său este egală cu raza cercului:

$$\rho = R, \tag{2.52}$$

și notînd derivatele în raport cu timpul:

$$\dot{\theta} = \omega\,; \tag{2.53}$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \varepsilon, \tag{2.54}$$

din relațiile (1.175) și (1.178) deducem expresiile vitezei și accelerației punctului M:

$$\bar{V} = \omega R\bar{\tau}\,; \tag{2.55}$$

$$\bar{a} = \varepsilon R\bar{\tau} + \omega^2 R\bar{n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \tag{2.56}$$

în care $\bar{\tau}$ și $\bar{n}$ sînt versorii tangentei și normalei principale.

Vectorii:

$$\begin{cases} \bar{V} = \omega R\bar{\tau} \\ \bar{a}_\tau = \varepsilon R\bar{\tau} \\ \bar{a}_n = \omega^2 R\bar{n} \end{cases} \tag{2.57}$$

se află toți în planul osculator comun al tuturor punctelor cercului, care e chiar planul său și direcțiile lor se văd în figura 2.14. Vom scrie acum acești vectori cu ajutorul unui nou vector, viteza unghiulară $\bar{\omega}$, definit după cum urmează. Mărimea vectorului $\bar{\omega}$ este dată de relația (2.53), suportul său este axa normală la planul cercului și trecînd prin centrul acestuia, sensul este dat de regula burghiului care rotit în sensul mișcării lui M pe cerc înaintează în sensul lui $\bar{\omega}$, iar punctul de aplicație al vectorului $\bar{\omega}$ este un punct arbitrar al axei după care e dirijat. Deci $\bar{\omega}$ este prin această definiție un vector alunecător.

Scanned with OKEN Scanner

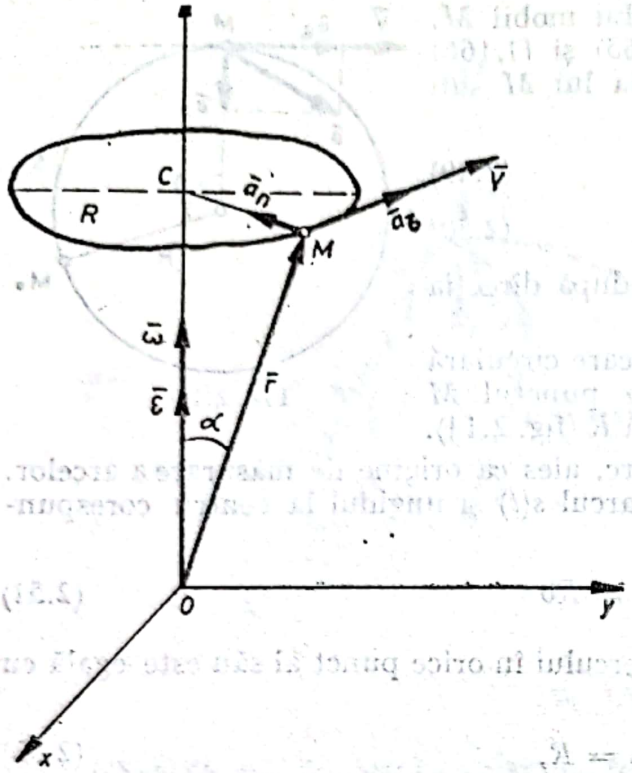


Fig. 2.15

Fie un sistem de referință cartezian $Oxyz$ (fig. 2.15).

Fie un cerc de rază R, aflat într-un plan perpendicular pe axa Oz și având centrul într-un punct C de pe axă. Fie punctul M mobil pe acest cerc și fie $\bar{r}$ vectorul său de poziție față de originea O a sistemului de referință. În M construim cei trei vectori $\bar{V}$, $\bar{a}_\tau$ și $\bar{a}_n$. Construim, cu definiția precedentă, vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$, având punctul de aplicație în O de exemplu.

Deci $\bar{\omega}$ se scrie analitic:

$$\bar{\omega}(0,\ 0,\ \omega). \tag{2.58}$$

Vectorul:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} \tag{2.59}$$

îl numim vectorul accelerație unghiulară a lui M și el se scrie analitic:

$$\bar{\varepsilon}(0,\ 0,\ \varepsilon). \tag{2.60}$$

Plecînd de la observația că:

$$r \sin \alpha = R, \tag{2.61}$$

se poate verifica simplu, cu ajutorul definiției produsului vectorial, că vectorii $\bar{V}$, $\bar{a}_\tau$ și $\bar{a}_n$ care sînt dați analitic de relațiile (2.57) se pot scrie sub forma:

$$\begin{cases} \bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \\ \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \end{cases} \tag{2.62}$$

Deci viteza și accelerația punctului aflat în mișcare circulară se pot scrie:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}; \tag{2.63}$$

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \tag{2.64}$$

în care $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ sînt viteza și respectiv accelerația unghiulară a punctului și sînt doi vectori dirijați după axa de rotație, iar $\bar{r}$ vectorul de poziție al punctului mobil față de un punct al acestei axe.

2.3.4. Viteza și accelerația unui punct material aflat în mișcare relativă. Numim mișcare absolută a unui punct mișcarea sa față de un reper considerat fix. Numim mișcare relativă a unui punct mișcarea sa față de un reper mobil. Numim mișcare de transport a unui punct mișcarea sa față de un reper considerat fix, atunci cînd punctul este solidar cu un reper mobil (sau altfel spus atunci cînd mișcarea relativă a punctului e inexistentă). Este clar atunci că suprapunerea celor două mișcări, de transport și relativă, dă mișcarea absolută a punctului material.

Scanned with OKEN Scanner

Fie un reper cartezian fix (T_1): $O_1x_1y_1z_1$ şi un reper cartezian mobil (T): $Oxyz$ şi fie punctul material M mobil faţă de ambele repere (fig. 2.16). Vectorii de poziţie ai lui M faţă de originile celor două repere (T_1) şi (T), îi vom nota respectiv prin $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}$, iar vectorul de poziţie al originii mobile O faţă de originea fixă O_1 prin $\bar{r}_0$. Se presupune cunoscută mişcarea punctului M faţă de sistemul mobil (T), mişcarea relativă, şi mişcarea reperului mobil (T) faţă de reperul fix (T_1), care ne dă mişcarea de transport şi se cere determinarea elementelor mişcării absolute a punctului M (mişcarea lui faţă de reperul fix).

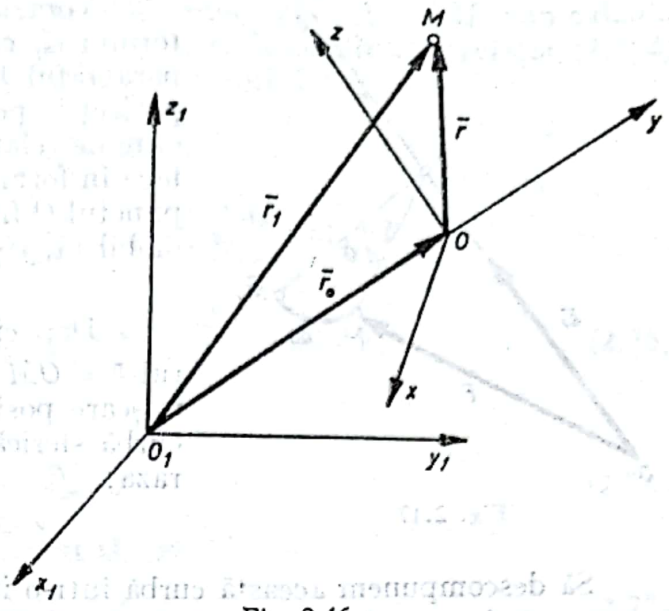


Fig. 2.16

Traiectoria absolută a punctului M se poate obţine sub forma ecuaţiilor parametrice, prin proiectarea pe axele triedrului fix a ecuaţiei vectoriale evidente:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}. \tag{2.65}$$

Viteza absolută a punctului M este derivata absolută în raport cu timpul a vectorului de poziţie $\bar{r}_1$. Deci:

$$\bar{V}_M = \dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}}. \tag{2.66}$$

Vectorul $\dot{\bar{r}}_0$ este evident viteza absolută $\bar{V}_0$ a punctului O, iar derivata $\dot{\bar{r}}$ se calculează cu formula (1.57), astfel încît obţinem:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_0 + \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.67}$$

Derivata relativă:

$$\bar{V}_r = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \tag{2.68}$$

în care x, y şi z sînt proiecţiile lui $\bar{r}$ pe axele reperului mobil (T), se numeşte viteza relativă a punctului M. Ceilalţi doi termeni din relaţia (2.67) formează viteza de transport:

$$\bar{V}_t = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.69}$$

Deci vom scrie viteza absolută a lui M sub forma:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_t + \bar{V}_r = (\bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{V}_r, \tag{2.70}$$

în care cele două componente sînt date de relaţiile (2.68) şi (2.69).

Scanned with OKEN Scanner

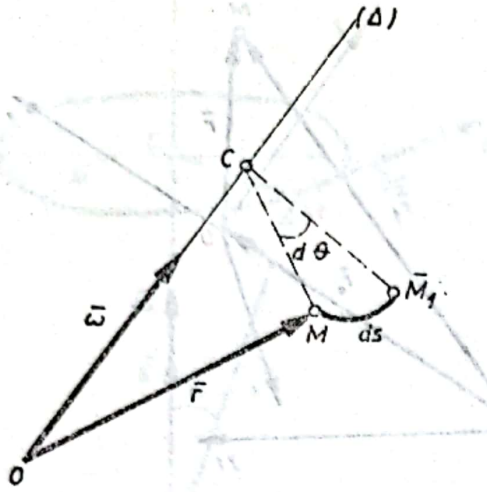


Fig. 2.17

Vom lămuri acum și semnificația vectorului $\bar{\omega}$, care, așa cum a fost introdus în paragraful 1.2.3, este un vector ale cărui proiecții pe axele triedrului mobil sînt date de relațiile (1.55). Pentru aceasta vom face în formula (2.70) $\bar{V}_0 = 0$ și $\bar{V}_r = 0$, deci punctul O fix și punctul M solidar cu reperul mobil (x, y și z constante). Rezultă imediat:

$$\bar{V}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.71}$$

Dar cînd punctul O e fix și vectorul $\bar{r} = \overline{OM}$ e de mărime constantă, singura mișcare posibilă a punctului M este pe o curbă sferică, sfera avînd centrul fix O și raza:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{ct.} \tag{2.72}$$

Să descompunem această curbă într-o infinitate de arce elementare ds, fiecare avînd centrul de curbură C (fig. 2.17).

Să arătăm că dreapta (Δ) care unește punctul C cu punctul O este mereu normală la planul osculator al curbei sferice (planul care conține arcul elementar ds). Într-adevăr, arcul ds fiind conținut într-un plan (planul osculator al curbei în M) și aflîndu-se în același timp și pe sfera de rază r și centru O se găsește la intersecția acelui plan cu sfera, deci face parte dintr-un cerc de pe sferă. Centrul de curbură C este obligatoriu centrul acestui cerc și se știe că dreapta (Δ) care unește centrul C al unui cerc de pe sferă cu centrul O al sferei este normală la planul acelui cerc.

Rezultă în acest caz că dreapta (Δ) este perpendiculară pe dreptele CM și CM_1 din acest plan. Mișcarea punctului nostru de la M la M_1 poate fi deci asimilată cu o mișcare circulară infinitezimală pe arcul de cerc ds, de centru C, într-un timp dt, cu viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.73}$$

Vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ se va lua după axa (Δ), normala la planul arcului de cerc ds, conform regulii burghiului. Viteza punctului M se poate scrie aplicînd prima formulă din grupul (2.62) sub forma:

$$\bar{V}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.74}$$

Particularitatea acestei formule constă în aceea că viteza unghiulară $\bar{\omega}$ e un vector dirijat după dreapta mobilă ce unește punctul O cu succesiunea centrelor de curbură C ale curbei sferice descrise de M cînd O e fix și M solidar cu triedrul (T). În acest caz vectorul $\bar{\omega}$ se numește viteza unghiulară instantanee. Comparînd acum formulele (2.71) cu (2.74) rezultă că vectorul $\bar{\omega}$ din relația (2.70) reprezintă viteza unghiulară instantanee a punctului M în cadrul mișcării sale de transport.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a găsi expresia acceleraţiei absolute a punctului M vom calcula derivata absolută în raport cu timpul a relaţiei (2.70) utilizînd şi relaţia, (1.162) în care cunoaştem acum semnificaţia vectorului $\bar{\omega}$:

$$\bar{a}_M = \dot{\bar{V}}_M = \dot{\bar{V}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} + \dot{\bar{V}}_r =$$

$$= \dot{\bar{V}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r} \right) + \frac{d\bar{V}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{V}_r =$$

$$= \dot{\bar{V}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{V}_r}{dt} + 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r. \tag{2.75}$$

Dar:

$$\dot{\bar{V}}_0 = \bar{a}_0 \tag{2.76}$$

este acceleraţia absolută a punctului O, iar:

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon} \tag{2.77}$$

o vom numi acceleraţia unghiulară instantanee la mişcarea de transport a punctului M. Remarcăm faptul că $\bar{\varepsilon}$ nu este în general coliniar cu $\bar{\omega}$, deoarece $\bar{\omega}$ este un vector variabil atît ca mărime cît şi ca direcţie. De asemenea se vede că derivata absolută $\dot{\bar{\omega}}$ este întotdeauna egală cu derivata relativă a lui $\bar{\omega}$, deoarece:

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k}. \tag{2.78}$$

Deci:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k}. \tag{2.79}$$

Derivata relativă:

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{V}_r}{dt} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}, \tag{2.80}$$

se numeşte acceleraţia relativă a punctului M, iar ultimul termen al relaţiei (2.75):

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r \tag{2.81}$$

poartă numele de acceleraţie Coriolis (sau complementară).

Cu aceste specificaţii, vom scrie condensat viteza absolută şi acceleraţia absolută la mişcarea relativă a punctului M sub forma:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_t + \bar{V}_r; \tag{2.82}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \tag{2.83}$$

în care:

$$\bar{V}_t = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}; \tag{2.84}$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}); \tag{2.85}$$

$$\bar{V}_r = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \tag{2.86}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}; \tag{2.87}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r. \tag{2.88}$$

Relațiile (2.84) — (2.88) reprezintă în ordine: viteza și accelerația de transport, viteza și accelerația relativă și accelerația Coriolis.

În aceste relații avem:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \tag{2.89}$$

$$\bar{V}_0 = \dot{\bar{r}}_0; \tag{2.90}$$

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{V}}_0 + \ddot{\bar{r}}_0; \tag{2.91}$$

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k} = (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k})\bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i})\bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j})\bar{k}; \tag{2.92}$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_x\bar{i} + \dot{\omega}_y\bar{j} + \dot{\omega}_z\bar{k}. \tag{2.93}$$

Relațiile (2.89) — (2.93) reprezintă în ordine: vectorul de poziție al lui M față de originea mobilă O, viteza absolută și accelerația absolută a originii mobile O, viteza și accelerația unghiulară instantanee la mișcarea de transport a punctului M.

2.3.5. Distribuția de viteze și accelerații la mișcarea generală a rigidului. Fie un rigid într-o mișcare generală și fie un sistem de referință cartezian (T): $Oxyz$ solidar legat cu rigidul și având originea O într-un punct din rigid a cărui mișcare o cunoaștem (fig. 2.18). Fie un sistem de referință cartezian (T_1): $O_1\ x_1\ y_1\ z_1$ considerat fix și fie M un anume punct al rigidului, specificat prin vectorul său de poziție $\bar{r}$ față de originea mobilă O. Triedrul (T) fiind

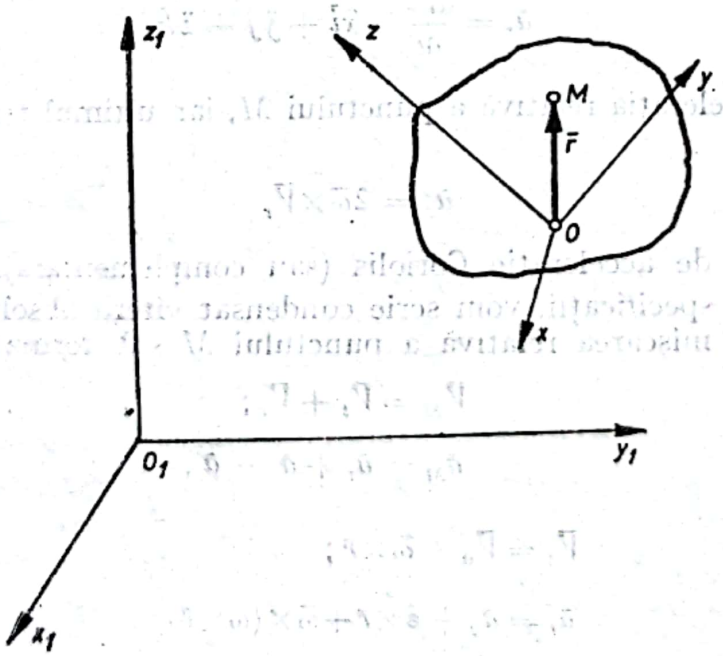


Fig. 2.18

ataşat solidar rigidului este clar că vectorul $\bar{r}$ are proiecţii constante pe cele trei axe ale acestui triedru, adică:

$$\begin{cases} x = \text{ct} \\ y = \text{ct} \\ z = \text{ct} \end{cases} \quad \bar{r}(x, y, z). \tag{2.94}$$

Punctul M poate fi considerat într-o mişcare relativă faţă de (T), mişcarea lui absolută fiind faţă de (T_1). În consecinţă, componentele vitezei şi acceleraţiei absolute din relaţiile (2.82) şi (2.83) le vom calcula cu relaţiile (2.84) — (2.88) cu particularizarea (2.94). Rezultă:

$$\bar{V}_t = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}; \tag{2.95}$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}); \tag{2.96}$$

$$\bar{V}_r = 0; \tag{2.97}$$

$$\bar{a}_r = 0; \tag{2.98}$$

$$\bar{a}_c = 0, \tag{2.99}$$

şi în consecinţă putem rezuma distribuţia de viteze şi acceleraţii într-un rigid prin relaţiile:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}; \tag{2.100}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \tag{2.101}$$

care sînt tocmai viteza şi acceleraţia de transport din cazul precedent, ceea ce apare ca fiind foarte normal, deoarece în cazul de faţă mişcarea relativă a punctului M e inexistentă.

Vom face acum două observaţii importante.

— Prima este faptul că vectorul viteză unghiulară instantanee este la un moment dat acelaşi pentru toate punctele rigidului. Suportul şi sensul lui $\bar{\omega}$ sînt unice la un moment dat deoarece într-un interval de timp elementar dt rigidul se poate roti doar în jurul unei anume drepte (Δ) şi într-un anume sens.

Pe de altă parte, perpendicularele coborîte din două puncte arbitrare ale rigidului pe axa instantanee de rotaţie (Δ), fiind, două drepte ale rigidului, se rotesc într-un acelaşi interval de timp dt cu acelaşi unghi $d\theta$ (fig. 2.17) şi deci mărimea vitezei unghiulare dată de relaţia (2.73) va fi aceeaşi pentru cele două puncte arbitrare considerate. Deci vectorul $\bar{\omega}$ este o mărime care caracterizează mişcarea întregului rigid.

— A doua observaţie este faptul că vectorul $\bar{\omega}$ nu are în general ca suport o aceeaşi dreaptă a rigidului (evident mobilă în spaţiu), ci mereu altă dreaptă a rigidului (trecînd prin O) devine axă de rotaţie instantanee şi deci suport pentru $\bar{\omega}$.

2.3.6. **Momente de inerţie mecanice.** În problemele de dinamică apar frecvent anumite mărimi care caracterizează proprietăţile inerţiale ale rigidelor, mărimi ale căror dimensiuni sînt „masă" × „distanţă la pătrat", şi care se numesc momente de inerţie mecanice. În acest paragraf vom defini şi studia aceste mărimi.

Scanned with OKEN Scanner

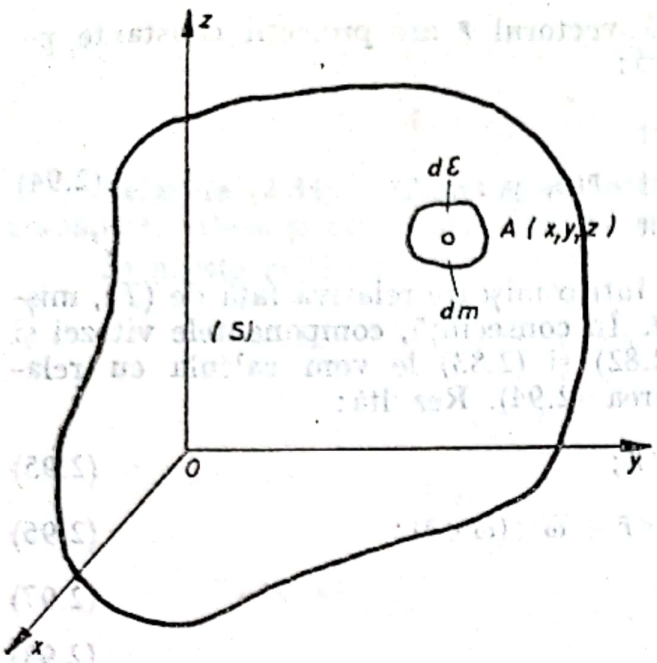


Fig. 2.19

Fie un sistem de referinţă cartezian $Oxyz$ (fig. 2.19) şi fie un rigid (S) ale cărui dimensiuni şi distribuţie a masei se cunosc.

Sistemul $Oxyz$ se ia întotdeauna solidar ataşat rigidului astfel încît poziţiile lor relative să se păstreze în timp şi momentele de inerţie definite mai jos să fie constante în timp. Fie $A(x, y, z)$ un punct arbitrar al rigidului şi fie $d\varepsilon$ o vecinătate a lui A, vecinătate care poate fi elementul de volum dV, de suprafaţă $d\sigma$ sau de arc ds, după cum rigidul nostru este tri-, bi- sau unidimensional. Masa vecinătăţii $d\varepsilon$ o vom nota prin dm. Avem evident:

$$dm = \begin{cases} \rho\, dV \\ \rho'\, d\sigma \\ \rho''\, ds \end{cases} \quad \text{sau} \quad (dm = \rho \cdot d\varepsilon) \tag{2.102}$$

respectiv în cele trei cazuri mai sus enumerate. Cantităţile ρ, ρ' sau ρ'' sînt densitatea de volum, de suprafaţă sau de linie a respectivelor corpuri. Cînd densitatea este constantă (nu este funcţie de x,y,z) corpul se numeşte omogen, iar cînd densitatea este funcţie de cele trei coordonate x,y,z ale punctului A, corpul se numeşte neomogen şi într-un asemenea caz se presupune cunoscută funcţia $\rho(x,y,z)$, sau $\rho'(x,y,z)$, sau $\rho''(x, y,z)$.

Cu acestea vom defini momentele de inerţie mecanice axiale ale rigidului faţă de cele trei axe în felul următor:

$$J_{xx} = (s)\int (y^2+z^2)\, dm; \tag{2.103}$$

$$J_{yy} = (s)\int (z^2+x^2)\, dm; \tag{1.104}$$

$$J_{zz} = (s)\int (x^2+y^2)\, dm. \tag{2.105}$$

Raţiunea indicelui dublu o vom vedea ulterior. Se observă că parantezele din aceste trei relaţii reprezintă pătratele distanţelor de la punctul A la cele trei axe.

Vom defini momentele de inerţie mecanice centrifugale ale rigidului faţă de cele trei perechi de axe în felul următor:

$$J_{xy} = \int_{(S)} xy\, dm; \tag{2.106}$$

$$J_{yz} = \int_{(S)} yz\, dm; \tag{2.107}$$

$$J_{zx} = \int_{(S)} zx\, dm. \tag{1.108}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste șase mărimi joacă un rol esențial în studiul dinamicii, pe lîngă ele putînd fi definite încă patru momente de inerție cu rol cu totul auxiliar și care pot fi scrise cu ajutorul primelor șase. Aceste mărimi sînt:

— momentul de inerție mecanic polar față de polul O:

$$J_0 = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dm; \tag{2.109}$$

— momentele de inerție mecanice planare față de cele trei plane ale triedrului $Oxyz$:

$$J_{xOy} = \int_{(S)} z^2\, dm; \tag{2.110}$$

$$J_{yOz} = \int_{(S)} x^2\, dm; \tag{2.111}$$

$$J_{zOx} = \int_{(S)} y^2\, dm. \tag{2.112}$$

Toate aceste zece momente de inerție se calculează ușor înlocuind elementul de masă dm printr-una din relațiile (2.102), după caz, și astfel integralele devin fie integrale de volum, fie de suprafață, fie curbilinii.

În cazul unui sistem discret de puncte materiale $A_i(x_i, y_i, z_i)$ de mase $m_i (i = 1, 2, ..., n)$ momentele de inerție mecanice se calculează tot cu relațiile de mai sus, în care se face înlocuirea densității $\rho(x,y,z)$ prin relația (1.330) în care $\rho_c(x,y,z) = 0$. În cazul unui corp continuu cu mase adiționale concentrate se utilizează întreaga relație (1.330). Utilizînd proprietatea de filtrare a distribuției lui *Dirac*, în cazul unui sistem discret de puncte materiale momentele de inerție mecanice se scriu:

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2)\, m_i; \tag{2.113}$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (z_i^2 + x_i^2)\, m_i; \tag{2.114}$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\, m_i; \tag{2.115}$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i; \tag{2.116}$$

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i; \tag{2.117}$$

$$J_{zx} = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i m_i; \tag{2.118}$$

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\, m_i; \tag{2.119}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$J_{xOy} = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 m_i; \tag{2.120}$$

$$J_{yOz} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i; \tag{2.121}$$

$$J_{zOx} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i. \tag{2.122}$$

Se poate vedea ușor că momentele de inerție auxiliare se pot scrie:

$$J_0 = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}); \tag{2.123}$$

$$J_{xOy} = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy} - J_{zz}); \tag{2.124}$$

$$J_{yOz} = \frac{1}{2}(J_{yy} + J_{zz} - J_{xx}); \tag{2.125}$$

$$J_{zOx} = \frac{1}{2}(J_{zz} + J_{xx} - J_{yy}), \tag{2.126}$$

și că între primele șase momente de inerție (cele axiale și cele centrifugale) nu se poate scrie nici o relație de legătură, deci ele sînt independente.

Oricare dintre cele zece momente de inerție mecanice, prin împărțire la densitatea presupusă constantă a corpului respectiv ne dă ceea ce numim moment de inerție geometric al corpului. Pe lîngă rolul lor în calculul momentelor de inerție mecanice, momentele de inerție geometrice au un rol foarte important și în Rezistența materialelor.

Cu cele șase momente de inerție independente (cele trei axiale și cele trei centrifugale) se poate forma o matrice:

$$[J]_0 = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

care se numește matricea de inerție a sistemului de puncte, respectiv și al cărei rol în Mecanică îl vom vedea ulterior. Rațiunea folosirii indicilor dubli la momentele de inerție axiale este de a scrie în mod unitar această matrice.

2.3.7. **Variația momentelor de inerție la translația și la rotația axelor. Formulele lui Steiner. Elipsoidul de inerție.** În Mecanică, la rezolvarea diferitelor probleme teoretice sau practice, este necesară cunoașterea matricei de inerție a unui sistem de puncte față de un anume sistem de referință. În acest scop, pentru ușurarea calculelor, au fost întocmite (în diferite cursuri, culegeri de probleme sau memoratoare*) tabele cu momente de inerție ale diferitelor corpuri (în general omogene) întîlnite mai des în aplicații. Sistemul de referință față de care s-au calculat aceste momente de inerție este un sistem preferențial, și anume, un sistem cu originea în centrul maselor C al

* De exemplu: *Manualul inginerului*, vol. II, București, Editura tehnică, 1966, pag. 40–49.

Scanned with OKEN Scanner

corpurilor respective. Un astfel de sistem de referinţă se numeşte central, iar momentele de inerţie faţă de axele sale, momente centrale de inerţie. Pentru a putea utiliza un astfel de tabel în găsirea momentelor de inerţie faţă de un sistem de axe oarecare (necentral) trebuie să rezolvăm, după cum ne sugerează figura 2.20, problema variaţiei momentelor de inerţie la translaţia axelor: $(\Delta_1)||(\Delta)$ şi la rotaţia axelor: (Δ_2) concurentă cu (Δ_1). Acesta este scopul paragrafului de faţă.

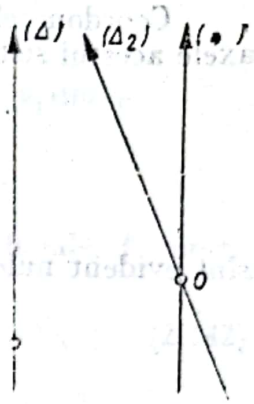


Fig. 2.20

Fie (S) un sistem de puncte materiale şi A un punct arbitrar al sistemului (fig. 2.21).

Fie C centrul de masă al sistemului şi fie $Cx_1y_1z_1$ un sistem central de referinţă.

Fie un al doilea sistem de referinţă $Oxyz$ cu axele paralele cu ale primului.

Fie x_1, y_1, z_1 coordonatele lui A în sistemul central şi fie x, y, z coordonatele aceluiaşi punct în sistemul necentral. Coordonatele lui C în sistemul $Oxyz$ se obţin proiectînd pe axe relaţia (1.120) scrisă sub forma:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(S)} \bar{r}\, dm}{\int_{(S)} dm}, \tag{2.128}$$

obţinînd deci:

$$x_c = \frac{\int_{(S)} x\, dm}{\int_{(S)} dm}; \tag{2.129}$$

$$y_c = \frac{\int_{(S)} y\, dm}{\int_{(S)} dm}; \tag{2.130}$$

$$z_c = \frac{\int_{(S)} z\, dm}{\int_{(S)} dm}. \tag{2.131}$$

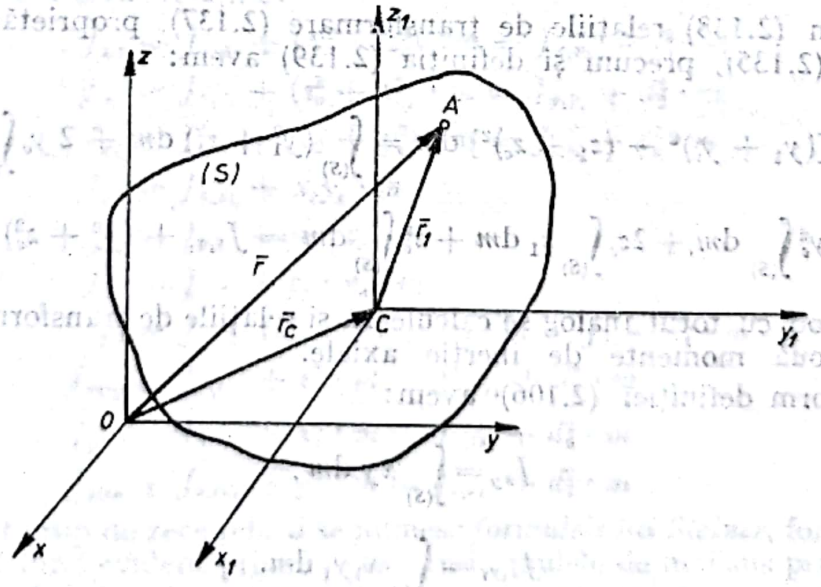


Fig. 2.21

Coordonatele lui C în sistemul $Cx_1y_1z_1$, calculate prin proiectarea pe axele acestui sistem a ecuației:

$$\bar{r}_{1c} = \frac{\int_{(S)} \bar{r}_1 \cdot dm}{\int_{(S)} dm}, \tag{2.132}$$

sînt evident nule și deci putem scrie relațiile:

$$\int_{(S)} x_1 \, dm = 0; \tag{2.133}$$

$$\int_{(S)} y_1 \, dm = 0; \tag{2.134}$$

$$\int_{(S)} z_1 \, dm = 0. \tag{2.135}$$

Prin proiectarea pe axele sistemului $Oxyz$ a ecuației:

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \bar{r}_1 \tag{2.136}$$

se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} x = x_c + x_1 \\ y = y_c + y_1 \\ z = z_c + z_1. \end{cases} \tag{2.137}$$

Conform definiției (2.103) avem:

$$J_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) \, dm; \tag{2.138}$$

$$J_{x_1x_1} = \int_{(S)} (y_1^2 + z_1^2) \, dm. \tag{2.139}$$

Utilizînd în (2.138) relațiile de transformare (2.137), proprietățile (2.133), (2.134) și (2.135), precum și definiția (2.139) avem:

$$J_{xx} = \int_{(S)} [(y_1 + y_c)^2 + (z_1 + z_c)^2] \, dm = \int_{(S)} (y_1^2 + z_1^2) \, dm + 2 y_c \int_{(S)} y_1 \, dm +$$

$$+ y_c^2 \int_{(S)} dm + 2 z_c \int_{(S)} z_1 \, dm + z_c^2 \int_{(S)} dm = J_{x_1x_1} + (y_c^2 + z_c^2) \cdot m.$$

În mod cu totul analog se calculează și relațiile de transformare pentru celelalte două momente de inerție axiale.

Conform definiției (2.106) avem:

$$J_{xy} = \int_{(S)} xy \, dm; \tag{2.140}$$

$$J_{x_1y_1} = \int_{(S)} x_1 y_1 \, dm. \tag{2.141}$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd la fel ca mai sus putem scrie:

$$J_{xy} = \int_{(S)} (x_1 + x_c)(y_1 + y_c)\,dm = \int_{(S)} x_1 y_1\,dm + x_c \int_{(S)} y_1\,dm +$$
$$+ y_c \int_{(S)} x_1\,dm + x_c y_c \int_{(S)} dm = J_{x_1 y_1} + x_c y_c m,$$

şi analog pentru celelalte două momente de inerţie centrifugale. Conform definiţiei (2.109) avem:

$$J_0 = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dm; \tag{2.142}$$

$$J_c = \int_{(S)} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,dm, \tag{2.143}$$

şi putem scrie:

$$J_0 = \int_{(S)} [(x_1 + x_c)^2 + (y_1 + y_c)^2 + (z_1 + z_c)^2]\,dm = \int_{(S)} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,dm +$$
$$+ 2x_c \int_{(S)} x_1\,dm + 2y_c \int_{(S)} y_1\,dm + 2z_c \int_{(S)} z_1\,dm + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2) \int_{(S)} dm =$$
$$= J_c + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2) \cdot m.$$

Conform definiţiei (2.110) avem:

$$J_{xOy} = \int_{(S)} z^2\,dm, \tag{2.144}$$

$$J_{x_1 C y_1} = \int_{(S)} z_1^2\,dm, \tag{2.145}$$

şi putem scrie:

$$J_{xOy} = \int_{(S)} (z_1 + z_c)^2\,dm = \int_{(S)} z_1^2\,dm + 2z_c \int_{(S)} z_1\,dm + z_c^2 \int_{(S)} dm =$$
$$= J_{x_1 C y_1} + z_c^2 \cdot m,$$

şi analog pentru celelalte două momente de inerţie planare. Rezumînd aceste rezultate vom scrie relaţiile:

$$J_{xx} = J_{x_1 x_1} + (y_c^2 + z_c^2) \cdot m = J_{x_1 x_1} + d_1^2 \cdot m \tag{2.146}$$
$$J_{yy} = J_{y_1 y_1} + (z_c^2 + x_c^2) \cdot m = J_{y_1 y_1} + d_2^2 \cdot m \tag{2.147}$$
$$J_{zz} + J_{z_1 z_1} + (x_c^2 + y_c^2) \cdot m = J_{z_1 z_1} + d_3^2 \cdot m \tag{2.148}$$
$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + x_c y_c \cdot m \tag{2.149}$$
$$J_{yz} = J_{y_1 z_1} + y_c \cdot z_c \cdot m \tag{2.150}$$
$$J_{zx} = J_{z_1 x_1} + z_c \cdot x_c \cdot m \tag{2.151}$$
$$J_0 = J_c + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2) \cdot m = J_c + d_4^2 \cdot m \tag{2.152}$$
$$J_{xOy} = J_{x_1 C y_1} + z_c^2 \cdot m = J_{x_1 C y_1} + d_5^2 \cdot m \tag{2.153}$$
$$J_{yOz} = J_{y_1 C z_1} + x_c^2 \cdot m = J_{y_1 C z_1} + d_6^2 \cdot m \tag{2.154}$$
$$J_{zOx} + J_{z_1 C x_1} + y_c^2 \cdot m = J_{z_1 C x_1} + d_7^2 \cdot m \tag{2.155}$$

Acest grup de zece relaţii se numesc *formulele lui Steiner*, formulele folosite curent fiind evident primele şase. În formulele de mai sus primii termeni din membrul doi sînt momentele de inerţie centrale, m este masa totală a

Scanned with OKEN Scanner

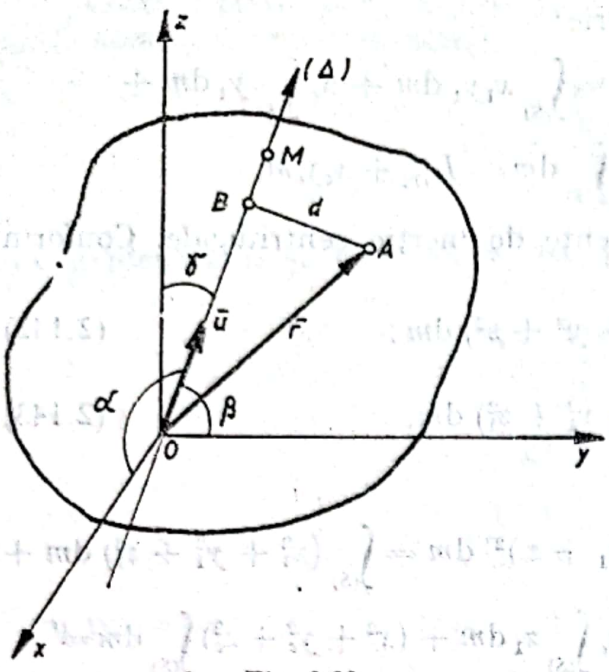


Fig. 2.22

sistemului de puncte, d_1, d_2, d_3 sînt distanţele dintre axele celor două triedre, d_4 este distanţa dintre originele acestora, iar d_5, d_6, d_7 sînt distanţele între planele de coordonate ale celor două triedre.

Fie acum un sistem (S) de puncte materiale, $Oxyz$ un sistem de referinţă cartezian şi (Δ) o axă trecînd prin originea O (fig. 2.22) al cărei versor este $\bar{u}$. Proiecţiile lui $\bar{u}$ pe axe sînt cosinuşii directori ai axei (Δ):

$$\bar{u} = \bar{u}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) \tag{2.156}$$

şi între ei avem relaţia evidentă:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.157}$$

Fie A un punct arbitrar al sistemului $\bar{r}\ (x,\ y,\ z)$ vectorul său de poziţie şi B piciorul perpendicularei coborîte din A pe (Δ). Observînd că paranteza din relaţia (2.103) reprezintă pătratul distanţei de la punctul A la axa Ox vom scrie momentul de inerţie axial al sistemului în raport cu axa (Δ) sub forma:

$$J_{\Delta\Delta} = \int_{(S)} d^2 \cdot dm, \tag{2.158}$$

d fiind distanţa AB de la A la axa (Δ). Însă:

$$d^2 = OA^2 - OB^2 = r^2 - (\bar{r}\cdot\bar{u})^2 =$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2. \tag{2.159}$$

Înlocuind relaţia (2.159) în (2.158) şi utilizînd relaţia (2.157) şi definiţiile (2.103) — (2.108) obţinem succesiv:

$$J_{\Delta\Delta} = \int_{(S)} [(x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) -$$

$$- (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2]\, dm = \cos^2\alpha \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm +$$

$$+ \cos^2\beta \int_{(S)} (z^2 + x^2)\, dm + \cos^2\gamma \int_{(S)} (x^2 + y^2)\, dm - 2\cos\alpha\cos\beta \int_{(S)} xy\, dm -$$

$$- 2\cos\beta\cos\gamma \int_{(S)} yz\, dm - 2\cos\gamma\cos\alpha \int_{(S)} zx\, dm,$$

şi deci:

$$J_{\Delta\Delta} = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\cos^2\beta + J_{zz}\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$

$$- 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \tag{2.160}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care axa (Δ) se află în planul Oxy, avem: $\gamma = 90°$; $\alpha + \beta = 90°$ şi deci $\cos\beta = \sin\alpha$, iar formula (2.160) ia forma particulară:

$$J_{\Delta\Delta} = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha. \tag{2.161}$$

Vom studia acum o ultimă problemă, aceea a găsirii axelor din spaţiu faţă de care momentul de inerţie axial al sistemului de puncte are valori extreme şi a găsirii acestor valori extremale. Pentru aceasta vom face uz de următorul artificiu. Vom lua pe axa (Δ) din figura 2.22 un punct M la distanţa OM de origine dată de relaţia:

$$OM = \frac{C}{\sqrt{J_{\Delta\Delta}}}, \tag{2.162}$$

în care C este o constantă oarecare, iar $J_{\Delta\Delta}$ e dat de relaţia (2.160). Vom căuta locul geometric al lui M cînd (Δ) se roteşte în spaţiu în jurul lui O. Notînd coordonatele lui M prin x, y şi z, acestea vor fi evident date de relaţiile:

$$x = \frac{C}{\sqrt{J_{\Delta\Delta}}}\cos\alpha; \tag{2.163}$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{J_{\Delta\Delta}}}\cos\beta; \tag{2.164}$$

$$z = \frac{C}{\sqrt{J_{\Delta\Delta}}}\cos\gamma. \tag{2.165}$$

Obţinînd din aceste relaţii cei trei cosinuşi directori şi introducîndu-i în relaţia (2.160), după simplificarea cu $J_{\Delta\Delta}$ obţinem relaţia:

$$J_{xx}\cdot x^2 + J_{yy}\cdot y^2 + J_{zz}\cdot z^2 - 2J_{xy}\cdot xy - \\ - 2J_{yz}\cdot yz - 2J_{zx}\cdot zx = C^2, \tag{2.166}$$

care este ecuaţia locului geometric căutat şi reprezintă un elipsoid, numit în Mecanică *elipsoidul de inerţie*.

După cum se ştie din teoria cuadricelor această ecuaţie a unui elipsoid centrat (la care lipsesc termenii de gradul întîi) se poate aduce la forma canonică prin rotaţia în spaţiu a triedrului $Oxyz$ în jurul lui O astfel încît axele noului triedru $Ox'y'z'$ să fie dirijate după axele elipsoidului. Această ecuaţie canonică este:

$$J_{x'x'}\cdot x'^2 + J_{y'y'}\cdot y'^2 + J_{z'z'}\cdot z'^2 = C^2. \tag{2.167}$$

Dacă a, b şi c sînt cele trei semiaxe ale elipsoidului (fig. 2.23) avem evident:

$$J_{x'x'} = \frac{C^2}{a^2}; \quad J_{y'y'} = \frac{C^2}{b^2}; \quad J_{z'z'} = \frac{C^2}{c^2}. \tag{2.168}$$

Semnificaţia geometrică a celor trei semiaxe fiind cunoscută se vede din relaţiile (2.168) că unul din momentele de inerţie $J_{x'x'}$, $J_{y'y'}$, $J_{z'z'}$ este cel mai mare posibil (cel corespunzător semiaxei minime), altul este cel mai mic posibil (cel corespunzător semiaxei maxime), iar cel de-al treilea are următoarea proprietate: considerînd cele două plane de coordonate ce conţin axa a treia

Scanned with OKEN Scanner

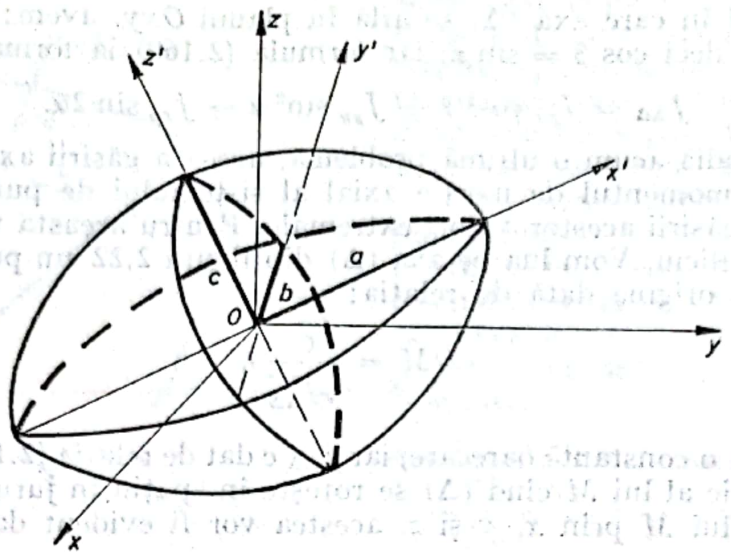


Fig. 2.23

(corespunzătoare momentului în discuție), acest al treilea moment de inerție este un maxim referitor la momentele de inerție față de axele unuia din aceste plane, dar în același timp un minim referitor la momentele de inerție față de axele celuilalt plan. Aceste trei momente de inerție, unul maxim, al doilea minim și un al treilea numit minimax (datorită proprietății de mai sus) poartă numele de momente de inerție principale, iar triedrul rectangular $O_{x'y'z'}$, față de care ele sînt calculate se numește triedru principal de inerție (axele lui se numesc axe principale de inerție). Spre exemplu, în figura 2.23, presupunînd relația $a > c > b$, cele trei momente de inerție principale sînt: cel maxim $J_{y'y'}$, cel minim $J_{x'x'}$ și cel minimax $J_{z'z'}$.

Facem observația foarte importantă că absența termenilor în $x'y'$, $y'z'$ și $z'x'$ din ecuația (2.167) semnifică faptul că față de triedrul principal de inerție al unui sistem de puncte materiale toate cele trei momente de inerție centrifugale sînt nule. Această proprietate permite uneori determinarea axelor de inerție principale, utilizînd proprietatea că dacă un sistem de puncte materiale admite o axă de simetrie mecanică (sistemul e constituit numai din perechi de puncte de mase egale, dispuse simetric față de axă) atunci cele două momente de inerție centrifugale care conțin la indice numele axei sînt nule. Această ultimă proprietate este o proprietate evidentă a integralelor dintr-o funcție impară. De exemplu, numind Oz axa de simetrie mecanică a unui sistem de puncte, funcțiile de sub semnul integrală de la relațiile (2.107) și (2.108) sînt impare, prima în raport cu y, a doua în raport cu x și despărțind sistemul (S) în două subsisteme ($y > 0$ și $y < 0$ la prima integrală; $x > 0$ și $x < 0$ la a doua integrală) se observă imediat că cele două integrale sînt nule. Prin urmare dacă Oz e axă de simetrie mecanică a sistemului, atunci J_{zx} și J_{zy} sînt nule. Utilizînd această proprietate putem spune, de exemplu, că pentru o placă dreptunghiulară omogenă cele două axe de simetrie geometrică Ox și Oy împreună cu perpendiculara Oz pe planul lor formează triedrul principal de inerție deoarece, din motive de simetrie mecanică, avem:

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0.$$

Deoarece această metodă este aplicabilă doar în cazuri pur particulare, ne vom ocupa mai jos de problema găsirii momentelor de inerție principale și a axelor principale de inerție în general.

Cu coeficienţii ecuaţiei (2.166) formăm matricea simetrică cunoscută din teoria cuadricelor sub numele de matrice asociată cuadricei (2.161):

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}, \tag{2.169}$$

care după cum vedem este matricea de inerţie (2.127) a sistemului de puncte materiale. Aceeaşi matrice scrisă cu coeficienţii ecuaţiei canonice (2.167) este matricea diagonală:

$$[J'] = \begin{bmatrix} J_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z'z'} \end{bmatrix}. \tag{2.170}$$

Tot din teoria cuadricelor se ştie că la rotaţia în spaţiu a axelor de coordonate există trei invarianţi care se pot scrie cu ajutorul matricei asociate cuadricei, şi anume: suma elementelor diagonalei principale (care se mai numeşte şi urma matricei), suma complementilor algebrici ai elementelor diagonalei principale şi, în fine, determinantul matricei. Notînd cu A_{xx}, A_{yy} şi A_{zz} complementii algebrici ai elementelor diagonalei principale din matricea (2.169), putem scrie cele trei ecuaţii de invarianţă:

$$J_{x'x'} + J_{y'y'} + J_{z'z'} = J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}; \tag{2.171}$$

$$J_{x'x'} \cdot J_{y'y'} + J_{y'y'} \cdot J_{z'z'} + J_{z'z'} \cdot J_{x'x'} = A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} \tag{2.172}$$

$$J_{x'x'} \cdot J_{y'y'} \cdot J_{z'z'} = |J|. \tag{2.173}$$

Utilizînd relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii algebrice de ordinul n se vede că momentele de inerţie principale $J_{x'x'}$, $J_{y'y'}$ şi $J_{z'z'}$ sînt cele trei rădăcini ale ecuaţiei de gradul trei în λ:

$$-\lambda^3 + (J_{xx} + J_{yy} + J_{zz})\lambda^2 - (A_{xx} + A_{yy} + A_{zz})\lambda + |J| = 0, \tag{2.174}$$

care se mai poate scrie sub forma condensată:

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.175}$$

Ecuaţia aceasta, numită şi ecuaţia caracteristică a cuadricei (2.166) are întotdeauna trei rădăcini reale, fapt care a fost demonstrat de *Kronecker* în cazul mai general în care elementele simetrice faţă de diagonala principală sînt complex conjugate.

Fie:

$$J_{x'x'} = \lambda_1; \quad J_{y'y'} = \lambda_2; \quad J_{z'z'} = \lambda_3. \tag{2.176}$$

Condiţia necesară şi suficientă ca o cuadrică de tipul (2.166) să reprezinte un elipsoid (pentru ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice să fie toate pozitive) este ca invarianţii cuadricei să satisfacă următoarele condiţii:

$$\begin{cases} A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} > 0 \\ (J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}) \cdot |J| > 0. \end{cases} \tag{2.177}$$

Scanned with OKEN Scanner

Verificarea acestora pe baza definițiilor momentelor de inerție o lăsăm pe seama cititorului.

Ne vom ocupa acum de determinarea axelor principale de inerție. În teoria cuadricelor se arată că parametrii directori ai axelor elipsoidului (proiecțiile pe axele triedrului $Oxyz$ ale unor vectori $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ coliniari cu axele Ox, Oy, Oz), se determină din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (J_{xx} - \lambda) \cdot p - J_{xy} \cdot q - J_{xz} \cdot r = 0 \\ -J_{yx} \cdot p + (J_{yy} - \lambda) \cdot q - J_{yz} \cdot r = 0 \\ -J_{zx} \cdot p - J_{zy} \cdot q + (J_{zz} - \lambda) \cdot r = 0, \end{cases} \tag{2.178}$$

în care λ se înlocuiește cu $J_{x'x'} = \lambda_1$ pentru axa Ox', cu $J_{y'y'} = \lambda_2$ pentru axa Oy' și cu $J_{z'z'} = \lambda_3$ pentru axa Oz' iar p, q și r sînt parametrii directori ai axei căutate. Cum, în fiecare caz sistemul (2.178) este un sistem omogen, compatibil nedeterminat cu o necunoscută arbitrară, se iau două ecuații din cele trei și se găsesc două necunoscute în funcție de a treia, de exemplu:

$$p = K_p \cdot r, \quad q = K_q \cdot r; \quad r = \text{arbitrar}, \tag{2.179}$$

iar apoi se calculează cosinușii directori ai axei respective:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \dfrac{K_p}{\sqrt{K_p^2 + K_q^2 + 1}} \\ \cos\beta = \dfrac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \dfrac{K_q}{\sqrt{K_p^2 + K_q^2 + 1}} \\ \cos\gamma = \dfrac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{K_p^2 + K_q^2 + 1}} \end{cases} \tag{2.180}$$

Din relațiile (2.180) se vede că se poate alege $r = 1$ după ce s-au ales două din cele trei ecuații (2.178), găsindu-se apoi în mod unic p și q și apoi cosinușii directori ai axei în cauză. Menționăm faptul (cunoscut din teoria cuadricelor) că rădăcinile λ_1, λ_2 și λ_3 ale ecuației caracteristice (2.175) și vectorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ și $\bar{e}_3$ ale căror proiecții se determină din sistemul (2.178) prin înlocuirea succesivă a lui λ prin λ_1, λ_2 și λ_3, reprezintă în algebra matriceală valorile proprii (λ_1, λ_2, λ_3) și vectorii proprii ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) ai matricei (2.169), adică valorile λ și vectorii $\bar{e}$ (matricele coloană $[\bar{e}]$) care satisfac egalitatea:

$$[J][\bar{e}] = \lambda[\bar{e}]. \tag{2.181}$$

Vom particulariza acum problema spațială a elipsoidului de inerție pentru cazul unui sistem de puncte materiale coplanare. Fie Oxy planul acestor puncte și Oz o axă normală la acest plan. Datorită relației $z = 0$ pentru toate punctele sistemului, avem imediat relațiile:

$$J_{zy} = J_{zx} = 0, \tag{2.182}$$

și deci ecuația caracteristică (2.175) se scrie:

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_{yy} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.183}$$

Scanned with OKEN Scanner

ale cărei rădăcini sînt:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \dfrac{J_{xx} + J_{yy} \pm \sqrt{(J_{yy} - J_{xx})^2 + 4J_{xy}^2}}{2} = \begin{cases} J_{x'x'} \\ J_{y'y'} \end{cases} \\ \lambda_3 = J_{zz} = J_{z'z'} \end{cases} \tag{2.184}$$

Parametrii directori ai axelor principale se determină din sistemul:

$$\begin{cases} (J_{xx} - \lambda) \cdot p - J_{xy} \cdot q = 0 \\ -J_{yx} \cdot p + (J_{yy} - \lambda) \cdot q = 0 \\ (J_{zz} - \lambda) \cdot r = 0, \end{cases} \tag{2.185}$$

în care se înlocuiește pe rînd λ cu λ_1, λ_2 și λ_3 din (2.184). Pentru $\lambda = \lambda_1$ sau $\lambda = \lambda_2$ (valori în general diferite de J_{zz}), determinantul sistemului fiind nul, putem scrie:

$$|J| = (J_{zz} - \lambda_{1,2}) \cdot \begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda_{1,2} & -J_{xy} \\ -J_{yx} & J_{yy} - \lambda_{1,2} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.186}$$

ceea ce atrage după sine faptul că determinantul sistemului:

$$\begin{cases} (J_{xx} - \lambda_{1,2}) \cdot p - J_{xy} \cdot q = 0 \\ -J_{yx} \cdot p + (J_{yy} - \lambda_{1,2}) \cdot q = 0 \end{cases} \tag{2.187}$$

este nul și deci sistemul este compatibil determinat, cu o necunoscută arbitrară. Luînd prima ecuație, de exemplu, și punînd $q = 1$, și scriind și $r = 0$ din ultima ecuație de la (2.185), obținem parametrii directori a axelor Ox' și Oy':

$$Ox' \begin{cases} p_1 = \dfrac{J_{xy}}{J_{xx} - \lambda_1} \\ q_1 = 1 \\ r_1 = 0 \end{cases} \qquad Oy' \begin{cases} p_2 = \dfrac{J_{xy}}{J_{yy} - \lambda_2} \\ q_2 = 1 \\ r_2 = 0 \end{cases} \tag{2.188}$$

Pentru $\lambda = \lambda_3$, determinantul sistemului (2.187) nu mai e nul și deci acesta admite doar soluția banală $p_3 = q_3 = 0$. Din ultima ecuație de la (2.185) rezultă pentru $\lambda = \lambda_3$ necunoscuta $r_3 =$ arbitrar. Deci:

$$Oz' \begin{cases} p_3 = 0 \\ q_3 = 0 \\ r_3 = 1. \end{cases} \tag{2.189}$$

Cosinușii directori ai celor trei axe sînt:

$$Ox' \begin{cases} \cos \alpha_1 = \dfrac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xy}^2 + (J_{xx} - \lambda_1)^2}} \\ \cos \beta_1 = \dfrac{J_{xx} - 1}{\sqrt{J_{xy}^2 + (J_{xx} - \lambda_1)^2}} \\ \cos \gamma_1 = 0 \end{cases} \tag{2.190}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$Oy' \begin{cases} \cos\alpha_2 = \dfrac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xy}^2 + (J_{xx} - \lambda_2)^2}} \\ \cos\beta_2 = \dfrac{J_{xx} - \lambda_2}{\sqrt{J_{xy}^2 + (J_{xx} - \lambda_2)^2}} \\ \cos\gamma_2 = 0 \end{cases} \tag{2.191}$$

$$Oz' \begin{cases} \cos\alpha_3 = 0 \\ \cos\beta_3 = 0 \\ \cos\gamma_3 = 1. \end{cases} \tag{2.192}$$

Axa Oz' este deci chiar axa Oz normală la planul sistemului de puncte, iar axele Ox' și Oy' se află în acest plan. Cu ajutorul rădăcinilor λ_1 și λ_2 din (2.184) se poate verifica imediat relația:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0, \tag{2.193}$$

care arată faptul că axele Ox' și Oy' sînt într-adevăr perpendiculare.

Intersecția elipsoidului de inerție cu planul $z = 0$ este elipsa de inerție, care scrisă în triedrul principal de inerție are ecuația:

$$J_{x'x'} \cdot x'^2 + J_{y'y'} \cdot y'^2 = C^2. \tag{2.194}$$

Vom defini acum noțiunea de rază de inerție a unui sistem de puncte față de o axă (Δ) ca fiind mărimea i_Δ dată de relația:

$$i_\Delta = \sqrt{\frac{J_{\Delta\Delta}}{m}}, \tag{2.195}$$

în care $J_{\Delta\Delta}$ este momentul de inerție axial al sistemului față de axa (Δ), iar m masa totală a sistemului. Raza de inerție reprezintă distanța de la axă la care ar trebui concentrată întreaga masă a sistemului pentru a obține același moment de inerție axial.

Notînd cu $i_{x'}$ și $i_{y'}$ razele de inerție ale sistemului plan de puncte față de axele principale Ox', Oy', putem scrie:

$$\begin{cases} J_{x'x'} = m \cdot i_{x'}^2 \\ J_{y'y'} = m \cdot i_{y'}^2 \end{cases} \tag{2.196}$$

Luînd valoarea constantei C egală cu:

$$C = m \cdot i_{x'} \cdot i_{y'} \tag{2.197}$$

și introducînd relațiile (2.196) și (2.197) în (2.194) obținem în final ecuația unei elipse:

$$\frac{x'^2}{i_{y'}^2} + \frac{y'^2}{i_{x'}^2} = 1, \tag{2.198}$$

care este cunoscută sub numele de elipsă de inerție a sistemului de puncte coplanare.

Mai facem o ultimă observație: atît elipsoidul cît și elipsa de inerție cînd au centrul O chiar în centrul maselor sistemului de puncte se numesc elipsoid central de inerție, respectiv elipsă centrală de inerție.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.8. **Impulsul și momentul cinetic.** Fie un sistem (S) de puncte materiale continuu sau discret (fig. 2.24). Fie A un punct arbitrar al sistemului, fie dm masa unei vecinătăți a acestui punct, $\bar{V}$ viteza absolută a acestuia, $\bar{r}_1$ vectorul de poziție al punctului A față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ și $\bar{r}$ față de reperul mobil $Oxyz$. Vom defini atunci impulsul sistemului (S) ca fiind vectorul $\bar{H}$ dat de relația:

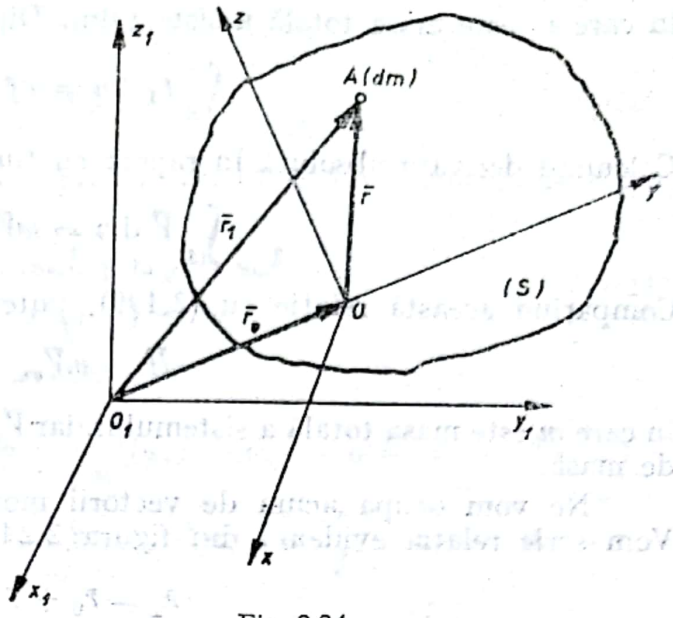


Fig. 2.24

$$\bar{H} = \int_{(S)} \bar{V}\, dm = \int_{(S)} \dot{\bar{r}}_1\, dm \tag{2.199}$$

Vom defini momentul cinetic al sistemului (S) față de O_1 ca fiind vectorul $\bar{K}_{01}$ dat de relația:

$$\bar{K}_{01} = \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \bar{V}\ dm = \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \dot{\bar{r}}_1\, dm. \tag{2.200}$$

În mod analog vom defini momentul cinetic al sistemului (S) față de O ca fiind vectorul $\bar{K}_0$ dat de relația:

$$\bar{K}_0 = \int_{(S)} \bar{r} \times \dot{\bar{r}}\, dm. \tag{2.201}$$

În integralele (2.199), (2,220) și (2.201) punctul reprezintă ca de obicei derivata absolută în raport cu timpul a vectorilor respectivi. Aceste trei integrale se calculează făcînd uz de relația (2.102), iar în cazul unui sistem discret făcînd uz și de relația (1.330), astfel că, în cazul cel mai general al reuniunii unui sistem continuu cu unul discret, relațiile de mai sus se scriu:

$$\bar{H} = \int_{(S)} \bar{V} \rho_c\, d\varepsilon + \sum_i m_i \bar{V}_i; \tag{2.202}$$

$$\bar{K}_{01} = \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \bar{V} \rho_c\, d\varepsilon + \sum_i \bar{r}_{1i} \times \bar{V}_i m_i; \tag{2.203}$$

$$\bar{K}_0 = \int_{(S)} \bar{r} \times \dot{\bar{r}} \rho_c\, d\varepsilon + \sum_i \bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i m_i, \tag{2.204}$$

în care $\rho_c(A)$ este densitatea de volum, de suprafață sau liniară a sistemului continuu, $d\varepsilon$ este elementul de volum, de suprafață sau de arc al vecinătății lui A, iar m_i sînt masele sistemului discret.

Fie C centrul de masă al sistemului (S) din figura 2.24. Vectorul său de poziție se calculează cu formula (2.128):

$$\bar{r}_{1c} = \frac{\int_{(S)} \bar{r}_1\, dm}{\int_{(S)} dm} = \frac{\int_{(S)} \bar{r}_1\, dm}{m}, \tag{2.205}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care m este masa totală a sistemului. Din relația (2.205) deducem:

$$\int_{(S)} \bar{r}_1 \, dm = m\bar{r}_{1c}. \tag{2.206}$$

Calculînd derivata absolută în raport cu timpul a relației (2.206) obținem:

$$\int_{(S)} \bar{V} \, dm = m\bar{V}_c. \tag{2.207}$$

Comparînd această relație cu (2.199), putem scrie:

$$\bar{H} = m\bar{V}_c, \tag{2.208}$$

în care m este masa totală a sistemului, iar $\bar{V}_c$ viteza absolută a centrului său de masă.

Ne vom ocupa acum de vectorii moment cinetic (2.200) și (2.201). Vom scrie relația evidentă din figura 2.24:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}, \tag{2.209}$$

și vom scrie și derivata ei absolută în raport cu timpul:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \dot{\bar{r}}. \tag{2.210}$$

Introducînd aceste două relații (2.200) obținem:

$$\bar{K}_{01} = \int_{(S)} (\bar{r}_0 + \bar{r}) \times (\bar{V}_0 + \dot{\bar{r}}) \, dm = \int_{(S)} \bar{r} \, dm \times \bar{V}_0 +$$

$$+ \int_{(S)} \bar{r} \times \dot{\bar{r}} \, dm + \bar{r}_0 \times \int_{(S)} (\bar{V}_0 + \dot{\bar{r}}) \, dm = \int_{(S)} \bar{r} \, dm \times \bar{V}_0 +$$

$$+ \int_{(S)} \bar{r} \times \dot{\bar{r}} \, dm + \bar{r}_0 \times \int_{(S)} \bar{V} \, dm. \tag{2.211}$$

Folosind relația (2.207), relația similară cu (2.206) în triedrul $Oxyz$:

$$\int_{(S)} \bar{r} \, dm = m\bar{r}_c, \tag{2.212}$$

și definiția (2.201), relația (2.211) se scrie:

$$\bar{K}_{01} = \bar{K}_0 + \bar{r}_c \times m\bar{V}_0 + \bar{r}_0 \times m\bar{V}_c, \tag{2.213}$$

în care $\bar{V}_c$ este viteza absolută a centrului maselor C, iar $\bar{r}_c$ vectorul de poziție a lui C față de O.

Vom calcula acum vectorul moment cinetic $\bar{K}_0$ în ipoteza că sistemul (S) este un rigid (eventual cu mase concentrate atașate solidar lui). Din relația (2.210) deducem:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{V} - \bar{V}_0. \tag{2.214}$$

Calculînd diferența de mai sus din relația (2.100), care ne dă viteza absolută a unui punct A dintr-un rigid, deducem:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{2.215}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu care relația (2.210) devine:

$$\bar{K}_0 = \int_{(S)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times r)\, dm. \tag{2.216}$$

Cu descompunerea (1.39) și cu expresiile analitice ale vectorilor $\bar{\omega}$ și $\bar{r}$ în triedrul $Oxyz$:

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \\ \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \end{cases} \tag{2.217}$$

relația (2.216) se transformă succesiv:

$$\begin{aligned} \bar{K}_0 = \int_{(S)} [\bar{\omega}(\bar{r} \cdot \bar{r}) - \bar{r}(\bar{\omega} \cdot \bar{r})]\, dm = \int_{(S)} [(\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k})(x^2 + y^2 + z^2) - \\ - (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)]\, dm = \omega_x \bar{i} \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm + \\ + \omega_y \bar{j} \int_{(S)} (z^2 + x^2)\, dm + \omega_z \bar{k} \int_{(S)} (x^2 + y^2)\, dm - \omega_x \bar{j} \int_{(S)} xy\, dm - \\ - \omega_x \bar{k} \int_{(S)} xz\, dm - \omega_y \bar{i} \int_{(S)} xy\, dm - \omega_y \bar{k} \int_{(S)} xy\, dm - \\ - \omega_z \bar{i} \int_{(S)} zx\, dm - \omega_z \bar{j} \int_{(S)} yz\, dm. \end{aligned} \tag{2.218}$$

Scriind acum cele trei proiecții ale relației (2.218) pe axele triedrului $Oxyz$ cu ajutorul definițiilor (2.103) — (2.108), obținem relațiile

$$\begin{cases} K_{ox} = J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \\ K_{oy} = J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z - J_{yx}\omega_x \\ K_{oz} = J_{zz}\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y. \end{cases} \tag{2.219}$$

Observăm că putem scrie vectorul $\bar{K}_0$, utilizînd matricea de inerție (2.127) și matricele coloană:

$$[\bar{\omega}] = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}; \qquad [\bar{K}_0] = \begin{bmatrix} K_{ox} \\ K_{oy} \\ K_{oz} \end{bmatrix}, \tag{2.220}$$

sub forma matriceală:

$$[\bar{K}_0] = [J]_0 \cdot [\bar{\omega}]. \tag{2.221}$$

2.3.9. **Teorema impulsului. Teorema mișcării centrului de masă. Conservarea impulsului.** Fie (S) un sistem de puncte materiale. Fie A un punct arbitrar al sistemului și fie dm masa unei vecinătăți a acestui punct care se scrie, utilizînd densitatea (1.330) și relația (2.102) sub forma generală:

$$dm = \left[\rho_c + \sum_i m_i \delta(A_i)\right] d\varepsilon, \tag{2.222}$$

în care $\rho_c(A)$ este densitatea masei distribuite continuu, iar m_i masele concentrate în punctele A_i.

Scanned with OKEN Scanner

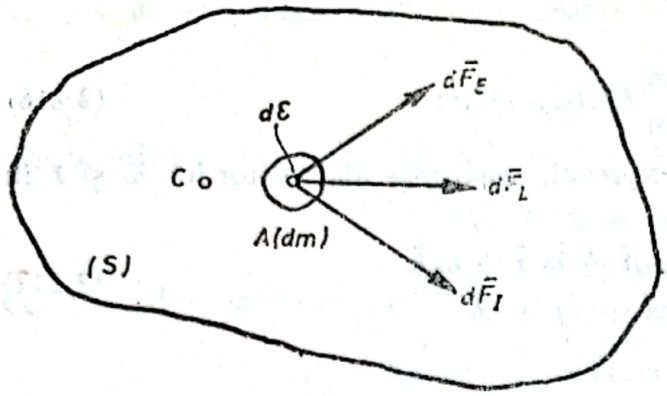


Fig. 2.25

Acest sistem de puncte este acționat de un sistem de forțe exterioare și de un sistem de forțe de legătură. Diferitele puncte ale sistemului interacționează prin forțele interioare, care, fiind două cîte două egale în mărime și opuse ca sens, formează pentru întregul sistem (S) un sistem de forțe cu rezultanta nulă.

Sistemul forțelor exterioare și cel al forțelor de legătură au fiecare în general o densitate $\bar{p}$ de tipul (1.329). Deci forța exterioară $d\bar{F}_E$ și forța de legătură $d\bar{F}_L$ (fig. 2.25) ce acționează punctul A pot fi în general scrise sub forma:

$$\begin{aligned} d\bar{F}_E &= \left[\bar{p}_e + \sum_i \bar{F}_i \delta(A_i)\right]_E d\varepsilon; \\ d\bar{F}_L &= \left[\bar{p}_e + \sum_i \bar{F}_i \delta(A_i)\right]_L d\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.223}$$

în care $\bar{p}_e(A)$ este densitatea forțelor exterioare sau de legătură distribuite continuu, iar $\bar{F}_i$ sînt forțele exterioare sau de legătură concentrate în punctele A_i.

Punctul A mai este acționat și de rezultanta forțelor interioare cu care celelalte puncte ale sistemului acționează asupra sa. Notînd cu $d\bar{F}_i$ această rezultantă, putem scrie, conform observației făcute mai sus, relația:

$$\int_{(S)} d\bar{F}_i = 0. \tag{2.224}$$

În concluzie, punctul A, devenit liber, este acționat de forțele: exterioară $d\bar{F}_E$, de legătură $d\bar{F}_L$ și interioară $d\bar{F}_I$ (fig. 2.25). Pentru un asemenea punct se poate aplica principiul al doilea al Mecanicii sub forma:

$$d\bar{F}_E + d\bar{F}_L + d\bar{F}_I = \bar{a} \cdot dm. \tag{2.225}$$

Integrînd relația (2.225) pe întregul sistem (S) obținem:

$$\int_{(S)} d\bar{F}_E + \int_{(S)} d\bar{F}_L + \int_{(S)} d\bar{F}_I = \int_{(S)} \bar{a}\, dm. \tag{2.226}$$

Notînd cu $\bar{R}_E$ și $\bar{R}_L$ rezultanta forțelor exterioare și respectiv de legătură, și folosind relația (2.224), putem scrie egalitatea:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = \int_{(S)} \bar{a}\, dm. \tag{2.227}$$

Fiecare din cele două rezultante din această relație se calculează aplicînd formulele (2.223) sub forma:

$$\underset{(L)}{\bar{R}_E} = \left[\int_{(S)} \bar{p}_e d\varepsilon + \sum_i \bar{F}_i\right]_{\substack{E \\ (L)}}, \tag{2.228}$$

Scanned with OKEN Scanner

reprezentînd deci rezultanta forţelor cu distribuţie continuă şi rezultanta forţelor concentrate. Calculînd derivata absolută în raport cu timpul a relaţiei (2.199), considerînd masa dm constantă în timp obţinem:

$$\dot{\bar{H}} = \int_{(S)} \dot{\bar{v}}\, dm = \int_{(S)} \bar{a} \cdot dm. \tag{2.229}$$

Comparînd relaţia (2.227) cu (2.229) deducem:

$$\dot{\bar{H}} = \bar{R}_E + \bar{R}_L = \bar{R}. \tag{2.230}$$

Calculînd derivata $\dot{\bar{H}}$ cu ajutorul relaţiei (2.208), relaţia (2.230) se transformă în:

$$\bar{R} = \bar{R}_E + \bar{R}_L = m\bar{a}_c, \tag{2.231}$$

în care $\bar{a}_c$ este acceleraţia absolută a centrului maselor.

Relaţia (2.230) reprezintă în Mecanică teorema impulsului, iar relaţia (2.231), care este o consecinţă a acesteia, reprezintă teorema mişcării centrului de masă. Aceste două teoreme se enunţă astfel:

teorema impulsului: derivata absolută în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu rezultanta forţelor exterioare şi de legătură ce acţionează asupra sistemului;

teorema mişcării centrului de masă: rezultanta forţelor exterioare şi de legătură ce acţionează asupra unui sistem de puncte materiale este egală cu produsul dintre masa totală a sistemului şi acceleraţia centrului său de masă. Un enunţ echivalent al acestei teoreme este următorul: centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se comportă ca şi un punct liber în care sînt concentrate toate forţele şi toată masa sistemului.

Vom numi sistem închis un sistem de puncte materiale a cărui interacţiune cu exteriorul este echivalentă cu zero, sau mai exact un sistem de puncte pentru care sistemul forţelor exterioare şi de legătură este echivalent cu zero, deci are rezultanta şi momentul rezultant nule. În caz contrar sistemul de puncte se numeşte deschis.

Pentru un astfel de sistem, sau mai general, pentru un sistem la care doar rezultanta forţelor exterioare şi de legătură este nulă:

$$\bar{R} = \bar{R}_E + \bar{R}_L = 0, \tag{2.232}$$

teorema impulsului şi teorema mişcării centrului de masă ne dau:

$$\dot{\bar{H}} = 0 \Rightarrow \bar{H} = \bar{C}_1; \tag{2.233}$$

$$m\bar{a}_c = 0 \Rightarrow \bar{V}_c = \bar{C}_2, \tag{2.234}$$

$\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$ fiind nişte constante vectoriale.

Relaţiile (2.233) şi (2.234) reprezintă *teorema conservării impulsului* care se enunţă astfel: într-un sistem de puncte materiale la care rezultanta forţelor exterioare şi de legătură este nulă impulsul total se conservă şi în acest caz centrul de masă al sistemului se găseşte fie într-o mişcare rectilinie şi uniformă ($\bar{C}_2 \neq 0$), fie în repaus ($\bar{C}_2 = 0$).

Un sistem de puncte poate avea rezultanta nulă numai în decursul unui anumit interval de timp. În acest caz se pot aplica relaţiile de conservare (2.233) şi (2.234) la orice două momente t_1 şi t_2 din acel interval de timp, sub formele:

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_2, \tag{2.235}$$

$$\bar{V}_{c1} = \bar{V}_{c2}. \tag{2.236}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste legi vectoriale de conservare sînt echivalente (fiecare) cu cîte trei ecuaţii scalare, obţinute prin proiectare pe cele trei axe ale unui reper cartezian. Plecînd de la această observaţie remarcăm că se pot deduce legi scalare de conservare şi pentru unele sisteme cu rezultanta nenulă. Fie un astfel de sistem pentru care proiecţia pe o axă (Δ) a rezultantei forţelor exterioare şi de legătură este nulă. În acest caz putem scrie relaţiile:

$$\operatorname{pr}_{(\Delta)} \bar{R} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{pr}_{(\Delta)} \dot{\bar{H}} = 0 \Rightarrow \operatorname{pr}_{(\Delta)} \bar{H} = H_\Delta = C_1 & (2.237) \\ \operatorname{pr}_{(\Delta)} \bar{a}_c = 0 \Rightarrow \operatorname{pr}_{(\Delta)} \bar{V}_c = V_{c\Delta} = C_2 & (2.238) \end{cases}$$

unde C_1 şi C_2 sînt două constante scalare.

Deci atunci cînd rezultanta forţelor exterioare şi de legătură ale unui sistem de puncte are proiecţie nulă (este perpendiculară) pe o axă (Δ), care poate fi în particular una din axele Ox, Oy, Oz ale unui triedru cartezian, proiecţia pe acea axă a impulsului total şi a vitezei centrului de masă a sistemului se conservă. Se mai poate spune că proiecţia centrului de masă pe axa (Δ), se află sau într-o mişcare uniformă ($C_2 \neq 0$) sau în repaus ($C_2 = 0$).

Scriind relaţiile (2.237) şi (2.238) la două momente t_1 şi t_2 obţinem relaţii de forma:

$$H_{1\Delta} = H_{2\Delta}; \quad (2.239)$$

$$V_{c\,1\Delta} = V_{c\,2\Delta}. \quad (2.240)$$

2.3.10. **Teorema momentului cinetic. Conservarea momentului cinetic. Viteză areolară. Teorema ariilor.** Fie (S) un sistem de puncte materiale A, a căror vecinătăţi deε au masele dm scrise sub formă generală (2.222). Am văzut în paragraful precedent că forţele ce acţionează punctul A, devenit liber sînt: forţa exterioară $d\bar{F}_E$, forţa de legătură $d\bar{F}_L$ şi forţa interioară $d\bar{F}_i$ (fig. 2.26).

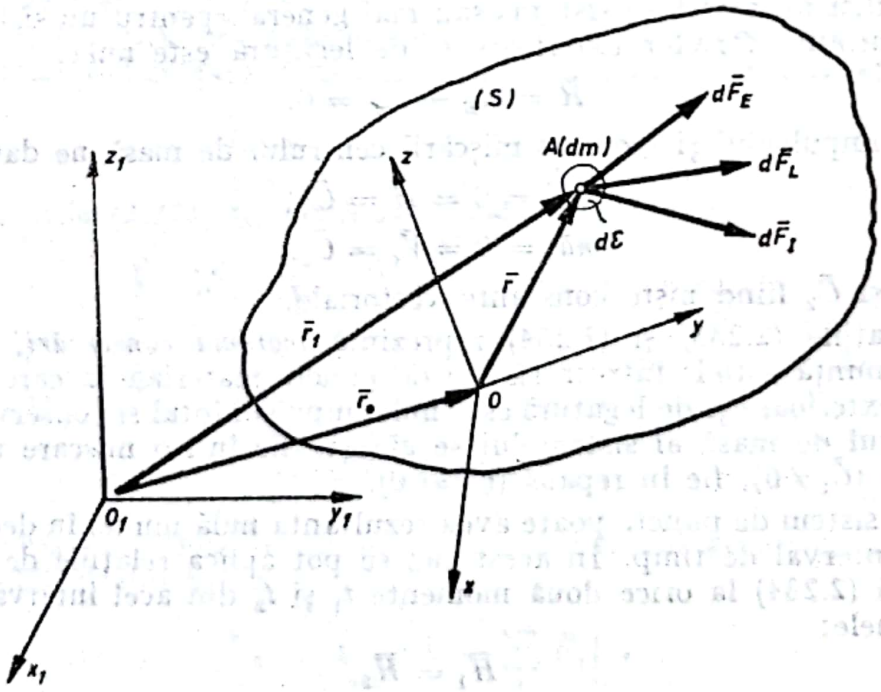


Fig. 2.26

Fie $O_1x_1y_1z_1$ un sistem de referinţă cartezian fix şi $Oxyz$ un sistem de referinţă cartezian mobil. Punctul A are vectorii de poziţie: $\bar{r}_1$ faţă de O_1 şi $\bar{r}$ faţă de O. Punctul O are vectorul de poziţie $\bar{r}_0$ faţă de O_1.

Prin înmulţirea vectorială la stînga a relaţiei (2.225) cu vectorul $\bar{r}_1$ obţinem:

$$\bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_E + \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_L \times \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_I = \bar{r}_1 \times \bar{a}\,\mathrm{d}m. \tag{2.241}$$

Prin integrarea relaţiei (2.241) pe întregul sistem (S) obţinem:

$$\int_{(S)} \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_E + \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_L + \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_I = \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \bar{a}\,\mathrm{d}m. \tag{2.242}$$

Dar:

$$\int_{(S)} \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_E = \bar{M}_{0_1E} \tag{2.243}$$

reprezintă momentul rezultant faţă de O_1 al sistemului de forţe exterioare şi:

$$\int_{(S)} \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_L = \bar{M}_{0_1L} \tag{2.244}$$

reprezintă momentul rezultant faţă de O_1 al sistemului de forţe de legătură.

Fie acum A şi B două puncte arbitrare ale sistemului (fig. 2.27). Ele interacţionează evident cu perechi de forţe egale în mărime şi opuse ca sens. Momentul rezultant al acestor două forţe este:

$$\bar{r}_{1A} \times \mathrm{d}\bar{F}_1 + \bar{r}_{1B} \times (-\mathrm{d}\bar{F}_I) = \bar{r}_{1A} \times \mathrm{d}\bar{F}_I + (\bar{r}_{1A} + \overline{AB}) \times (-\mathrm{d}\bar{F}_I) =$$

$$= \bar{r}_{1A} \times (\mathrm{d}\bar{F}_I - \mathrm{d}\bar{F}_I) + \overline{AB} \times (-\mathrm{d}\bar{F}_I) = 0.$$

Integrala a treia din relaţia (2.242) se poate descompune numai în perechi de asemenea momente a căror sumă este nulă. Deci întreaga integrală este nulă:

$$\int_{(S)} \bar{r}_1 \times \mathrm{d}\bar{F}_I = 0. \tag{2.245}$$

Derivînd în raport cu timpul relaţia (2.200) şi folosind relaţiile:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \bar{V}; \quad \dot{\bar{V}} = \bar{a}, \tag{2.246}$$

obţinem:

$$\dot{\bar{K}}_{01} = \int_{(S)} \dot{\bar{r}}_1 \times \bar{V}\,\mathrm{d}m + \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \dot{\bar{V}}\,\mathrm{d}m =$$

$$= \int_{(S)} \bar{r}_1 \times \bar{a}\,\mathrm{d}m. \tag{2.247}$$

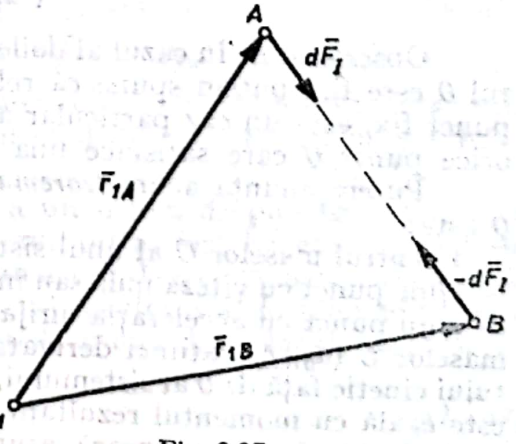


Fig. 2.27

Folosind relaţiile (2.243), (2.244), (2.245) şi (2.247), relaţia (2.242) se scrie sub forma:

$$\bar{M}_{01} = \bar{M}_{0_1E} + \bar{M}_{0_1L} = \dot{\bar{K}}_{0_1}. \tag{2.248}$$

Relaţia (2.248) reprezintă *teorema momentului cinetic faţă de un punct fix,*

care se enunță astfel: derivata absolută în raport cu timpul a momentului cinetic (al unui sistem de puncte materiale) calculat față de un punct fix este egală cu momentul rezultant față de acel punct fix al forțelor exterioare și de legătură ce acționează asupra sistemului.

Vom studia în continuare teorema momentului cinetic față de puncte mobile. Pentru aceasta vom calcula derivata absolută în raport cu timpul a relației (2.213):

$$\dot{\bar{K}}_{0_1} = \dot{\bar{K}}_0 + \dot{\bar{r}}_c \times m\bar{V}_0 + \bar{r}_c \times m\dot{\bar{V}}_0 + \dot{\bar{r}}_0 \times m\bar{V}_c + \bar{r}_0 \times m\dot{\bar{V}}_c =$$

$$= \dot{\bar{K}}_0 + m\bar{V}_c \times \bar{V}_0 + \bar{r}_c \times m\bar{a}_0 - m\bar{V}_c \times \bar{V}_0 + \bar{r}_0 \times m\bar{a}_c.$$

Deci:

$$\dot{\bar{K}}_{0_1} = \dot{\bar{K}}_0 + \bar{r}_c \times m\bar{a}_0 + \bar{r}_0 \times m\bar{a}_c. \tag{2.249}$$

Cu ajutorul relației (2.231) putem scrie:

$$\bar{r}_0 \times m\bar{a}_c = \bar{r}_0 \times \bar{R}. \tag{2.250}$$

Pentru punctele O_1 și O relația (1.72) se scrie:

$$\bar{M}_{01} = \bar{M}_0 + \bar{r}_0 \times \bar{R}. \tag{2.251}$$

Introducînd relația (2.250) în (2.249), apoi pe aceasta împreună cu (2.251) în (2.248) obținem:

$$\bar{M}_0 + \bar{r}_0 \times \bar{R} = \dot{\bar{K}}_0 + \bar{r}_c \times m\bar{a}_0 + \bar{r}_0 \times \bar{R},$$

sau în final:

$$\bar{M}_0 = \dot{\bar{K}}_0 + \bar{r}_c \times m\bar{a}_0. \tag{2.252}$$

Relația (2.252) se reduce la o formă similară ecuației (2.248) și anume:

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_{0E} + \bar{M}_{0L} = \dot{\bar{K}}_0, \tag{2.253}$$

atunci cînd 0 satisface una din condițiile:

$$\begin{cases} \bar{r}_c = \overline{OC} = 0 \\ \bar{a}_0 = 0 \\ \bar{a}_0 \| \bar{r}_c. \end{cases} \tag{2.254}$$

Observînd că în cazul al doilea de mai sus este inclus și cazul cînd punctul 0 este fix, putem spune că relația (2.248), care este valabilă față de un punct fix, este un caz particular al relației (2.253), care este valabilă pentru orice punct 0 care satisface una din condițiile (2.254).

Putem enunța acum *teorema momentului cinetic în cazul general*. Dacă 0 este:

— 1/centrul maselor C al unui sistem de puncte ($\bar{r}_c = 0$), sau

— 2/un punct cu viteză nulă sau în mișcare rectilinie și uniformă ($\bar{a}_0 = 0$), sau

— 3/un punct cu accelerația dirijată pe dreapta ce unește punctul cu centrul maselor C ($\bar{a}_0 \| \bar{r}_c$), atunci derivata absolută în raport cu timpul a momentului cinetic față de 0 al sistemului, moment cinetic definit prin relația (2.201), este egală cu momentul rezultant față de 0 al sistemului de forțe exterioare și de legătură ce acționează asupra sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Vom vedea ulterior că dintre punctele 0 de mai sus cele mai importante sînt: centrul maselor unui sistem, punctele fixe (eventual punctele cu viteză momentană nulă) și punctele aflate în mișcare rectilinie și uniformă (a se vedea principiul relativității al lui Galilei).

Vom vedea acum modul de scriere a ecuației (2.253) în cazul unui rigid. Fie triedrul $Oxyz$ solidar cu rigidul pentru ca elementele matricei de inerție să fie constante tot timpul mișcării.

Vom calcula derivata absolută din relația (2.253) folosindu-ne de relația (1.162) care leagă derivata absolută de derivata relativă a unui vector:

$$\bar{M}_0 = \frac{d_1 \bar{K}_0}{dt} = \frac{d\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0. \tag{2.255}$$

Proiectînd această relație pe axele triedrului $Oxyz$ obținem relațiile:

$$\begin{cases} M_{0x} = \dot{K}_{0x} + \omega_y K_{0z} - \omega_z K_{0y} \\ M_{0y} = \dot{K}_{0y} + \omega_z K_{0x} - \omega_x K_{0z} \\ M_{0z} = \dot{K}_{0z} + \omega_x K_{0y} - \omega_y K_{0x}. \end{cases} \tag{2.256}$$

Vom particulariza relațiile (2.256), ținînd cont de relațiile (2.219) în două cazuri:

— 1/Rigid cu axă fixă. Alegînd această axă (după care e dirijat vectorul $\bar{\omega}$) drept una din axele triedrului $Oxyz$, de exemplu Oz, vom avea:

$$\bar{\omega}(0,\ 0,\ \omega_z)$$

$$\bar{K}_0(-J_{xz}\omega_z,\ -J_{yz}\omega_z,\ J_{zz}\omega_z)$$

$$\begin{cases} M_{0x} = -J_{xz}\dot{\omega}_z + J_{yz}\omega_z^2 \\ M_{0y} = -J_{yz}\dot{\omega}_z - J_{xz}\omega_z^2 \\ M_{0z} = J_{zz}\dot{\omega}_z. \end{cases} \tag{2.257}$$

— 2/ Cazul general cînd se alege ca triedru $Oxyz$ triedrul principal de inerție cu originea în 0 (fie că 0 e fix, fie că e centrul maselor etc.). În acest caz avem:

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$$

$$\bar{K}_0(J_{xx}\omega_x,\ J_{yy}\omega_y,\ J_{zz}\omega_z)$$

$$\begin{cases} M_{0x} = J_{xx}\dot{\omega}_x - (J_{yy} - J_{zz}) \cdot \omega_y\omega_z \\ M_{0y} = J_{yy}\dot{\omega}_y - (J_{zz} - J_{xx}) \cdot \omega_z\omega_x \\ M_{0z} = J_{zz}\dot{\omega}_z - (J_{xx} - J_{yy}) \cdot \omega_x\omega_y. \end{cases} \tag{2.258}$$

Relațiile (2.258) sînt cunoscute în Mecanică sub denumirea de *ecuații dinamice ale lui Euler*, care le-a aplicat în mod deosebit la studiul rigidului cu un punct fix.

Am văzut în paragraful precedent că un sistem de puncte se numește a fi închis dacă rezultanta și momentul rezultant al forțelor exterioare și de legătură sînt vectori nuli. Vom considera un astfel de sistem, sau mai general, un sistem la care se anulează doar momentul rezultant al forțelor exterioare și de legătură față de un punct 0 care satisface una din relațiile (2.254). În acest caz relația:

$$\bar{M}_0 = 0 \tag{2.259}$$

Scanned with OKEN Scanner

conduce, datorită relației (2.253) la:

$$\bar{K}_0 = \bar{C}, \tag{2.260}$$

care reprezintă *teorema conservării momentului cinetic* enunțată astfel: dacă 0 este un punct ce satisface una din relațiile (2.254) și dacă momentul rezultant față de 0 al forțelor exterioare și de legătură ce acționează un sistem de puncte materiale (S) este nul, momentul cinetic al lui (S) față de 0, definit prin relația (2.201) se conservă.

Relația (2.260) este echivalentă cu trei relații scalare și anume proiecțiile acesteia pe axele triedrului $Oxyz$.

Se pot deduce legi de conservare scalare pentru sistemele care au momentul rezultant nenul. Fie un sistem de puncte materiale (S) la care momentul rezultant are proiecție nulă (e perpendicular) pe o axă (Δ). Atunci putem scrie:

$$\mathrm{pr}_{(\Delta)}\bar{M}_0 = 0 \Rightarrow \mathrm{pr}_{(\Delta)}K_0 = K_{0\Delta} = C. \tag{2.261}$$

Deci dacă momentul rezultant (față de un punct O din categoria mai sus menționată) al forțelor exterioare și de legătură ce acționează un sistem de puncte materiale (S) are proiecția nulă pe o axă (Δ), în particular pe una din axele triedrului $Oxyz$, atunci proiecția pe (Δ) a momentului cinetic al lui (S) față de 0 se conservă.

Fie acum un sistem (S) format dintr-un singur punct material A de masă m (fig. 2.28).

Dacă O_1 este un punct fix și dacă momentul rezultant față de O_1 al forțelor (exterioare și de legătură) ce acționează punctul A este nul (ceea ce se întîmplă, conform teoremei lui *Varignon*, cînd rezultanta acestor forțe este nulă, sau este dirijată pe suportul AO_1) atunci putem scrie relația de conservare (2.260):

$$\bar{K}_{0_1} = \bar{C}, \tag{2.262}$$

care se scrie în acest caz:

$$\bar{r}_1 \times m\bar{V} = \bar{C}. \tag{2.263}$$

O primă concluzie a acestei relații este că traiectoria (Γ) este o curbă plană, întrucît vectorul $\bar{r}_1$ este mereu perpendicular pe vectorul constant $\bar{C}$.

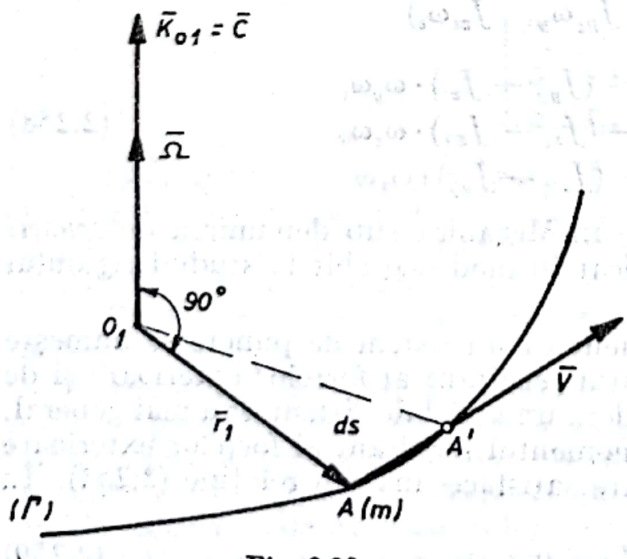


Fig. 2.28

O a doua concluzie a relației (2.263) este faptul că vectorul de poziție al punctului A față de O_1 mătură arii egale în intervale de timp egale. Pentru a demonstra aceasta vom considera deplasarea infinitezimală a punctului A în punctul infinit apropiat A' cu vectorul:

$$\mathrm{d}_1\bar{r}_1 = \overline{AA'}. \tag{2.264}$$

Împărțind acest vector prin timpul infinit mic $\mathrm{d}t$ al acestei mișcări obținem evident viteza momentană:

$$\bar{V} = \frac{\mathrm{d}_1\bar{r}_1}{\mathrm{d}t} = \dot{\bar{r}}_1. \tag{2.265}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu d_1S aria măturată de vectorul $\bar{r}_1$ în intervalul de timp dt, observăm că această arie se poate scrie sub forma:

$$d_1S = \frac{1}{2} |\bar{r}_1 \times d_1\bar{r}_1|. \tag{2.266}$$

Împărțind relația (2.166) prin dt avem:

$$\frac{d_1S}{dt} = \frac{1}{2} \left| \bar{r}_1 \times \frac{d_1\bar{r}_1}{dt} \right| = \frac{1}{2} |\bar{r}_1 \times \bar{V}|. \tag{2.267}$$

Cu aceasta vom defini noțiunea de *viteză areolară a* punctului A față de O_1 ca fiind vectorul:

$$\bar{\Omega}_{01} = \frac{1}{2} \bar{r}_1 \times \bar{V}, \tag{2.268}$$

al cărui modul este egal cu viteza de variație (2.267) a ariei măturate de vectorul $\bar{r}_1$. Cu aceasta se vede că relația (2.263) se scrie:

$$2m\bar{\Omega}_{01} = \bar{C}, \tag{2.269}$$

de unde se deduce relația:

$$\Omega_{01} = \frac{d_1S}{dt} = \frac{C}{2m}. \tag{2.270}$$

Integrînd relația:

$$d_1S = \frac{C}{2m} dt, \tag{2.271}$$

între punctele arbitrare A_1 și A_2 de pe traiectorie, unde punctul A ajunge la momentele t_1, respectiv t_2, obținem:

$$S_{12} = \frac{C}{2m} (t_2 - t_1), \tag{2.272}$$

S_{12} fiind aria măturată în intervalul de timp $t_2 - t_1$ de către vectorul $\bar{r}_1$. Astfel concluzia a doua a relației (2.263) este demonstrată. Această consecință a teoremei conservării momentului cinetic se numește *teorema ariilor*, și ea se enunță astfel: dacă rezultanta forțelor exterioare și de legătură ce acționează asupra unui punct material A este nulă sau este dirijată pe dreapta ce unește punctul A cu un punct fix O_1 (caz în care forța se numește forță centrală), atunci viteza areolară a punctului A este constantă și deci vectorul său de poziție $\bar{r}_1 = \overline{O_1A}$ mătură arii egale în intervale de timp egale.

2.3.11. **Energie cinetică. Lucru mecanic.** Fie (S) un sistem de puncte materiale și fie A un punct al sistemului (fig. 2.29). Fie dm masa vecinătății de a punctului A, dată în general de relația (2.102) și scrisă cu ajutorul relației (1.330) sub forma: $dm = \left[\rho_c + \sum_i m_i \delta(A_i)\right] d\varepsilon$ și fie $\bar{V}$ viteza absolută a lui A.

În acest caz vom defini *energia cinetică a punctului* A ca fiind infinitul mic:

$$dE_c = \frac{1}{2} V^2 dm, \tag{2.273}$$

Scanned with OKEN Scanner

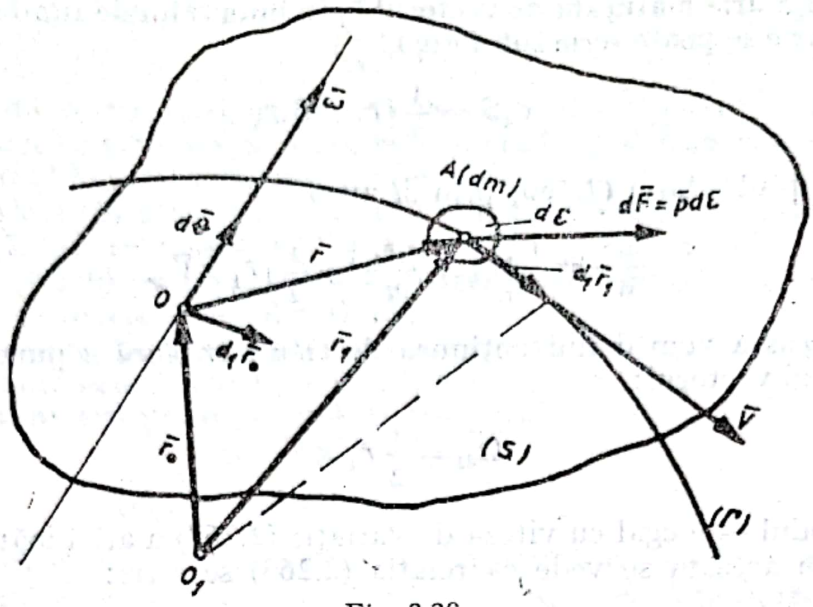


Fig. 2.29

şi *energia cinetică a sistemului* (S) ca fiind suma acestor energii pentru toate punctele sistemului, deci:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{(S)} V^2 \, dm. \tag{2.274}$$

Cazuri particulare ale relaţiei (2.274)

—1) *Punctul material.*

$$dm = m\delta(A)\, d\varepsilon;$$

$$E_c = \frac{1}{2} mV^2. \tag{2.275}$$

—2) *Sistem discret de puncte materiale.*

$$dm = \sum_i m_i \delta(A_i)\, d\varepsilon;$$

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2. \tag{2.276}$$

—3) *Rigid.*

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r};$$

$$V^2 = \bar{V} \cdot \bar{V} = V_0^2 + 2\bar{V}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Utilizînd relaţiile (1.36), (1.448), (2.212), (2.216) şi (2.221) putem scrie:

$$E_c = \frac{V_0^2}{2}\int_{(S)} dm + \bar{V}_0 \cdot \left(\bar{\omega} \times \int_{(S)} \bar{r}\, dm\right) + \frac{\bar{\omega}}{2} \cdot \int_{(S)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\, dm =$$

$$= \frac{mV_0^2}{2} + \bar{V}_0 \cdot (\bar{\omega} \times m\bar{r}_c) + \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{K}_0;$$

$$E_c = \frac{1}{2} mV_0^2 + m\bar{V}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) + \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{K}_0 =$$

$$= \frac{1}{2} mV_0^2 + m\bar{V}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}] \cdot [J]_0 \cdot [\omega]. \tag{2.277}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația (2.277) se poate transforma la rîndul ei ținînd cont de relația:

$$\bar{V}_c = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c,$$

sub forma:

$$E_c = \frac{1}{2} m(\bar{V}_c - \bar{\omega} \times \bar{r}_c)^2 + m(\bar{V}_c - \bar{\omega} \times \bar{r}_c)(\bar{\omega} \times \bar{r}_c) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_0 =$$

$$= \frac{1}{2} m V_c^2 - m\bar{V}_c \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) + \frac{1}{2} m(\bar{\omega} \times \bar{r}_c)^2 + m\bar{V}_c(\bar{\omega} \times \bar{r}_c) -$$

$$- m(\bar{\omega} \times \bar{r}_c)^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_0;$$

$$E_c = \frac{1}{2} m V_c^2 - \frac{1}{2} m(\bar{\omega} \times \bar{r}_c)^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_0. \tag{2.278}$$

Putem scrie următoarele cazuri particulare mai importante ale relației (2.277) sau (2.278):

a) *Rigid în mișcare de translație* ($\bar{\omega} = 0$)

$$E_c = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V_c^2. \tag{2.279}$$

b) *Rigid cu un punct fix O* ($\bar{V}_0 = 0$). Lucrînd în sistemul principal de inerție $Oxyz$ avem $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ și deci:

$$E_c = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_0 = \frac{1}{2} (J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2). \tag{2.280}$$

c) *Rigid cu axă fixă* (Δ).

Alegem O pe axa (Δ) și axa $Oz \equiv (\Delta)$:

$$\bar{V}_0 = 0$$

$$\bar{\omega}(0, 0, \omega_z)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_0 = \frac{1}{2} \omega_z K_{0z} = \frac{1}{2} \omega_z (J_{zz}\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y). \tag{2.281}$$

d) *Rigid în mișcare generală.*

Alegem $O \equiv C$

$$\bar{r}_c = 0$$

$$E_c = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_c. \tag{2.282}$$

Relația (2.282) este cunoscută în Mecanică sub denumirea de *formula lui Koenig*. Ea ne arată că energia cinetică a oricărui rigid se compune din energia centrului maselor C în care se presupune concentrată întreaga masă m a rigidului (E_t) și energia punctelor rigidului la mișcarea acestora față de centrul maselor (E_r):

$$E_c = E_t + E_r; \tag{2.283}$$

$$E_t = \frac{1}{2} m V_c^2; \tag{2.284}$$

$$E_r = \frac{1}{2} \int_{(S)} (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})\, dm = \frac{1}{2} \int_{(S)} \bar{\omega} \cdot [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})]\, dm;$$

$$E_r = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_c. \tag{2.285}$$

Scanned with OKEN Scanner

4) *Sisteme de rigide*: (S_1), (S_2), ..., (S_n).

Aplicînd pentru fiecare rigid în parte formula (2.282), întrucît integrala (2.274) este aditivă pe domenii disjuncte, obținem:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{ci}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i \cdot \bar{K}_{ci}. \tag{2.286}$$

Vom reveni acum la sistemul de puncte (S) din figura 2.29. Punctul A descrie în timp traiectoria absolută (Γ). Notînd cu $\bar{r}_1$ vectorul de poziție al lui A față de un punct fix O_1, punctul A se va deplasa pe (Γ) într-un interval de timp elementar dt cu vectorul $d_1\bar{r}_1$, coliniar cu $\bar{V}$ conform relației:

$$d_1\bar{r}_1 = \bar{V} \cdot dt. \tag{2.287}$$

Vecinătății de a lui A îi revine forța elementară:

$$d\bar{F} = \bar{p}\, d\varepsilon = \left[\bar{p}_c + \sum_i \bar{F}_i \delta(A_i)\right] \cdot d\varepsilon. \tag{2.288}$$

Vom defini cu aceste mărimi *lucrul mecanic elementar al punctului A* din sistem la deplasarea lui elementară în intervalul de timp dt ca fiind infinitul mic de ordinul al doilea:

$$d_1\, dL = d_1\bar{r}_1 \cdot d\bar{F} = \bar{V} \cdot d\bar{F} \cdot dt. \tag{2.289}$$

Vom defini *lucrul mecanic elementar al întregului sistem* (S) la deplasarea sa elementară în intervalul de timp dt ca fiind suma lucrurilor mecanice ale tuturor punctelor din sistem, obținînd astfel infinitul mic de ordinul întîi:

$$d_1 L = \int_{(S)} d_1\, dL = \left(\int_{(S)} \bar{V} \cdot d\bar{F}\right) dt = \left(\int_{(S)} \bar{V} \cdot \bar{p} \cdot d\varepsilon\right) dt. \tag{2.290}$$

Vom defini *lucrul mecanic finit al sistemului* (S) la deplasarea sa finită în intervalul de timp $t_2 - t_1$ ca fiind:

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} d_1 L = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} \bar{V} \cdot d\bar{F}\right) dt. \tag{2.291}$$

Vom vedea ulterior că la calcularea integralei (2.290) de multe ori în final nu mai apare infinitul mic dt, ci în general o sumă de infiniți mici ai unor parametrii care definesc poziția momentană a sistemului. Plecînd de la această observație vom scrie în general relația (2.291) sub forma:

$$L_{12} = \int_{(1)}^{(2)} d_1 L = \int_{(1)}^{(2)} \int_{(S)} d_1\bar{r}_1 \cdot d\bar{F}, \tag{2.292}$$

notînd simbolic prin (1) și (2) pozițiile sistemului la două momente arbitrare t_1 și t_2 și înțelegînd că integrala (2.292) se calculează înlocuind parametrii din primitiva funcției de integrat prin valorile lor în poziția (2) a sistemului, apoi în poziția (1) și scăzînd între ele rezultatele celor două înlocuiri.

Facem observația că în general valoarea integralei (2.292) depinde nu numai de pozițiile (1) și (2) ale sistemului (S) ci și de modul în care se produce mișcarea sistemului între aceste două poziții (adică de traiectoriile punctelor sistemului). Există totuși o excepție și anume: cazul în care lucrul mecanic elementar $d_1 L$ al sistemului (S) poate fi pus sub forma diferențialei totale exacte a unei funcții scalare de n parametri $q_1, q_2, ..., q_n$, care definesc

Scanned with OKEN Scanner

poziția momentană a sistemului. Cu alte cuvinte, cînd există o funcție $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ astfel încît să putem scrie relația:

$$\mathrm{d}_1 L = \mathrm{d}_1 U, \tag{2.293}$$

lucrul mecanic finit (2.292) al sistemului (S) depinde doar de poziția inițială (1) și finală(2) a sistemului și nu de evoluția acestuia între respectivele poziții, după cum se vede din relația:

$$L_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}_1 L = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}_1 U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)|_{(2)} - \\ - U(q_1, q_2, \ldots, q_n)|_{(1)}, \tag{2.294}$$

sau pe scurt:

$$L_{12} = U_2 - U_1. \tag{2.295}$$

Un astfel de sistem mecanic (de puncte și forțe) îl vom numi pe viitor *sistem mecanic conservativ*. După cum se vede din relația:

$$\mathrm{d}_1 U = \int_{(S)} \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 \cdot \mathrm{d}\bar{F} = \int_{(S)} \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 \cdot \bar{p}\, \mathrm{d}\varepsilon, \tag{2.296}$$

ceea ce conferă unui sistem mecanic calitatea de a fi conservativ este densitatea de forță $\bar{p}$ care trebuie să fie în primul rînd funcție numai de parametrii poziționali (condiția necesară) și în al doilea rînd astfel încît integrala (2.296) să fie o diferențială totală exactă (condiția suficientă). Un sistem de forțe a cărui densitate de forță îndeplinește condițiile de mai sus se numește *sistem de forțe conservativ*, iar funcția scalară *U funcția de forțe* a sistemului mecanic conservativ. Se observă că funcția de forțe a unui sistem conservativ poate fi determinată numai cu aproximația unei constante arbitrare C_1, a cărei prezență însă vom vedea că nu împiedică utilizarea acestei funcții în studiul mișcării sistemelor conservative. Totuși, pentru a stabili o valoare precisă pentru această constantă arbitrară s-a făcut convenția de a se atribui valoarea zero funcției de forțe U în poziția de echilibru static a sistemului. Vom studia mai jos cîteva cazuri particulare mai importante ale relațiilor (2.290) și (2.291) și vom da cîteva exemple de sisteme mecanice conservative.

Forme particulare ale lucrului mecanic elementar (2.290) și finit (2.291) al unor sisteme mecanice:

1) *Punct material acționat de forțe concentrate.*

$$\bar{p} = \sum_i \bar{F}_i \delta(A);$$

$$\mathrm{d}_1 L = \int_{(S)} \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 \cdot \sum_i \bar{F}_i \delta(A) \cdot \mathrm{d}\varepsilon = (\Sigma \bar{F}_i) \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 = \bar{R} \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_1;$$

$$\mathrm{d}_1 L = \bar{R} \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_1; \tag{2.297}$$

$$L_{12} = \int_{(A_1)}^{(A_2)} \bar{R} \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 = \int_{(A_1)}^{(A_2)} (R_{x_1} \cdot \mathrm{d}_1 x_1 + R_{y_1} \cdot \mathrm{d}_1 y_1 + R_{z_1} \cdot \mathrm{d}_1 z_1) \tag{2.298}$$

Integralele (2.298) sînt integrale curbilinii pe traiectoria punctului A între pozițiile A_1 și A_2.

Scanned with OKEN Scanner

— *Sistem discret de puncte materiale acționat de forțe concentrate*

$$\bar{p} = \sum_i \bar{R}_i \delta(A_i);$$

$$\mathrm{d}_1 L = \int_{(S)} \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 \cdot \sum_i \bar{R}_i \delta(A_i) \cdot \mathrm{d}\varepsilon = \sum_i \int_{(S)} \bar{R}_i \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 \delta(A_i)\, \mathrm{d}\varepsilon;$$

$$\mathrm{d}_1 L = \sum_i \bar{R}_i \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_{1i}; \tag{2.299}$$

$$L_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \sum_i \bar{R}_i \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_{1i} = \sum_i \int_{(A_{i1})}^{(A_{i2})} \bar{R}_i \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_{1i}. \tag{2.300}$$

Integralele (2.300) sînt integrale curbilinii pe traiectoriile punctelor A_i între pozițiile A_{i1} și A_{i2}.

3) *Rigid acționat de un sistem de forțe oarecare*

$$\mathrm{d}_1\, \mathrm{d}L = \mathrm{d}_1 \bar{r}_1 \cdot \mathrm{d}\bar{F} = \bar{V} \cdot \mathrm{d}\bar{F} \cdot \mathrm{d}t = (\bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \mathrm{d}\bar{F} \cdot \mathrm{d}t = \bar{V}_0 \cdot \mathrm{d}\bar{F} \cdot \mathrm{d}t +$$
$$+ \mathrm{d}\bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \mathrm{d}t = \bar{V}_0 \cdot \mathrm{d}\bar{F} \cdot \mathrm{d}t + \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \mathrm{d}\bar{F}) \cdot \mathrm{d}t. \tag{2.301}$$

Notînd deplasarea elementară a punctului O al rigidului (fig. 2.29) prin:

$$\mathrm{d}_1 \bar{r}_0 = \bar{V}_0 \cdot \mathrm{d}t, \tag{2.302}$$

și definind vectorul *rotație elementară* a rigidului în jurul axei instantanee de rotație trecînd prin O (fig. 2.29) ca fiind:

$$\mathrm{d}\bar{\theta} = \bar{\omega} \cdot \mathrm{d}t, \tag{2.303}$$

relația (2.301) devine:

$$\mathrm{d}_1\, \mathrm{d}L = \mathrm{d}_1 \bar{r}_0 \cdot \mathrm{d}\bar{F} + \mathrm{d}\bar{\theta} \cdot (\bar{r} \times \mathrm{d}\bar{F}). \tag{2.304}$$

Cu aceasta putem scrie:

$$\mathrm{d}_1 L = \mathrm{d}_1 \bar{r}_0 \cdot \int_{(S)} \mathrm{d}\bar{F} + \mathrm{d}\bar{\theta} \cdot \int_{(S)} \bar{r} \times \mathrm{d}\bar{F};$$

$$\mathrm{d}_1 L = \bar{R} \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_0 + \bar{M}_0 \cdot \mathrm{d}\bar{\theta}; \tag{2.305}$$

$$L_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}_1 L = \int_{(1)}^{(2)} (\bar{R} \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_0 + \bar{M}_0 \cdot \mathrm{d}\bar{\theta}). \tag{2.306}$$

Vom face observația că sistemul forțelor interioare ale unui rigid (fiind două cîte două egale în modul și opuse ca sens pe același suport) are în orice punct O torsorul de reducere nul, adică:

$$\bar{R}_I = 0; \quad \bar{M}_{OI} = 0. \tag{2.307}$$

În acest caz relația (2.305) ne arată că lucrul mecanic elementar al sistemului de forțe interioare ale unui rigid este nul la orice deplasare elementară a rigidului:

$$\mathrm{d}_1 L_I = 0, \tag{2.308}$$

ceea ce nu se întîmplă și în cazul unui sistem discret de puncte cu cel puțin o viteză relativă diferită de zero. Într-adevăr, în acest caz nu mai putem spune că sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă $\bar{R}$ și un cuplu de moment

Scanned with OKEN Scanner

$\bar{M}_0$, forțele nemaifiind vectori alunecători (a se vedea paragraful 1.1.21) și deci aplicarea relației (2.305) este exclusă. Fie A și B două puncte ale sistemului (fig. 2.30) și fie $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ cele două forțe interioare de interacțiune ale punctelor A și B. Lucrul mecanic elementar al forțelor interioare al întregului sistem (d_1L) se compune din lucrurile mecanice elementare (d_1L_{AB}) ale unor asemenea perechi de forțe:

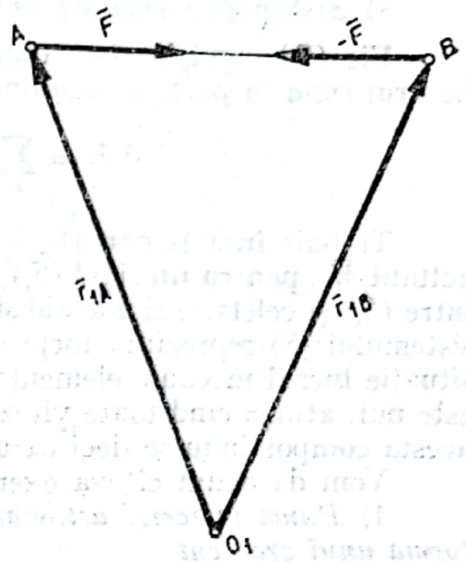


Fig. 2.30

$$\mathrm{d}_1L_{(AB)} = \bar{F}\cdot\mathrm{d}_1\bar{r}_{1A} - \bar{F}\cdot\mathrm{d}_1\bar{r}_{1B} = \bar{F}\cdot(\bar{V}_A - \bar{V}_B)\cdot\mathrm{d}t = \bar{F}\cdot(\bar{V}_B + \bar{\omega}\times\overline{BA} + \bar{V}_{rA} - \bar{V}_B)\cdot\mathrm{d}t = \bar{F}\cdot(\bar{\omega}\times\overline{BA})\cdot\mathrm{d}t + \bar{F}\cdot\bar{V}_{rA}\cdot\mathrm{d}t. \quad (2.309)$$

Dar:

$$\bar{F} = \lambda\overline{BA}; \quad \bar{V}_{rA} = \frac{\mathrm{d}(\overline{BA})}{\mathrm{d}t}, \quad (2.310)$$

și deci:

$$\mathrm{d}_1L_{(AB)} = \lambda\overline{BA}\cdot(\bar{\omega}\times\overline{BA})\,\mathrm{d}t + \lambda\overline{BA}\cdot\frac{\mathrm{d}(\overline{BA})}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \lambda\overline{BA}\cdot\mathrm{d}(\overline{BA}) = \frac{\lambda}{2}\mathrm{d}(\overline{BA}\cdot\overline{BA}) = \frac{\lambda}{2}\mathrm{d}(BA^2);$$

$$\mathrm{d}_1L_{(AB)} = \bar{F}\cdot\bar{V}_{rA}\cdot\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2}\mathrm{d}(BA^2). \quad (2.311)$$

La prima vedere s-ar părea că lucrul mecanic elementar din (2.311) ar putea fi nul și cînd viteza relativă a lui A față de B e diferită de zero, dar perpendiculară pe $\bar{F}$. Se poate însă alege întotdeauna triedrul mobil cu originea în B astfel ca vectorul $\overline{BA}$ să nu-și schimbe direcția față de axele acestui triedru. Atunci $\bar{V}_{rA}$ este coliniar cu $\overline{BA}$ și deci și cu $\bar{F}$ și singura posibilitate pentru anularea expresiei (2.311) este ca:

$$\bar{V}_{rA} = 0, \quad (2.312)$$

sau altfel spus:

$$BA = \text{const.} \quad (2.313)$$

și deci sistemul discret de puncte să se comporte ca un rigid. Se știe că la un rigid toate vitezele relative (între punctele rigidului) sînt nule. Astfel am demonstrat faptul că lucrul mecanic elementar al sistemului de forțe interioare ale unui sistem discret de puncte cu cel puțin o viteză relativă nenulă este în general diferit de zero, fiind egal cu lucrul mecanic elementar al forțelor interioare la deplasările elementare relative ale punctelor sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

4) *Sistem de rigide acționate de forțe oarecare.*

Fie (S_i) rigidele sistemului (S). În acest caz, aplicînd relația (2.305) fiecărui rigid în parte și adunînd relațiile obținem:

$$d_1 L = \sum_i (\bar{R}_i \cdot d_1 \bar{r}_{0i} + \bar{M}_{0i} \cdot d\bar{\theta}_i). \tag{2.314}$$

Trebuie însă remarcat că la calculul rezultantei $\bar{R}_i$ și momentului rezultant $\bar{M}_{0i}$ pentru un rigid (S_i) trebuie ținut cont și de forțele de interacțiune între (S_i) și celelalte rigide ale sistemului (S), deoarece aceste forțe interioare sistemului (S) reprezintă forțe exterioare pentru rigidul (S_i). Într-o singură situație lucrul mecanic elementar al acestor forțe pentru întregul sistem (S) este nul: atunci cînd toate vitezele relative în cadrul sistemului (S) sînt nule, acesta comportîndu-se deci ca un rigid.

Vom da acum cîteva exemple de sisteme mecanice conservative.

1) *Punct material acționat de o forță rezultantă care se poate pune sub forma unui gradient*

$$\bar{R} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \bar{i}_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \bar{j}_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} \bar{k}_1. \tag{2.315}$$

Într-adevăr relația (2.297) scrisă sub forma:

$$d_1 L = R_{x_1} \cdot d_1 x_1 + R_{y_1} \cdot d_1 y_1 + R_{z_1} \cdot d_1 z_1, \tag{2.316}$$

devine o diferențială totală exactă dacă și numai dacă:

$$R_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1}; \quad R_{y_1} = \frac{\partial U}{\partial y_1}; \quad R_{z_1} = \frac{\partial U}{\partial z_1}, \tag{2.317}$$

ceea ce conduce la scrierea rezultantei sub forma (2.315). În acest caz (2.316) ne dă:

$$d_1 L = d_1 U. \tag{2.318}$$

Vom da mai jos cîteva cazuri în care se poate scrie o relație de tipul (2.315) și vom calcula în fiecare caz funcția de forțe U.

a) *Punct material acționat de o forță rezultantă constantă.*

$$\bar{R} = \bar{C}. \tag{2.319}$$

Alegînd, de exemplu, axa $O_1 z_1$ după direcția rezultantei putem scrie:

$$R_{x_1} = 0; \quad R_{y_1} = 0; \quad R_{z_1} = C; \tag{2.320}$$

$$U = C z_1 + C_1. \tag{2.321}$$

b) *Punct material în interacțiune cu n puncte materiale prin forțe de atracție universală.*

Vom considera un triedru fix pe care, pentru simplitate, îl vom nota prin $Oxyz$ (fig. 2.31). Fie punctul material A de masă m și vector de poziție $\bar{r}(x, y, z)$, în interacțiune cu punctele A_i de mase m_i și vectori de poziție $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ prin forțele de atracție universală $\bar{F}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Rezultanta for-

Scanned with OKEN Scanner

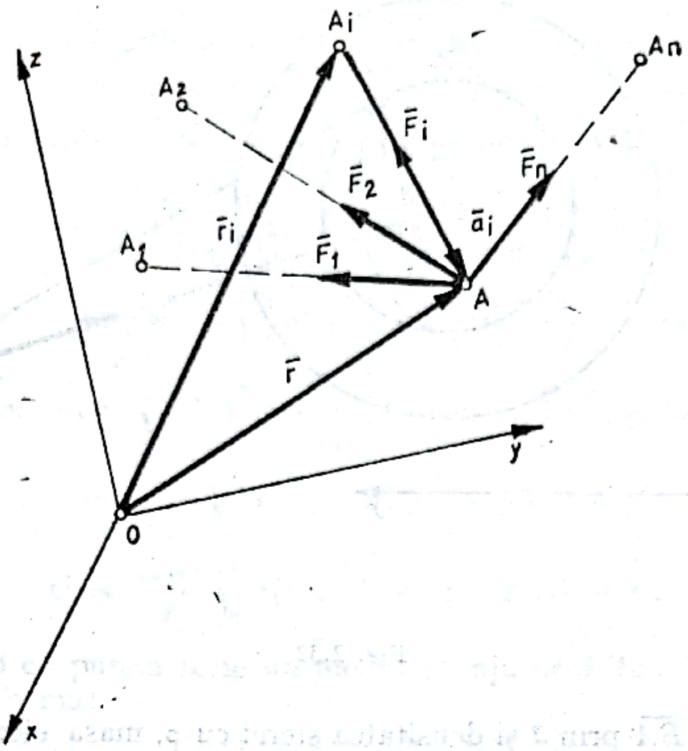


Fig. 2.31

ţelor ce acţionează punctul A se poate scrie utilizînd vectorii $\bar{a}_i = \overline{AA_i}$ din figură sub formele:

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = -\sum_i \frac{Kmm_i}{a_i^3} \cdot \bar{a}_i =$$

$$= -\sum_i \frac{kmm_i[(x - x_i)\,\bar{i} + (y - y_i)\,\bar{j} + (z - z_i)\,\bar{K}]}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y}\,\bar{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z}\,\bar{k} \right) = \frac{\partial U}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\bar{k} = \text{grad } U, \qquad (2.322)$$

în care:

$$U_i = \frac{kmm_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{Kmm_i}{a_i}; \qquad (2.323)$$

$$U = \sum_i U_i + C_1 = \sum_i \frac{kmm_i}{a_i} + C_1. \qquad (2.324)$$

c) *Punct material în interacţiune cu un corp sferic omogen prin forţe de atracţie universală.*

Fie $Oxyz$ un triedru de referinţă fix (fig. 2.32). Fie $A(x, y, z)$ un punct de masă m în interacţiune prin forţe de atracţie universală cu punctele unui corp sferic omogen (S). Fie C centrul sferei (S), R_0 raza sa şi B un punct arbitrar al sferei, pe care îl vom preciza prin coordonatele sferice r, θ, φ.

Scanned with OKEN Scanner

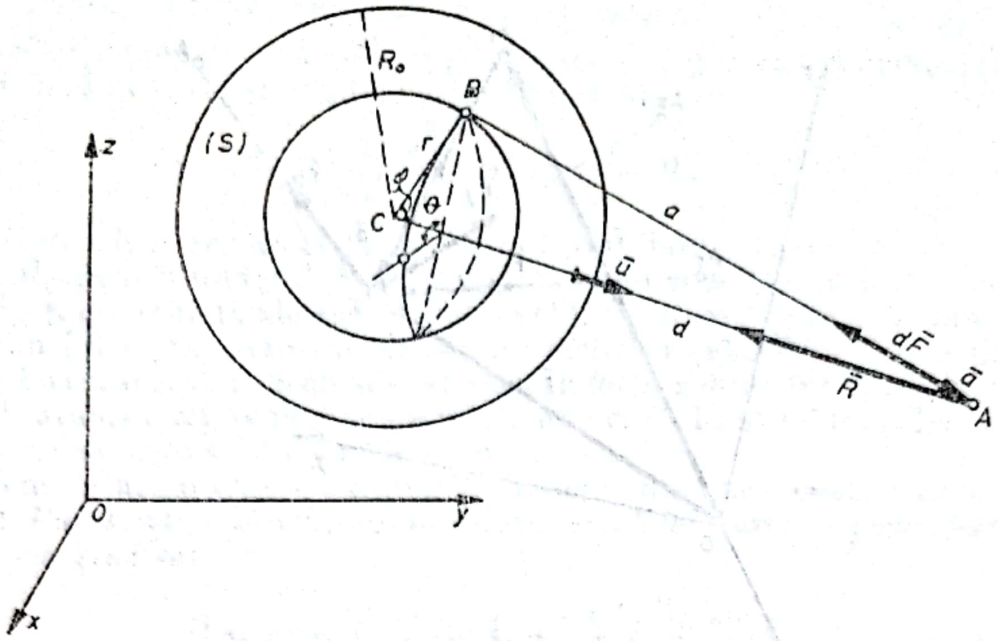


Fig. 2.32

Notînd vectorul $\overline{BA}$ prin $\bar{a}$ și densitatea sferei cu ρ, masa elementului de volum dV din jurul punctului B se scrie:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta, \tag{2.325}$$

iar forța cu care B acționează asupra lui A va fi:

$$d\bar{F} = \frac{-k \cdot m \cdot dm}{a^3}\bar{a}, \tag{2.326}$$

care se poate scrie, conform relațiilor (2.322) și (2.324) aplicate pentru $B \equiv A_1$, sub forma:

$$d\bar{F} = \operatorname{grad}\frac{km\,dm}{a}. \tag{2.327}$$

Rezultanta forțelor $d\bar{F}$ cu care toate punctele B ale sferei (S) acționează asupra lui A se scrie evident sub forma:

$$\bar{R} = \int_{(S)} d\bar{F}. \tag{2.328}$$

Integrala (2.328) se efectuează în raport cu cele trei coordonate r, θ și φ ale lui B, pe cînd gradientul din relația (2.327) se calculează prin derivare în raport cu cele trei coordonate x, y și z ale lui A, care apar astfel ca fiind niște parametri pentru integrală. De aceea se poate scrie din relațiile (2.327) și (2.328):

$$\bar{R} = \int_{(S)} \operatorname{grad}\frac{km\,dm}{a} = \operatorname{grad}\int_{(S)}\frac{km\,dm}{a} = \operatorname{grad} U, \tag{2.329}$$

în care deci:

$$U = \int_{(S)}\frac{km\,dm}{a} + C_1. \tag{2.330}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd $CA = d$ putem scrie:

$$a = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}. \tag{2.331}$$

Utilizînd relaţiile (2.325) şi (2.331), funcţia de forţe U (2.330) se calculează astfel:

$$U - C_1 = \iiint_{(S)} \frac{km\,\rho\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}} =$$

$$= km\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R_0} dr \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}} =$$

$$= km\rho \cdot 2\pi \cdot \int_0^{R_0} dr \int_0^{\pi} \frac{r}{d} \cdot \frac{d}{d\varphi} \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi} \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi km\rho}{d} \int_0^{R_0} r(|r + d| - |r - d|)\, dr;$$

$$U = \frac{2\pi km\rho}{d} \int_0^{R_0} r(r + d - |d - r|)\, dr + C_1. \tag{2.332}$$

Observînd că putem scrie un modul cu ajutorul funcţiei treaptă a lui *Heaviside* sub forma:

$$|\alpha| = \alpha[1 - 2H(-\alpha)], \tag{2.333}$$

şi utilizînd relaţia (1.305) relaţia (2.332) se scrie:

$$U - C_1 = \frac{2\pi km\rho}{d} \int_0^{R_0} r\{r + d - (d - r)[1 - 2H(r - d)]\}\, dr =$$

$$= \frac{2\pi km\rho}{d} \int_0^{R_0} [2r^2 + 2r(d - r) \cdot H(r - d)]\, dr =$$

$$= \frac{4\pi km\rho}{d} \left[\frac{R_0^3}{3} + \left(d \cdot \frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^3}{3} - \frac{d^3}{6}\right) \cdot H(R_0 - d)\right].$$

$$U = \begin{cases} 4\pi km\,\rho \left(\dfrac{R_0^2}{2} - \dfrac{d^2}{6}\right) + C_1 & d \leqslant R_0 \\ \dfrac{4\pi km\,\rho\, R_0^3}{3d} + C_1 & d \geqslant R_0. \end{cases} \tag{2.334}$$

Vom calcula acum şi rezultanta $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \operatorname{grad} U = \begin{cases} 4\pi\, km\rho \cdot \operatorname{grad}\left(-\dfrac{d^2}{6}\right) = -\dfrac{4\pi km\rho}{3} \cdot d \cdot \operatorname{grad} d; & d \leqslant R_0 \\ \dfrac{4\pi km\rho\, R_0^3}{3} \operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{d}\right) = -\dfrac{4\pi km\rho\, R_0^3}{d^2} \cdot \operatorname{grad} d; & d \geqslant R_0. \end{cases} \tag{2.335}$$

Însă notînd coordonatele lui C prin x_c, y_c, z_c, avem:

$$\operatorname{grad} d = \operatorname{grad} CA = \operatorname{grad} \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2} =$$

$$= \frac{(x - x_c)\,\bar{i} + (y - y_c)\,\bar{j} + (z - z_c)\,\bar{k}}{CA} = \frac{\overline{CA}}{CA};$$

$$\operatorname{grad} d = \bar{u}, \tag{2.336}$$

$\bar{u}$ fiind versorul vectorului $\overline{CA}$.

Scanned with OKEN Scanner

Observînd acum că masa sferei omogene (S) este:

$$M_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3} \cdot \rho, \tag{2.337}$$

și că masa unei sfere (S') de rază d și densitate ρ (sfera cu centrul în C pe a cărei suprafață se află A) se scrie:

$$M_0' = \frac{4\pi d^3}{3} \cdot \rho, \tag{2.338}$$

cu relațiile (2.336), (2.337) și (2.338), rezultanta (2.335) se scrie:

$$\bar{R} = \begin{cases} -\frac{KmM_0'}{d^2}\,\bar{u} & d \leqslant R_0 \\ -\frac{KmM_0}{d^2}\,\bar{u} & d \geqslant R_0. \end{cases} \tag{2.339}$$

Deci din punct de vedere al forțelor de atracție universală pe care le exercită asupra unui punct A o sferă omogenă (S) se comportă ca și un punct material situat în centrul sferei, în care concentrăm întreaga masă a sferei (S) dacă punctul A este exterior ei, iar dacă punctul A este interior sferei vom concentra în centrul ei C masa sferei (S') cu centrul în C, pe care se află punctul A. Altfel spus, dacă ne imaginăm sfera ca fiind compusă din suprafețe materiale (straturi subțiri) concentrice, acțiunea suprafețelor sferice cărora A le este interior (dacă acestea există) este echivalentă cu zero, iar acțiunea suprafețelor sferice cărora A le este exterior este echivalentă cu acțiunea unui punct material situat în centrul sferei și de masă egală cu a acestor suprafețe materiale cu acțiune nenulă.

Dacă (S) este un corp ceresc sferic de rază R_0, presupus omogen și dacă notăm cu g_0 accelerația gravitației la suprafața acelui corp, putem scrie greutatea G a unui punct A de masă m ca fiind modulul rezultantei (2.339):

$$G = |\bar{R}| = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{KmM_0'}{d^2} & d \leqslant R_0 \\ \frac{KmM_0}{d^2} & d \geqslant R_0 \end{array} \right\} = mg \tag{2.340}$$

Scriind relația (2.340) la suprafața lui (S) avem:

$$\frac{KmM_0}{R_0^2} = mg_0 \tag{2.341}$$

și deci:

$$\frac{KM_0}{R_0^2} = g_0, \tag{2.342}$$

cu care calculăm rapoartele:

$$\frac{KM_0}{d^2} = \frac{KM_0}{R_0^2} \cdot \frac{R_0^2}{d^2} = g_0 \cdot \frac{R_0^2}{d^2}; \tag{2.343}$$

$$\frac{KM_0'}{d^2} = \frac{KM_0}{R^2} \cdot \frac{M_0'}{M_0} \cdot \frac{R_0^2}{d^2} = g_0 \cdot \frac{d^3}{R_0^3} \cdot \frac{R_0^2}{d^2} = g_0 \frac{d}{R_0}. \tag{2.344}$$

Scanned with OKEN Scanner

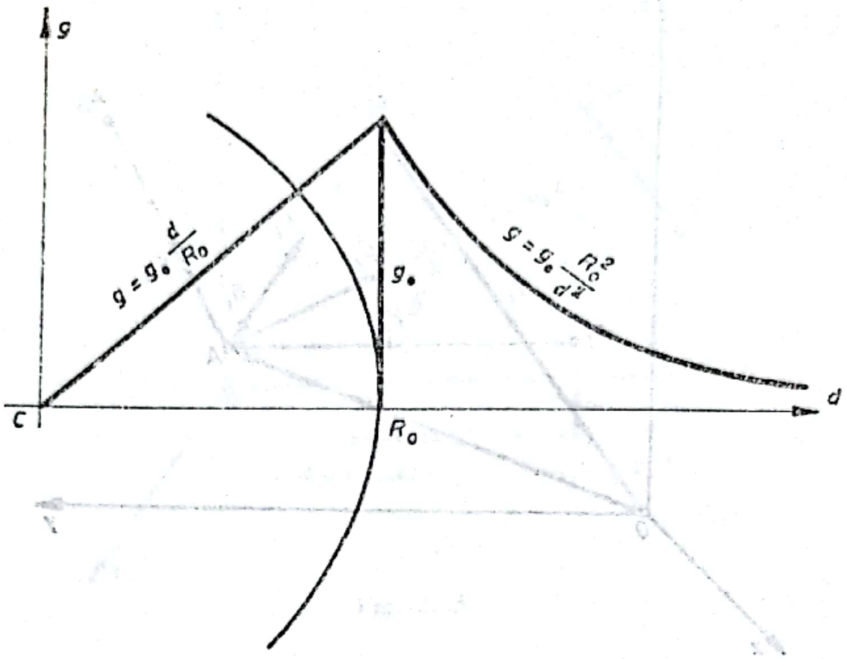


Fig. 2.33

Înlocuind (2.343) şi (2.344) în (2.340), putem scrie legea de variaţie a acceleraţiei gravitaţionale g cu distanţa d la centrul corpului ceresc:

$$g(d) = \begin{cases} g_0 \cdot \dfrac{d}{R_0} & d \leqslant R_0 \\ g_0 \cdot \dfrac{R_0^2}{d^2} & d \geqslant R_0 \end{cases} \tag{2.345}$$

funcţie a cărui grafic este arătat în figura 2.33.

Vom observa acum că dacă deplasările punctului A sînt apreciabile faţă de raza R_0 (mişcările sateliţilor, meteoriţilor, rachetelor etc.) trebuie să ţinem cont de variaţia acceleraţiei gravitaţionale cu distanţa d şi în acest caz funcţia de forţe U este dată de relaţia (2.334) şi de exemplu pentru $d \geqslant R_0$ se scrie:

$$U = \frac{4\pi K m \rho R_0^3}{3d} + C_1 = \frac{KmM_0}{d} + C_1 = \frac{mg_0R_0^2}{d} + C_1, \tag{2.346}$$

pe cînd, dacă mişcările punctului A sînt neglijabile faţă de raza R_0 (de exemplu mişcarea unui punct la suprafaţa Pămîntului, chiar cu o variaţie a altitudinii cu cîţiva kilometri), se poate considera g constant şi deci şi greutatea $G = mg$ constantă şi sîntem în cazul a) studiat mai sus, în care, luînd ca axă Oz verticala ascendentă a locului şi neglijînd mişcarea corpului ceresc (Pămîntul de exemplu), putem scrie:

$$G(0,\ 0,\ -mg);$$

$$U = -mgz + C_1, \tag{2.347}$$

relaţie similară cu (2.321).

d) *Punct material în interacţiune cu n puncte materiale prin forţe de tip elastic.*

Scanned with OKEN Scanner

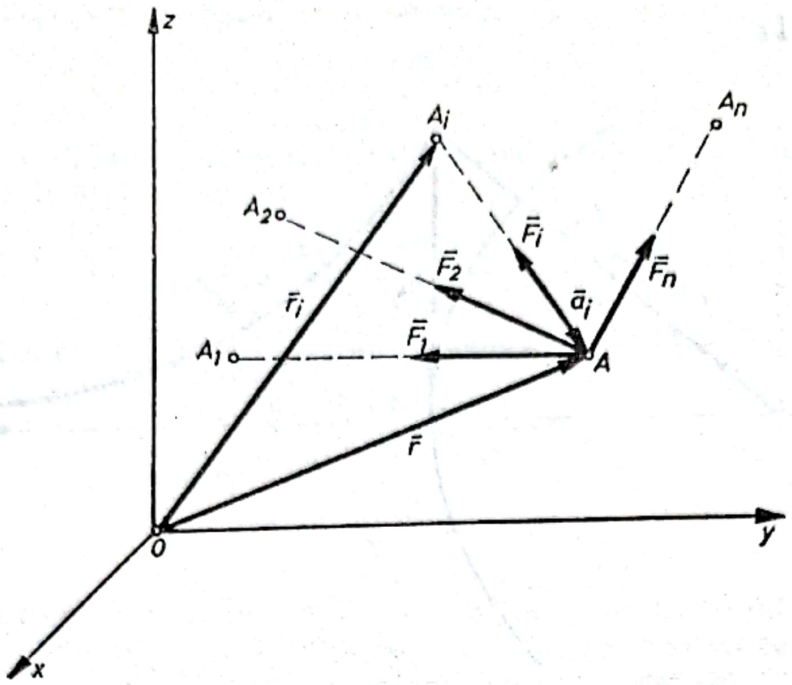


Fig. 2.34

Fie $Oxyz$ un triedru de referință fix (fig. 2.34) și fie A un punct al cărui vector de poziție este $\bar{r}(x, y, z)$. Fie $A_i(i = 1, 2, ..., n)$ n puncte ai căror vectori de poziție sînt $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$. Punctul A interacționează cu punctele A_i prin forțe de tip elastic: forțe dirijate pe suporturile AA_i și proporționale cu distanțele AA_i. Deci:

$$\bar{F}_i = K_i \bar{a}_i = K_i(\bar{r} - \bar{r}_i), \tag{2.348}$$

în care constantele $K_i(i = 1, 2, ..., n)$ sînt numere reale (atît pozitive cît și negative).

Rezultanta forțelor ce acționează punctul A se poate scrie deci:

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \sum_i K_i \bar{a}_i = \sum_i K_i[(x - x_i)\,\bar{i} + (y - y_i)\,\bar{j} + (z - z_i)\,\bar{k}] =$$

$$= \operatorname{grad}\left\{\frac{1}{2}\sum_i K_i[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2] + C_1\right\};$$

$$\bar{R} = \operatorname{grad} U, \tag{2.349}$$

în care:

$$U = \frac{1}{2}\sum_i K_i a_i^2 + C_1. \tag{2.350}$$

Un caz particular foarte important al relației (2.350) este cazul unui punct $A\ (x, y, z)$ legat de originea O a unui triedru fix printr-un resort elastic. Punctul A este acționat în acest caz de forța:

$$\bar{F} = -K\bar{a} = -K\bar{r} \quad (K > 0), \tag{2.351}$$

și funcția de forțe se scrie sub forma:

$$U = -\frac{1}{2}Kr^2 + C_1 = -\frac{1}{2}K(x^2 + y^2 + z^2) + C_1 \tag{2.352}$$

Scanned with OKEN Scanner

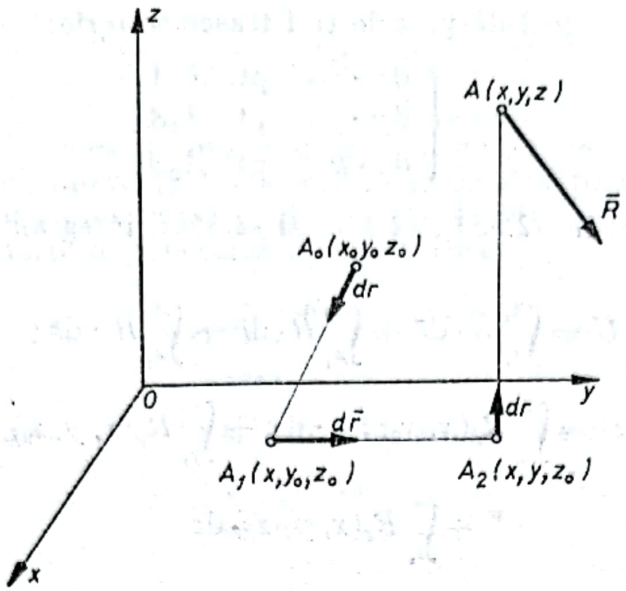


Fig. 2.35

e) *Cazul general al unui punct material acționat de o rezultantă ce derivă dintr-o funcție de forțe.*

Fie $A(x, y, z)$ un punct material acționat de rezultanta $\bar{R}$ ce se scrie analitic față de un triedru fix $Oxyz$ (fig. 2.35) sub forma:

$$\bar{R} = R_x(x, y, z) \cdot \bar{i} + R_y(x, y, z) \cdot \bar{j} + R_z(x, y, z) \cdot \bar{K}, \tag{2.353}$$

în care funcțiile scalare R_x, R_y și R_z sînt astfel date încît putem scrie relația:

$$\bar{R} = \text{grad } U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{K}, \tag{2.354}$$

U fiind funcția de forțe ce urmează a fi determinată. Se spune că în acest caz rezultanta derivă din funcția de forțe U. Pentru ca relația (2.353) să se poată scrie sub forma (2.354) este necesar și suficient ca funcțiile R_x, R_y și R_z să îndeplinească următoarele condiții:

$$\frac{\partial R_x}{\partial y} = \frac{\partial R_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial R_x}{\partial z} = \frac{\partial R_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial R_y}{\partial z} = \frac{\partial R_z}{\partial y}. \tag{2.355}$$

În acest caz putem scrie:

$$\bar{R} \cdot d\bar{r} = dU \tag{2.356}$$

și:

$$U = \int_{A_0}^{A} dU, \tag{2.357}$$

în care integrala nu depinde de drum, iar $A_0\,(x_0, y_0, z_0)$ este un punct fix arbitrar. Vom alege ca traseu de integrare linia poligonală $A_0A_1A_2A$ la care $A_1(x, y_0, z_0)$, $A_2(x, y, z_0)$ și deci dreptele A_0A_1, A_1A_2 și A_2A sînt respectiv paralele cu Ox, cu Oy și cu Oz.

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare vectorul $d\bar{r}$ pe cele trei trasee se scrie:

$$d\bar{r} = \begin{cases} dx \cdot \bar{i} & \text{pt. } A_0A_1 \\ dy \cdot \bar{j} & \text{pt. } A_1A_2 \\ dz \cdot \bar{k} & \text{pt. } A_2A. \end{cases} \tag{2.358}$$

Utilizînd relaţiile (2.353), (2.356) şi (2.358), integrala (2.357) se calculează astfel:

$$U = \int_{A_0}^{A_1} \bar{R} \cdot d\bar{r} + \int_{A_1}^{A_2} \bar{R} \cdot d\bar{r} + \int_{A_2}^{A} \bar{R} \cdot d\bar{r};$$

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} R_x(x, y_0, z_0) \cdot dx + \int_{y_0}^{y} R_y(x, y, z_0) \cdot dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} R_z(x, y, z) \cdot dz. \tag{2.359}$$

Spre exemplu vom considera proiecţiile rezultantei date de relaţiile:

$$\begin{cases} R_x = 2\ xy^3 + yz^2 \\ R_y = 3\ x^2y^2 + xz^2 \\ R_z = 2\ xyz. \end{cases}$$

Condiţiile (2.354) sînt satisfăcute întrucît:

$$\frac{\partial R_x}{\partial y} = \frac{\partial R_y}{\partial x} = 6\ xy^2 + z^2; \quad \frac{\partial R_x}{\partial z} = \frac{\partial R_z}{\partial x} = 2\ yz; \quad \frac{\partial R_y}{\partial z} = \frac{\partial R_z}{\partial y} = 2\ xz.$$

Relaţia (2.359) în acest caz devine:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} (2\ xy_0^3 + y_0z_0^2)\, dx + \int_{y_0}^{y} (3\ x^2y^2 + xz_0^2)\, dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} 2\ xyz\, dz = x^2y_0^3 + xy_0z_0^2 - x_0^2y_0^3 - x_0y_0z_0^2 + x^2y^3 + xyz_0^2 -$$

$$- x^2y_0^3 + xyz^2 - xyz_0^2;$$

$$U(x, y, z) = x^2y^3 + xyz^2 - (x_0^2y_0^3 + x_0y_0z_0^2);$$

$$U(x, y, z) = x^2y^3 + xyz^2 + C_1.$$

2) *Sistem discret de puncte materiale la care fiecare rezultantă ce acţionează un punct derivă dintr-o funcţie de forţe.*

În acest caz vom putea scrie rezultantele forţelor ce acţionează punctele A_i ale sistemului (S) sub forma:

$$\bar{R}_i = \text{grad } U_i \tag{2.360}$$

Dacă notăm deplasările elementare ale punctelor A_i prin $d_1\bar{r}_{1i}$, relaţia (2.299) ne conduce la:

$$d_1L = \sum_i (\text{grad } U_i) \cdot d_1\bar{r}_{1i} = \sum_i d_1U_i = d_1 \sum_i U_i;$$

$$d_1L = d_1U, \tag{2.361}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

$$U = \sum_i U_i. \tag{2.362}$$

Vom da un singur exemplu și anume cazul unui sistem discret de puncte A_i de mase m_i, care interacționează prin forțe de atracție universală. Notînd prin a_{ij} distanța între punctele A_i și A_j, relația (2.324) aplicată în cazul nostru ne dă funcția de forțe a punctului A_i sub forma:

$$U_i = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \frac{Km_i m_j}{a_{ij}} + C_i, \tag{2.363}$$

și în acest caz funcția de forțe a întregului sistem se scrie cu relația (2.362):

$$U = \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \frac{Km_i m_j}{a_{ij}} + C_0. \tag{2.364}$$

În cazul cînd sistemul e format numai din două puncte, relația (2.364) se particularizează prin:

$$U = \frac{2Km_1 m_2}{a_{12}} + C_0. \tag{2.365}$$

3) *Rigid omogen acționat de un sistem de forțe cu distribuție continuă și densitate constantă.*

Fie un rigid omogen (S) acționat de un sistem de forțe cu distribuție continuă și densitate constantă $\bar{p}_c$. Notînd cu ρ densitatea constantă a rigidului (în particular ρ' sau ρ''), cu dm masa unei vecinătăți de ($d\varepsilon = dV$, $d\sigma$, ds) a unui punct A al rigidului, cu $O_1x_1y_1z_1$ un triedru fix, cu O_1z_1 după direcția vectorului $\bar{p}_c$, cu $\bar{r}$ și $\bar{r}_1$ vectorii de poziție ai lui A față de O și respectiv O_1 și cu C centrul maselor rigidului, putem scrie:

$$\bar{R} = \int_{(S)} \bar{p}_c \cdot d\varepsilon = \frac{\bar{p}_c}{\rho} \int_{(S)} dm = \frac{\bar{p}_c}{\rho} m = R_{z1} \cdot \bar{k}_1; \tag{2.366}$$

$$\bar{M}_0 = \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{p}_c \, d\varepsilon = \left(\int_{(S)} \bar{r} \, dm \right) \times \frac{\bar{p}_c}{\rho} = \bar{r}_c m \times \frac{\bar{p}_c}{\rho} = \bar{r}_c \times \bar{R}; \tag{2.367}$$

$$\begin{aligned} d_1 L &= \bar{R} \cdot \bar{V}_0 \cdot dt + \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} \cdot dt = \bar{R} \cdot \bar{V}_0 \cdot dt + (\bar{r}_c \times \bar{R}) \cdot \bar{\omega} \cdot dt = \\ &= \bar{R} \cdot \bar{V}_0 \cdot dt + (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) \cdot \bar{R} \cdot dt = \bar{R} \cdot dt \cdot (\bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c) = \\ &= \bar{R} \cdot dt \cdot \bar{V}_c = \bar{R} \cdot d_1 \bar{r}_{1c} = d_1(\bar{R} \cdot \bar{r}_{1c}) = d_1 U; \end{aligned}$$

$$d_1 L = d_1 U; \tag{2.368}$$

$$U = \bar{R} \cdot \bar{r}_{1c} + C_1 = R_{z1} \cdot z_{1c} + C_1. \tag{2.369}$$

4) *Rigid neomogen aflat într-un cîmp gravitațional constant.*

În acest caz putem scrie:

$$\bar{p}_c \cdot d\varepsilon = \bar{g} \cdot dm, \tag{2.370}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\bar{g}$ fiind vectorul constant ce reprezintă accelerația gravitațională. Alegînd O_1z_1 în sens contrar lui $\bar{g}$ (deci după verticala ascendentă a locului), putem scrie:

$$\bar{R} = \int_{(S)} \bar{p}_e \cdot \mathrm{d}\varepsilon = \bar{g} \int_{(S)} \mathrm{d}m = m\bar{g} = -mg\bar{k}_1; \tag{2.371}$$

$$\bar{M}_0 = \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{p}_e \, \mathrm{d}\varepsilon = \left(\int_{(S)} \bar{r} \, \mathrm{d}m \right) \times \bar{g} = \bar{r}_c m \times \bar{g} = \bar{r}_c \times \bar{R}. \tag{2.372}$$

În rest, calculul este identic cu cel din cazul precedent, obținîndu-se un rezultat similar:

$$\mathrm{d}_1 L = \mathrm{d}_1 U;$$

$$U = \bar{R} \cdot \bar{r}_{1c} + C_1 = -mgz_{1c} + C_1. \tag{2.373}$$

5) *Rigid cu axă fixă acționat de cupluri al căror moment rezultant are proiecție constantă pe axa fixă a rigidului.*

Alegînd în acest caz un triedru $Oxyz$ cu axa Oz după axa fixă a rigidului, putem scrie:

$$M_{0z} = \sum_i M_{iz} = \text{const.} \tag{2.374}$$

$$\bar{\omega}(0,\ 0,\ \omega_z) \tag{2.375}$$

$$\bar{V}_0 = 0 \tag{2.376}$$

și deci:

$$\mathrm{d}_1 L = \bar{R} \cdot \bar{V}_0 \cdot \mathrm{d}t + \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} \cdot \mathrm{d}t = M_{0z} \cdot \omega_z \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= M_{0z} \cdot \mathrm{d}_1\theta = \mathrm{d}_1(M_{0z} \cdot \theta) = \mathrm{d}_1 U;$$

$$\mathrm{d}_1 L = \mathrm{d}_1 U; \tag{2.377}$$

$$U = M_{0z} \cdot \theta + C_1, \tag{2.378}$$

în care θ este unghiul orientat de rotație al rigidului de la o poziție inițială aleasă arbitrar.

O generalizare evidentă a acestui caz este situația în care M_{0z} este o funcție oarecare de θ (în unele sisteme cu legături elastice, de exemplu, M_{0z} poate fi în anumite limite proporțional cu θ, constanta de proporționalitate fiind negativă). În acest caz putem scrie:

$$M_{0z} = M_{0z}(\theta);$$

$$\mathrm{d}_1 L = M_{0z}(\theta) \cdot \mathrm{d}_1\theta = \mathrm{d}_1 U; \tag{2.379}$$

$$U(\theta) = \int M_{0z}(\theta) \cdot \mathrm{d}_1\theta + C_1. \tag{2.380}$$

În cazul cînd:

$$M_{0z} = -K\theta; \tag{2.381}$$

$$U = -\frac{K\theta^2}{2} + C_1. \tag{2.382}$$

Scanned with OKEN Scanner

6) *Rigid neomogen aflat într-un cîmp gravitațional constant și scufundat într-un lichid omogen presupus în repaus.*

Forțele care acționează rigidul în acest caz sînt: forțele de greutate care sînt distribuite în întregul volum al rigidului și forțele datorate presiunii lichidului care se repartizează pe suprafața submersă a rigidului. Această suprafață submersă este suprafața exterioară a rigidului în cazul cînd acesta este complet scufundat. În cazul în care rigidul este doar parțial scufundat suprafața submersă este evident acea parte a suprafeței exterioare a rigidului care vine în contact cu lichidul. Putem însă completa fictiv această suprafață cu secțiunea plană a rigidului care conține linia de plutire întrucît în punctele acestei secțiuni, ca și în punctele suprafeței libere a lichidului (care dealtfel conține în planul ei această secțiune) forțele datorate presiunii lichidului fac echilibru cu forțele datorate presiunii atmosferice. În felul acesta, din punct de vedere al repartizării forțelor de presiune, suprafața submersă poate fi considerată o suprafață închisă indiferent dacă rigidul este scufundat total sau parțial într-un lichid. Mai concret, vom numi pe viitor suprafață submersă, suprafața închisă care delimitează volumul submers. Fie (C) un rigid neomogen (fig. 2.36) scufundat într-un lichid omogen de densitate ρ', presupus în repaus. Fie $O_1x_1y_1z_1$ un triedru fix cu axa O_1z_1 verticala ascendentă a locului. Fie $Oxyz$ un triedru atașat solidar rigidului. Fie A un punct arbitrar al rigidului al cărui vector de poziție față de O este $\bar{r}$ și dV elementul de volum al unei vecinătăți a lui A. Fie V volumul submers și fie S suprafața submersă (suprafața închisă care delimitează volumul submers). Fie B un punct arbitrar al acestei suprafețe submerse și $d\bar{\sigma}$ un vector aplicat în B, a cărui mărime este egală cu elementul de suprafață $d\sigma$ al unei vecinătăți a lui B pe S, a cărui direcție este normala la S în B și al cărui sens este spre exteriorul volumului V delimitat de S. Fie $\bar{r}$ vectorul de poziție față de O al unui punct oarecare (A sau B) al volumului submers și fie $M(x_1, y_1, z_1)$ un punct arbitrar al fluidului. Fie $z_1 = h$ cota suprafeței libere a lichidului aflat în repaus care după cum se știe este o suprafață plană.

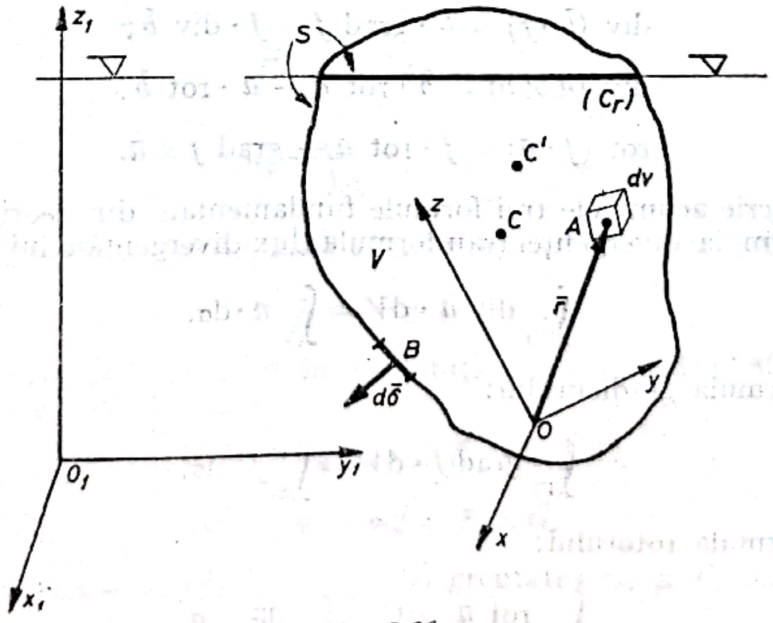


Fig. 2.36

Scanned with OKEN Scanner

În teoria cîmpurilor se demonstrează trei formule fundamentale care stabilesc echivalența unei integrale pe un volum V cu o integrală pe suprafața închisă S care delimitează acest volum. Fie $A(x,y,z)$ un punct al volumului V (inclusiv frontiera S). Fie dV elementul de volum și $d\bar{\sigma}$ vectorul element de arie definiți ca mai sus. Fie $f(x, y, z)$ o funcție scalară și $\bar{u}(x, y, z)$ o funcție vectorială de coordonatele punctului A. Definind operatorii *„divergență"*, *„gradient"* și *„rotor"* prin formulele:

$$\operatorname{div} \bar{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \tag{2.383}$$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}; \tag{2.384}$$

$$\operatorname{rot} \bar{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\bar{k}, \tag{2.385}$$

și introducînd operatorul *„nabla"* ca fiind vectorul simbolic:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}, \tag{2.386}$$

cele trei formule de mai sus se scriu condensat sub forma:

$$\operatorname{div} \bar{u} = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \tag{2.387}$$

$$\operatorname{grad} f = \bar{\nabla} \cdot f \tag{2.388}$$

$$\operatorname{rot} \bar{u} = \bar{\nabla} \times \bar{u} \tag{2.389}$$

care corespund celor trei tipuri de produse definite în calculul vectorial. Cu ajutorul acestor formule simbolice s-au stabilit o serie de relații între operatorii „div", „grad" și „rot", dintre care vom da doar trei care ne vor fi utile:

$$\operatorname{div} (\bar{b} \cdot f) = \bar{b} \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{div} \bar{b}; \tag{2.390}$$

$$\operatorname{div} (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \cdot \operatorname{rot} \bar{a} - \bar{a} \cdot \operatorname{rot} \bar{b}; \tag{2.391}$$

$$\operatorname{rot} (f \cdot \bar{u}) = f \cdot \operatorname{rot} \bar{u} + \operatorname{grad} f \times \bar{u}. \tag{2.392}$$

Vom scrie acum cele trei formule fundamentale din teoria cîmpurilor.

a) Formula divergenței (sau formula flux-divergență a lui *Ostrogradski*):

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \bar{u} \cdot dV = \int_{(S)} \bar{u} \cdot d\bar{\sigma}. \tag{2.393}$$

b) Formula gradientului:

$$\int_{(V)} \operatorname{grad} f \cdot dV = \int_{(S)} f \cdot d\bar{\sigma}. \tag{2.394}$$

c) Formula rotorului:

$$\int_{(V)} \operatorname{rot} \bar{u} \cdot dV = \int_{(S)} d\bar{\sigma} \times \bar{u}. \tag{2.395}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ultimele două formule se deduc din formula divergenței (2.393) în care înlocuim succesiv relațiile:

$$\bar{u} = f \cdot \bar{b}; \tag{2.396}$$

$$\bar{u} = \bar{a} \times \bar{b}, \tag{2.397}$$

cu $\bar{b}$ vector arbitrar constant, în care caz avem:

$$\text{div } \bar{b} = \text{rot } \bar{b} = 0, \tag{2.398}$$

și unde s-a făcut uz și de relațiile (2.390) și (2.391).

Cu ajutorul formulei (2.394) în Hidrostatică se deduce foarte simplu formula presiunii hidrostatice p în punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ al lichidului, sub forma:

$$p = p_a + \rho' g(h - z_1), \tag{2.399}$$

în care p_a este presiunea atmosferică constantă la suprafața liberă a lichidului, ρ' densitatea lichidului, iar $h - z_1$ adîncimea punctului M.

Revenind acum la rigidul (C) din figura 2.36 vom nota prin $(\bar{R}', \bar{M}_0')$ torsorul de reducere în O al forțelor datorate presiunii hidrostatice pe suprafața submersă S și prin $(\bar{R}'', \bar{M}_0'')$ torsorul de reducere în O al forțelor de greutate ale punctelor rigidului (C). Evident, torsorul tuturor acestor forțe va fi:

$$(\bar{R}, \bar{M}_0) = (\bar{R}' + \bar{R}'', \bar{M}_0' + \bar{M}_0''). \tag{2.400}$$

Rezultantele și momentele rezultante din relația (2.400) se calculează cu formulele:

$$\bar{R}' = -\int_{(S)} p \, d\bar{\sigma}; \tag{2.401}$$

$$\bar{M}_0' = -\int_{(S)} \bar{r} \times p \, d\bar{\sigma}; \tag{2.402}$$

$$\bar{R}'' = \int_{(C_r)} \bar{g} \cdot dm; \tag{2.403}$$

$$\bar{M}_0'' = \int_{(C_r)} \bar{r} \times \bar{g} \, dm, \tag{2.404}$$

în care dm este elementul de masă al unei vecinătăți a lui A, iar:

$$\bar{g} = -g\bar{k}_1, \tag{2.405}$$

este vectorul constant al accelerației gravitaționale. Relațiile (2.403) și (2.404) se scriu imediat sub formele:

$$\bar{R}'' = m\bar{g} = \bar{G}; \tag{2.406}$$

$$\bar{M}_0'' = \bar{r}_c \times m\bar{g} = \bar{r}_c \times \bar{G}, \tag{2.407}$$

în care m este masa totală a rigidului, $\bar{G}$ greutatea sa, și C centrul său de greutate.

Scanned with OKEN Scanner

Relațiile (2.401) și (2.402) se calculează cu ajutorul formulelor (2.394) și (2.395) utilizînd și relațiile (2.372), (2.399) și (2.405):

$$\bar{R}' = -\int_{(S)} p \cdot \mathrm{d}\bar{\sigma} = -\int_{(V)} \operatorname{grad} p \cdot \mathrm{d}V = -\int_{(V)} (-\rho' g \bar{k}_1) \cdot \mathrm{d}V =$$

$$= -\rho' \bar{g} \int_{(V)} \mathrm{d}V = -m' \bar{g} = -\bar{G}'; \tag{2.408}$$

$$\bar{M}_0' = -\int_{(S)} \bar{r} \times p \, \mathrm{d}\bar{\sigma} = \int_{(S)} \mathrm{d}\bar{\sigma} \times p\bar{r} = \int_{(V)} \operatorname{rot} p\bar{r} \cdot \mathrm{d}V =$$

$$= \int_{(V)} (p \cdot \operatorname{rot} \bar{r} + \operatorname{grad} p \times \bar{r}) \, \mathrm{d}V = \int_{(V)} \operatorname{grad} p \times \bar{r} \cdot \mathrm{d}V =$$

$$= \int_{(V)} (-\rho' g \bar{k}_1) \times \bar{r} \cdot \mathrm{d}V = \bar{g} \times \int_{(V)} \bar{r} \cdot \rho' \cdot \mathrm{d}V =$$

$$= \bar{g} \times \int_{(V)} \bar{r} \cdot \mathrm{d}m' = \bar{g} \times m' \bar{r}_{c'} = -\bar{r}_{c'} \times \bar{G}'. \tag{2.409}$$

În aceste formule m' și $\bar{G}'$ reprezintă masa și respectiv greutatea volumului de lichid dislocuit, iar C' este centrul de greutate al acestui volum de lichid omogen. Acest punct C', considerat ca fiind centrul de greutate al volumului submers luat ca volum omogen, se numește centrul de carenă. Acest centru este punctul de aplicație al forței arhimedice $-\bar{G}'$, așa cum centrul de greutate al rigidului este punctul de aplicație al forței de greutate $\bar{G}$ a acestuia.

Utilizînd relația (2.400) vom calcula lucrul mecanic elementar cu relația (2.305):

$$\mathrm{d}_1 L = (\bar{R}' \cdot \bar{V}_0 + \bar{M}_0' \cdot \bar{\omega}) \cdot \mathrm{d}t + (\bar{R}'' \cdot \bar{V}_0 + \bar{M}_0'' \cdot \bar{\omega}) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= -[\bar{G}' \cdot \bar{V}_0 + \bar{\omega} \cdot (\bar{r}_c \cdot \bar{G}')] \cdot \mathrm{d}t + [\bar{G} \cdot \bar{V}_0 + \bar{\omega}(\bar{r}_c \times \bar{G})] \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= -\bar{G}' \cdot \bar{V}_{c'} \cdot \mathrm{d}t + \bar{G} \cdot \bar{V}_c \cdot \mathrm{d}t = -\bar{G}' \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_{1c'} + \bar{G} \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_{1c} =$$

$$= G' \cdot \mathrm{d}_1 z_{1c'} - G \cdot \mathrm{d}_1 z_{1c}, \tag{2.410}$$

sau:

$$\mathrm{d}_1 L = m' g \, \mathrm{d}_1 z_{1c'} - mg \, \mathrm{d}_1 z_{1c}. \tag{2.411}$$

În situațiile în care greutatea G' a volumului de lichid dislocuit poate fi exprimată numai în funcție de cota $z_{1c'}$ a centrului de carenă C', relația (2.410) se poate scrie sub forma:

$$\mathrm{d}_1 L = \mathrm{d}_1 U, \tag{2.412}$$

în care:

$$U = \int G'(z_{1c'}) \cdot \mathrm{d}_1 z_{1c'} - G \cdot z_{1c} + C_1. \tag{2.413}$$

Pentru un rigid aflat în imersiune G' este o constantă și deci relația (2.413) se scrie:

$$U = m' g z_{1c'} - mg z_{1c} + C_1. \tag{2.414}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui rigid care plutește se pot stabili funcții:

$$G' = G'(z_{1c'}) \tag{2.415}$$

doar în cazuri particulare (de rigide sau de mișcări).

2.3.12. **Teorema energiei cinetice. Conservarea energiei mecanice.** Fie A un punct al unui sistem (S) de puncte materiale (fig. 2.37). Notăm cu dm masa vecinătății de a lui A, cu $\bar{r}_1$ și $d_1\bar{r}_1$ vectorul de poziție față de punctul fix O_1 și respectiv deplasarea elementară pe traiectoria (Γ) în intervalul de timp dt. Izolînd punctul A din sistem, vom nota cu $d\bar{F}$ rezultanta forțelor exterioare, de legătură și interioare sistemului (S), care acționează asupra punctului A, devenit acum liber. Avem deci:

$$d\bar{F} = d\bar{F}_E + d\bar{F}_L + d\bar{F}_I. \tag{2.416}$$

Punctului liber A, de masă dm, viteză absolută $\bar{V}$ și acționat de forța $d\bar{F}$ îi putem aplica legea a doua a lui *Newton*:

$$d\bar{F} = dm \cdot \bar{a} = dm \cdot \frac{d_1\bar{V}}{dt}. \tag{2.417}$$

Înmulțind scalar relația (2.417) cu deplasarea elementară $d_1\bar{r}_1$ obținem relația:

$$d\bar{F} \cdot d_1\bar{r}_1 = dm \cdot d_1\bar{V} \cdot \frac{d_1\bar{r}_1}{dt} = dm \cdot \bar{V} \cdot d_1\bar{V} = d_1\left(dm \cdot \frac{\bar{V} \cdot \bar{V}}{2}\right) = d_1\left(\frac{V^2}{2} \cdot dm\right), \tag{2.418}$$

care, ținînd cont de relațiile (2.273) și (2.289), se scrie:

$$d_1 dL = d_1(dE_c). \tag{2.419}$$

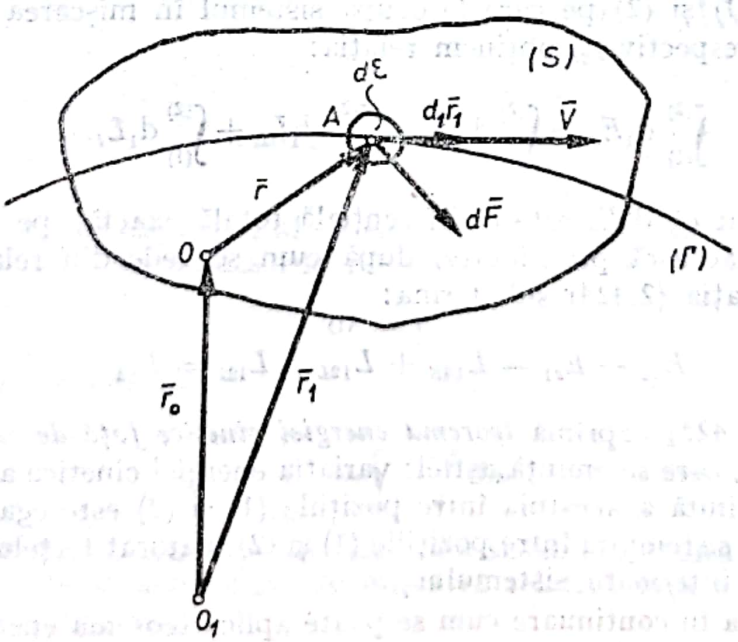


Fig. 2.37

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd relația (2.419) pe întregul sistem (S) obținem relația:

$$\int_{(S)} \mathrm{d}_1 \mathrm{d}L = \mathrm{d}_1 \int_{(S)} \mathrm{d}E_c, \tag{2.420}$$

care, ținînd cont de relațiile (2.274) și (2.290) se scrie:

$$\mathrm{d}_1 L = \mathrm{d}_1 E_c. \tag{2.421}$$

Introducînd (2.416) în (2.290) obținem:

$$\mathrm{d}_1 L = \left[\int_{(S)} \bar{V} \cdot (\mathrm{d}\bar{F}_E + \mathrm{d}\bar{F}_L + \mathrm{d}\bar{F}_I)\right] \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \left(\int_{(S)} \bar{V} \cdot \mathrm{d}\bar{F}_E\right) \cdot \mathrm{d}t + \left(\int_{(S)} \bar{V} \cdot \mathrm{d}\bar{F}_L\right) \cdot \mathrm{d}t + \left(\int_{(S)} \bar{V} \cdot \mathrm{d}\bar{F}_I\right) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \mathrm{d}_1 L_E + \mathrm{d}_1 L_L + \mathrm{d}_1 L_I, \tag{2.422}$$

cei trei termeni reprezentînd lucrul mecanic elementar al sistemului (S) datorat respectiv forțelor exterioare, de legătură și interioare. Cu aceasta relația (2.421) se scrie explicit sub forma:

$$\mathrm{d}_1 E_c = \mathrm{d}_1 L_E + \mathrm{d}_1 L_L + \mathrm{d}_1 L_I = \mathrm{d}_1 L. \tag{2.423}$$

Relația (2.423) exprimă *teorema energiei cinetice față de un punct fix, sub formă diferențială*, care se enunță astfel: variația energiei cinetice a unui sistem la o deplasare elementară a acestuia este egală cu lucrul mecanic elementar al sistemului datorat forțelor exterioare, de legătură și interioare sistemului.

Integrînd relația (2.423) pe un interval de timp finit $t_2 - t_1$, sau, în general, între pozițiile (1) și (2) pe care le ocupă sistemul în mișcarea sa finită la momentele t_1, respectiv t_2, obținem relația:

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}_1 E_c = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}_1 L_E + \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}_1 L_L + \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}_1 L_I. \tag{2.424}$$

Ținînd cont că $\mathrm{d}_1 E_c$ este o diferențială totală exactă, pe cînd $\mathrm{d}_1 L$ nu are în general această proprietate, după cum se vede din relația (2.292), putem scrie relația (2.424) sub forma:

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{12E} + L_{12L} + L_{12I} = L_{12} \tag{2.425}$$

Relația (2.425) exprimă *teorema energiei cinetice față de un punct fix, sub formă finită*, care se enunță astfel: variația energiei cinetice a unui sistem la o deplasare finită a acestuia între pozițiile (1) și (2) este egală cu lucrul mecanic finit al sistemului între pozițiile (1) și (2), datorat forțelor exterioare, de legătură și interioare sistemului.

Vom vedea în continuare cum se poate aplica teorema energiei cinetice față de puncte mobile.

Scanned with OKEN Scanner

a) *Sistem discret de puncte materiale.*

Fie (S) un asemenea sistem discret (fig. 2.37). Fie O un punct mobil în care vom lua originea unui triedru $Oxyz$ ale cărui axe le vom lua paralele cu axele triedrului fix $O_1x_1y_1z_1$. În acest caz putem scrie relaţiile:

$$\bar{\omega} = 0; \tag{2.426}$$

$$\frac{d_1\bar{\alpha}}{dt} = \frac{d\bar{\alpha}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\alpha}}{dt}; \tag{2.427}$$

$$d_1\bar{\alpha} = d\bar{\alpha} \ (\bar{\alpha} \text{ arbitrar}); \tag{2.428}$$

$$\frac{d_1\bar{r}_1}{dt} = \bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} + \bar{V}_r = \bar{V}_0 + \bar{V}_r. \tag{2.429}$$

Relaţia (2.417) se scrie deci:

$$d\bar{F} = dm\cdot\frac{d\bar{V}}{dt} = dm\cdot\left(\frac{d\bar{V}_0}{dt} + \frac{d\bar{V}_r}{dt}\right), \tag{2.430}$$

şi deci putem scrie:

$$d\bar{F}\cdot d\bar{r} = dm\left(d\bar{V}_0\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} + d\bar{V}_r\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right) =$$

$$= d\bar{V}_0\cdot\frac{d}{dt}(\bar{r}\cdot dm) + \bar{V}_r\cdot d\bar{V}_r\cdot dm. \tag{2.431}$$

Integrînd relaţia (2.431) pe întregul sistem (S) obţinem:

$$\int_{(S)} d\bar{F}\cdot d\bar{r} = d\bar{V}_0\cdot\frac{d}{dt}\left(\int_{(S)}\bar{r}\,dm\right) + \int_{(S)} d\left(\frac{\bar{V}_r\cdot\bar{V}_r}{2}\right)\cdot dm =$$

$$= d\bar{V}_0\cdot\frac{d}{dt}(m\bar{r}_c) + d\left(\int_{(S)}\frac{V_r^2}{2}\,dm\right) = m\cdot d\bar{r}_c\cdot\frac{d\bar{V}_0}{dt} + d\left(\int_{(S)}\frac{V_r^2}{2}\,dm\right). \tag{2.432}$$

Însă:

$$dL_r = \int_{(S)} d\bar{F}\cdot d\bar{r}, \tag{2.433}$$

este lucrul mecanic elementar al sistemului datorat forţelor exterioare de legătură şi interioare, la deplasările relative faţă de O:

$$d\bar{r} = \bar{V}_r\cdot dt \tag{2.434}$$

ale punctelor sistemului.

Expresia:

$$E_{cr} = \int_{(S)}\frac{V_r^2}{2}\,dm, \tag{2.435}$$

reprezintă energia cinetică totală relativă a sistemului, adică energia cinetică a punctelor sale animate doar de mişcarea relativă faţă de O. Cu aceasta relaţia (2.432) se scrie:

$$dL_r = dE_{cr} + m\cdot d_1\bar{r}_c\cdot\bar{a}_0. \tag{2.436}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația (2.436) se reduce la forma simplă:

$$dE_{cr} = dL_r, \tag{2.437}$$

similară cu (2.423) dacă punctul O este:

1) centrul maselor C sau un punct cu o mișcare identică cu a acestuia ($\bar{r}_c = 0$ sau $\bar{r}_c = \bar{C}_1$ și deci $d_1\bar{r}_c = 0$), sau

2) un punct în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă ($\bar{a}_0 = 0$), sau

3) un punct cu accelerația perpendiculară pe viteza relativă a centrului maselor $\left(\bar{a}_0 \perp \frac{d\bar{r}_c}{dt} \Rightarrow \bar{a}_0 \perp d_1\bar{r}_c\right)$.

b) *Continuum rigid.*

Fie (S) un continuum rigid (fig. 2.37). Fie O un punct al rigidului în care vom lua originea unui triedru $Oxyz$ solidar atașat rigidului. În acest caz putem scrie relațiile:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}_r = 0; \tag{2.438}$$

$$\frac{d_1\bar{r}_1}{dt} = \bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} + \bar{V}_r = \bar{V}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}; \tag{2.439}$$

$$d_1\bar{r}_1 = \bar{V}_0 \cdot dt + (\bar{\omega}\times\bar{r})\cdot dt, \tag{2.440}$$

$$d_1\bar{r}_1 = d_1\bar{r}_0 + d_1\bar{r}; \tag{2.441}$$

$$d_1\bar{r} = (\bar{\omega}\times\bar{r})\cdot dt. \tag{2.442}$$

Relația (2.317) se scrie deci:

$$d\bar{F} = dm\cdot\left[\frac{d_1\bar{V}_0}{dt} + \frac{d_1(\bar{\omega}\times\bar{r})}{dt}\right], \tag{2.443}$$

și deci putem scrie:

$$\begin{aligned} d\bar{F}\cdot d_1\bar{r} &= dm\cdot\left[d_1\bar{V}_0\cdot\frac{d_1\bar{r}}{dt} + d_1(\bar{\omega}\times\bar{r})\cdot\frac{d_1\bar{r}}{dt}\right] = \\ &= dm\cdot[d_1\bar{V}_0\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}) + (\bar{\omega}\times\bar{r})\cdot d_1(\bar{\omega}\times\bar{r})] = \\ &= dm\cdot\left[d_1\bar{V}_0\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}) + d_1\frac{(\bar{\omega}\times\bar{r})\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r})}{2}\right] = \\ &= dm\cdot d_1\bar{V}_0\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}) + \frac{1}{2}d_1\{\bar{\omega}\cdot[\bar{r}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})]\}\cdot dm. \end{aligned} \tag{2.444}$$

Integrînd (2.444) pe rigidul (S) obținem:

$$\int_{(S)} d\bar{F}\cdot d_1\bar{r} = d_1\bar{V}_0\cdot\left(\bar{\omega}\times\int_{(S)}\bar{r}\,dm\right) + \frac{1}{2}d_1\left[\bar{\omega}\cdot\int_{(S)}\bar{r}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\,dm\right]. \tag{2.445}$$

Însă:

$$\int_{(S)} d\bar{F}\cdot d_1\bar{r} = \int_{(S)} d\bar{F}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r})\cdot dt = \bar{\omega}\cdot dt\int_{(S)}\bar{r}\times d\bar{F} = \bar{\omega}\cdot\bar{M}_0\cdot dt; \tag{2.446}$$

$$\int_{(S)}\bar{r}\,dm = m\bar{r}_c, \tag{2.447}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi conform cu relaţia (2.216) putem scrie:

$$\int_{(S)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\, dm = \bar{K}_0. \tag{2.448}$$

Pe de altă parte avem:

$$d_1(\bar{\omega} \cdot \bar{K}_0) = \frac{d_1(\bar{\omega} \cdot \bar{K}_0)}{dt} \cdot dt = \left(\frac{d_1\bar{\omega}}{dt} \cdot \bar{K}_0 + \bar{\omega} \cdot \frac{d_1\bar{K}_0}{dt}\right) \cdot dt =$$

$$= \left\{\left[\frac{d\bar{\omega}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{\omega})\right] \cdot \bar{K}_0 + \bar{\omega} \cdot \left[\frac{d\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0\right]\right\} dt =$$

$$= \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \cdot \bar{K}_0 + \bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{K}_0}{dt}\right) dt = d(\bar{\omega} \cdot \bar{K}_0). \tag{2.449}$$

Utilizînd relaţiile (2.446)—(2.449), relaţia (2.445) se scrie:

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} \cdot dt = m \vdots d_1\bar{V}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) + d\left(\frac{\bar{K}_0 \cdot \bar{\omega}}{2}\right). \tag{2.450}$$

Remarcăm că relaţia (2.450) se poate obţine şi pe altă cale, plecînd de la relaţia (2.252):

$$\bar{M}_0 = \frac{d_1\bar{K}_0}{dt} + \bar{r}_c \times m \frac{d_1\bar{V}_0}{dt}, \tag{2.451}$$

care prin înmulţire scalară cu $\bar{\omega} \vdots dt$ conduce la:

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} \cdot dt = d_1\bar{K}_0 \vdots \bar{\omega} + (\bar{r}_c \times m \cdot d_1\bar{V}_0) \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \cdot d_1\bar{K}_0 +$$

$$+ m \cdot d_1\bar{V}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_c). \tag{2.452}$$

Însă:

$$\bar{\omega} \cdot d_1\bar{K}_0 = \bar{\omega} \cdot dt \vdots \frac{d_1\bar{K}_0}{dt} = \bar{\omega} \cdot \left(\frac{d\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0\right) \cdot dt = \bar{\omega} \cdot d\bar{K}_0, \tag{2.453}$$

şi pe de altă parte, utilizînd relaţiile (1.430), (1.448) şi (2.321) şi faptul că matricea de inerţie (2.127) este simetrică şi are elementele constante, putem scrie:

$$d\left(\frac{\bar{K}_0 \cdot \bar{\omega}}{2}\right) = \frac{\bar{K}_0 \cdot d\bar{\omega}}{2} + \frac{\bar{\omega} \cdot d\bar{K}_0}{2}; \tag{2.454}$$

$$\bar{K}_0 \vdots d\bar{\omega} = [\widetilde{K}_0] \cdot [d\bar{\omega}] = [\widetilde{J}]_0 \cdot [\bar{\omega}] \cdot [d\bar{\omega}] =$$

$$= [\widetilde{\bar{\omega}}] \cdot [\widetilde{J}]_0 \cdot [d\bar{\omega}] = [\widetilde{\bar{\omega}}] \cdot [J]_0 \cdot [d\bar{\omega}]; \tag{2.455}$$

$$\bar{\omega} \cdot d\bar{K}_0 = [\widetilde{\bar{\omega}}] \cdot [d\bar{K}_0] = [\widetilde{\bar{\omega}}] \cdot [J]_0 [d\bar{\omega}], \tag{2.456}$$

şi deci:

$$\bar{\omega} \cdot d\bar{K}_0 = \bar{K}_0 \cdot d\bar{\omega}, \tag{2.457}$$

şi din relaţiile (2.454) şi (2.453) urmează:

$$d\left(\frac{\bar{K}_0 \cdot \bar{\omega}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\bar{\omega} \cdot d\bar{K}_0}{2} = \bar{\omega} \cdot d\bar{K}_0 = \bar{\omega} \cdot d_1\bar{K}_0. \tag{2.458}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind acum relația (2.458) în (2.452), rezultă relația (2.450).

Privind relația (2.305) putem spune că expresia:

$$dL_r = \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} \cdot dt = \bar{M}_0 \cdot d\bar{\theta} \tag{2.459}$$

reprezintă lucrul mecanic elementar al rigidului la mișcarea sa față de O (și anume la mișcările elementare de rotație ale punctelor sale față de O).

Prin analogie cu relația (2.280), care se referă însă la un rigid cu un punct fix O. vom numi energie cinetică a rigidului în mișcarea sa față de punctul O, expresia:

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \bar{K}_0 \cdot \bar{\omega}. \tag{2.460}$$

Viteza centrului maselor C față de punctul O fiind:

$$\frac{d_1 \bar{r}_c}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}_c, \tag{2.461}$$

putem scrie:

$$m \cdot d_1 \bar{V}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) = m \cdot d_1 \bar{r}_c \cdot \bar{a}_0. \tag{2.462}$$

Cu acestea relația (2.450) se scrie sub forma:

$$dL_r = dE_{cr} + m \cdot d_1 \bar{r}_c \cdot \bar{a}_0, \tag{2.463}$$

absolut similară cu (2.436), sau sub forma:

$$dL_r = dE_{cr} + m \cdot \bar{a}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) \cdot dt. \tag{2.464}$$

Relația (2.464) se reduce la forma simplă:

$$dE_{cr} = dL_r, \tag{2.465}$$

similară cu (2.423), dacă:

1) punctul O coincide cu centrul maselor C ($\bar{r}_c = 0$) sau dacă rigidul are o mișcare de translație ($\bar{\omega} = 0$), caz în care toate punctele rigidului au mișcări identice cu C și deci O poate fi orice punct al rigidului;

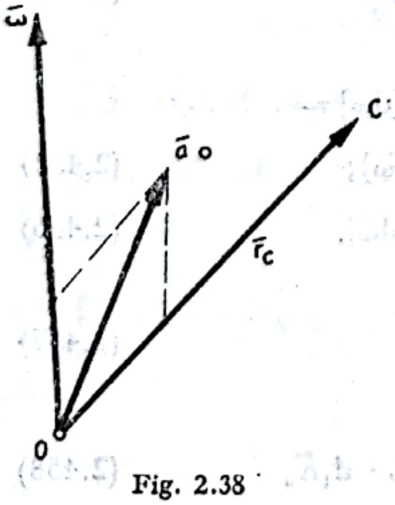


Fig. 2.38

2) punctul O este în repaus sau are o mișcare rectilinie și uniformă ($\bar{a}_0 = 0$);

3) punctul O are accelerația conținută în planul determinat de $\bar{\omega}$ și $\bar{r}_c$ (fig. 2.38), deci $\bar{a}_0 = \lambda\bar{\omega} + \mu\bar{r}_c$, sau altfel spus: $\bar{a}_0 \perp d_1\bar{r}_c = \bar{\omega} \times \bar{r}_c$.

Se observă identitatea relațiilor (2.437) și (2.465) și a celor trei cazuri în care acestea sînt valabile. Mai observăm faptul că situația în care punctul O este un punct fix (O_1) și în care este valabilă relația (2.423) este inclusă în punctul 2) de mai sus. Cu aceasta putem enunța *teorema energiei cinetice sub formă diferențială*, în cazul general, sub forma următoare: dacă (S) este un sistem oarecare de puncte materiale A, ale căror ve-

cinătăţi dε au masele dm şi sînt acţionate de forţele $d\bar{F}$ (reprezentînd fiecare rezultanta forţelor exterioare, de legătură şi interioare ce revin vecinătăţii dε) şi dacă O este:

1) centrul maselor C sau un punct cu o mişcare identică cu a acestuia, sau

2) un punct inerţial (punct în repaus sau în mişcare rectilinie şi uniformă), sau

3) un punct cu acceleraţia perpendiculară pe viteza centrului C faţă de O, definind energia cinetică a sistemului ca fiind:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{(S)} V^2 \cdot dm = \frac{1}{2}\int_{(S)} \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 \cdot dm, \tag{2.466}$$

şi lucrul mecanic elementar al sistemului ca fiind:

$$dL = \int_{(S)} d\bar{F} \cdot d\bar{r} = \left(\int_{(S)} d\bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\right) dt, \tag{2.467}$$

în care $\bar{r} = \overline{OA}$, iar $\frac{d}{dt}$ este derivata absolută $\frac{d_1}{dt}$ cînd O este în repaus şi derivata relativă într-un triedru $Oxyz$ cu axele de direcţii fixe, cînd O este mobil, putem scrie relaţia:

$$dE_c = dL = dL_E + dL_L + dL_I, \tag{2.468}$$

care exprimă faptul că variaţia elementară a energiei cinetice a sistemului (S) este egală cu lucrul mecanic elementar datorat forţelor exterioare, de legătură şi interioare ale sistemului.

Integrînd relaţia (2.468) între poziţiile (1) şi (2) ale sistemului la mişcarea sa finită între aceste configuraţii obţinem relaţia:

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{12}, \tag{2.469}$$

care exprimă teorema energiei cinetice sub formă finită. În relaţia (2.469) L_{12} reprezintă lucrul mecanic finit al sistemului datorat forţelor exterioare, de legătură şi interioare, la deplasarea finită a acestuia între configuraţiile (1) şi (2):

$$L_{12} = \int_1^2 dL = L_{12E} + L_{12L} + L_{12I}, \tag{2.470}$$

iar E_{c1} şi E_{c2} energia cinetică a sistemului calculată în poziţia (1) şi respectiv (2).

În cazul unui sistem mecanic conservativ am văzut că lucrul mecanic elementar al sistemului se poate scrie sub forma diferenţialei totale exacte a unei funcţii U de parametrii poziţionali ai sistemului, numită funcţia de forţe, adică:

$$dL = dU. \tag{2.471}$$

Notînd:

$$E_p(q_1, q_2, \ldots, q_n) = -U(q_1, q_2, \ldots, q_n); \tag{2.472}$$

şi numind funcţia E_p energia potenţială a sistemului, relaţia (2.468) se scrie:

$$dE_c = dU = -dE_p \tag{2.473}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$d(E_c + E_p) = 0, \tag{2.474}$$

şi deci:

$$E_c + E_p = C_2. \tag{2.475}$$

Aplicînd relaţia (2.475) în poziţiile (1) şi (2) ale sistemului putem scrie:

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}. \tag{2.476}$$

Relaţia generală (2.475) scrisă sub forma explicită (2.476) este un caz particular al teoremei energiei cinetice sub formă finită în cazul unui sistem mecanic conservativ şi se numeşte *teorema conservării energiei mecanice*, al cărei enunţ este următorul: la orice mişcare finită a unui sistem mecanic conservativ energia mecanică (suma dintre energia cinetică şi cea potenţială a sistemului) se conservă.

Această teoremă de conservare se generalizează în diferite capitole ale fizicii în care se demonstrează pentru anumite sisteme conservarea aşa-zisei energii totale care este suma dintre energia cinetică, cea potenţială şi alte tipuri de energii. În realitate nu există însă nici un sistem mecanic conservativ întrucît la mişcarea oricărui sistem sînt prezente forţele de frecare care nu sînt conservative. Mai exact aceste forţe fiind mereu opuse deplasărilor dau un lucru mecanic negativ ceea ce duce la micşorarea continuă a energiei mecanice a sistemului. Acest adevăr demonstrează imposibilitatea realizării unui „perpetuum mobile".

Cu ajutorul cazurilor particulare din paragraful precedent, referitoare la energia cinetică şi lucrul mecanic pentru diferite sisteme mecanice, vom da în continuare cîteva forme mai importante ale teoremei energiei cinetice sub formă finită.

1) *Punct material.*

Faţă de un punct fix O_1:

$$\frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2) = \int_{(A_1)}^{(A_2)} (R_{x_1} \cdot d_1 x_1 + R_{y_1} \cdot d_1 y_1 + R_{z_1} \cdot d_1 z_1). \tag{2.477}$$

2) *Sistem discret de puncte materiale.*

a) Faţă de un punct fix O_1:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (V_{i2}^2 - V_{i1}^2) = \sum_i \int_{(A_{i1})}^{(A_{i2})} \bar{R}_i \cdot d_1 \bar{r}_{i1}. \tag{2.478}$$

b) Faţă de un punct mobil O (din clasa punctelor stabilite mai sus):

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (V_{ir2}^2 - V_{ir1}^2) = \sum_i \int_{(A_{i1})}^{(A_{i2})} \bar{R}_i \cdot d\bar{r}_i. \tag{2.479}$$

3) *Rigid.*

a) Faţă de un punct fix O_1:

$$\frac{1}{2} m(V_{c2}^2 - V_{c1}^2) + \frac{1}{2} (\bar{\omega}_2 \cdot \bar{K}_{c2} - \bar{\omega}_1 \cdot \bar{K}_{c1}) =$$

$$= \int_{(1)}^{(2)} (\bar{R} \cdot d_1 \bar{r}_{1c} + \bar{M}_c \cdot d\bar{\theta}). \tag{2.480}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Față de un punct mobil O (din clasa punctelor stabilite mai sus):

$$\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2 \cdot \bar{K}_{02} - \bar{\omega}_1 \cdot \bar{K}_{01}) = \int_{(1)}^{(2)} \bar{M}_0 \cdot \mathrm{d}\bar{\theta}, \tag{2.481}$$

și din relațiile (2.480) și (2.481) rezultă:

$$\frac{1}{2} m(V_{c2}^2 - V_{c1}^2) = \int_{(1)}^{(2)} \bar{R} \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_{1c}, \tag{2.482}$$

relație identică formal cu (2.477). Deci se poate aplica teorema energiei cinetice pentru fiecare din cele două energii din relația (2.283).

De remarcat că în cazul unui rigid la calculul lucrului mecanic vom include în rezultanta $\bar{R}$ și în momentul rezultant $\bar{M}_0$ (doar forțele exterioare și de legătură și momentele lor), întrucît forțele interioare au torsorul nul și deci au lucrul mecanic nul.

4) *Sistem de rigide.*

Față de un punct fix O_1:

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i(V_{ci2}^2 - V_{ci1}^2) + \frac{1}{2}\sum_i (\bar{\omega}_{i2} \cdot \bar{K}_{ci2} - \bar{\omega}_{i1} \cdot \bar{K}_{ci1}) =$$

$$= \sum_i \int_{(1)}^{(2)} (\bar{R}_i \cdot \mathrm{d}_1 \bar{r}_{1ci} + \bar{M}_{ci} \cdot \mathrm{d}\bar{\theta}_i). \tag{2.483}$$

În acest caz se pot exclude din calcul forțele interioare (și momentele lor) doar dacă toate vitezele relative în cadrul sistemului sînt nule.

2.3.13. **Considerații recapitulative.** Teoremele generale prezentate în acest capitol servesc la studiul mișcării, echilibrului și repausului oricărui sistem mecanic.

Din punct de vedere matematic teorema impulsului și teorema momentului cinetic prin proiectare pe axe conduc la un sistem de șase ecuații diferențiale, suficiente pentru studiul unui rigid, așa cum legea a doua a lui *Newton*, prin proiectare pe axe, conduce la trei ecuații diferențiale, suficiente pentru studiul unui punct. Afirmațiile de mai sus se bazează pe faptul că pentru cunoașterea poziției unui rigid sînt necesari șase parametri, pe cînd la un punct doar trei. În mod concret, la un rigid aplicarea teoremei mișcării centrului de masă ne dă viteza $\bar{V}_c$ acestui punct, iar aplicarea teoremei momentului cinetic față de acest punct conduce la găsirea vectorului viteză unghiulară instantanee $\bar{\omega}$, iar cunoașterea acestor doi vectori înseamnă cunoașterea distribuției de viteze în acel rigid.

Toate teoremele de conservare, precum și teorema energiei cinetice reprezintă matematic integrale prime ale sistemelor de ecuații diferențiale amintite și este evident deci că folosirea lor este rentabilă ori de cîte ori acest lucru este posibil.

Putem arunca acum o privire de ansamblu asupra întregii Mecanici teoretice. Din cele expuse pînă aici rezultă că în rezolvarea oricărei probleme de echilibru sau mișcare putem proceda astfel:

— înlocuim legăturile corpului (punct material sau rigid) prin forțele și momentele de legătură corespunzătoare;

Scanned with OKEN Scanner

— scriem ecuațiile vectoriale de echilibru sau mișcare conform tabelului 2.3, în care $(\bar{R}, \bar{M}_0)$ este torsorul de reducere în O al sistemului de forțe exterioare și de legătură;

— alegem sistemele de referință;

— proiectăm ecuațiile vectoriale pe axele acestor sisteme;

— rezolvăm ecuațiile scalare obținute (ecuații algebrice sau diferențiale).

Observație: ecuațiile scalare de mai sus se completează la nevoie cu ecuații geometrice sau ecuații cinematice obținute din ultima coloană a tabelului 2.3.

Tabelul 2.3.

Tipul corpului	Ecuațiile de echilibru	Ecuațiile de mișcare	Relații cinematice
Punctul material	$\bar{R} = 0$	$\bar{R} = m\bar{a}$	$\bar{V}_A = \dot{\bar{r}}$; $\bar{r} = \overline{O_1A}$ $\bar{a}_A = \ddot{\bar{r}}$
Rigidul	$\bar{R} = 0$ $\bar{M}_0 = 0$	$\bar{R} = m\bar{a}_c (= \dot{\bar{H}})$ $\bar{M}_0 = \dot{\bar{K}}_0$	$\bar{V}_A = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$; $\bar{r} = \overline{OA}$ $\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} +$ $+ \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$
Observații	O — punct arbitrar	O — { — punct inerțial, sau — centrul maselor C, sau — punct cu $\bar{a}_0 = \lambda \overline{oc}$	O_1 — punct fix. O — punct al rigidului.

APLICAȚII

Aplicația 1

Se consideră o mașină de rambleiat cu bandă (fig. 2.39) formată dintr-o bandă concavă fără fine *1*, toba de acționare *2*, toba de întindere *3*, de deviere *4* și de presare *5*, care asigură benzii concavitatea necesară. O asemenea mașină este folosită în minerit la umplerea (rambleierea) spațiilor rămase goale în urma exploatării stratelor de minereu, operație necesară în cazurile cînd trebuie evitate surpările.

Materialul de rambleiat cade din silozul *6* pe banda transportoare care îi imprimă o viteză însemnată. În punctul în care banda transportoare se înfășoară pe toba *2*, materialul părăsește banda (fig. 2.39), cu viteza v_2.

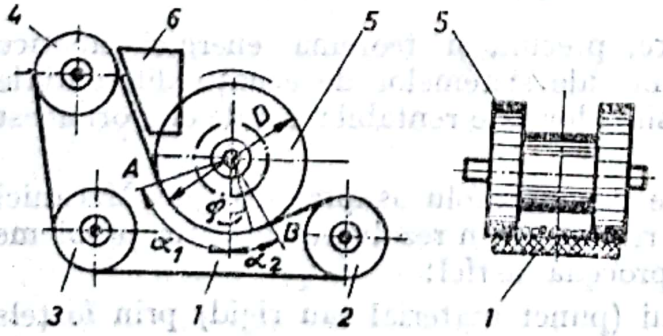


Fig. 2.39

Să se determine relația între viteza v_1 pe care o are materialul în punctul A și viteza v_2 din B cînd materialul părăsește banda.

Rezolvare. Asupra unei particule de material care se găsește pe porțiunea concavă a benzii acționează următoarele forțe:

— greutatea proprie a materialului $G = mg$;

— reacțiunea normală a benzii asupra materialului N;

Scanned with OKEN Scanner

— forța de frecare $T = \mu N$, unde μ este coeficientul de frecare dintre material și bandă. Ecuația de mișcare a particulei studiate va fi deci de forma:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{T}. \tag{1}$$

Proiectînd ecuația vectorială pe direcția tangentei și normalei principale avem:

$$m\frac{dv}{dt} = T - G\sin\varphi = \mu N - mg\sin\varphi; \tag{2}$$

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\varphi,$$

unde R este raza tobei 5.

Din a doua relație de la (2) obținem:

$$N = mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{R},$$

și înlocuind în prima ecuație de la (2):

$$m\frac{dv}{dt} = \mu\left(mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{R}\right) - mg\sin\varphi.$$

Simplificînd cu m, obținem ecuația diferențială a mișcării punctului:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{R}v^2 - g(\mu\cos\varphi - \sin\varphi). \tag{3}$$

Pe figura 2.39 avem $OM = s = R\varphi$, de unde $ds = R\,d\varphi$.

Dar, $v = \frac{ds}{dt}$, de unde rezultă $dt = \frac{ds}{v} = \frac{R\,d\varphi}{v}$.

Înlocuind în (3) rezultă:

$$v\frac{dv}{d\varphi} = \mu v^2 + gR(\mu\cos\varphi - \sin\varphi). \tag{4}$$

Dacă viteza de deplasare a benzii transportoare este mare, termenul al doilea din membrul din dreapta al ecuației (4) se poate neglija. În acest caz avem:

$$v\frac{dv}{d\varphi} = \mu v^2 \text{ sau } \frac{dv}{v} = \mu\,d\varphi,$$

și integrînd:

$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\mu\,d\varphi, \text{ avem } \ln\frac{v^2}{v_1} = \mu(\alpha_1 + \alpha_2),$$

sau:

$$v_2 = v_1 e^{\mu(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{5}$$

Rezolvarea exactă a ecuației diferențiale (4) se face în felul următor. Această ecuație diferențială, de tip *Bernoulli*, se poate transforma într-o ecuație liniară dacă înlocuim $v^2 = u$, de unde $v\,dv = \frac{1}{2}du$, deci relația (4) devine:

$$\frac{du}{d\varphi} - 2\mu u = 2gR(\mu\cos\varphi - \sin\varphi). \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd avem:

$$v^2 = u = \frac{2gR}{1+4\mu^2}\left[3\,\mu\sin\varphi + (1-2\,\mu^2)\cos\varphi + C\,e^{2\mu\varphi}\right]; \qquad (7)$$

$$C = e^{2\mu\alpha_1}\left[\frac{1+4\mu^2}{2gR}\,v_1^2 + 3\,\mu\sin\alpha_1 - (1-2\,\mu^2)\cos\alpha_1\right].$$

Viteza de aruncare se va obține înlocuind în relația (7) valoarea constantei de integrare C și $\varphi = \alpha_2$:

$$v_2^2 = v_1^2 e^{2\mu(\alpha_1+\alpha_2)} + 2gR\left[\frac{(1-2\mu^2)\cos\alpha\,2 + 3\mu\sin\alpha_2}{(1+4\mu^2)e^{2\mu(\alpha_1+\alpha_2)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-2\mu^2)\cos\alpha_1 - 3\mu\sin\alpha_1}{1+4\mu^2}\right] e^{2\mu(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Aplicația 2

Se consideră un motor electric fixat în fundație al cărui stator are greutatea G_1. Greutatea rotorului motorului este G_2, iar centrul său de greutate C_2 se găsește la distanța $OC_2 = e$ de axa de rotație. Rotorul se rotește după legea $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$. Să se determine suma reacțiunilor verticale și a celor orizontale în fundație, care apar după 1s de la începerea mișcării (fig. 2.40).

Rezolvare:

Aplicînd teorema mișcării centrului de masă al unui sistem de puncte materiale putem scrie:

$$M\ddot{x}_c = X_A + X_B; \quad M\ddot{y}_c = Y_A + Y_B - G_1 - G_2,$$

unde x_c și y_c sînt coordonatele centrului de masă al sistemului dat.

Conform figurii 2.40 avem:

$$Mx_c = \frac{G_1}{g}x_0 + \frac{G_2}{g}x_{c_2} \text{ și } My_c = \frac{G_1}{g}y_0 + \frac{G_2}{g}y_{c_2}.$$

Dar $x_0 = y_0 = 0$; $x_{c_2} = OC_2\sin\varphi = e\sin\varphi$; $y_{c_2} = OC_2\cdot\cos\varphi = e\cos\varphi$.

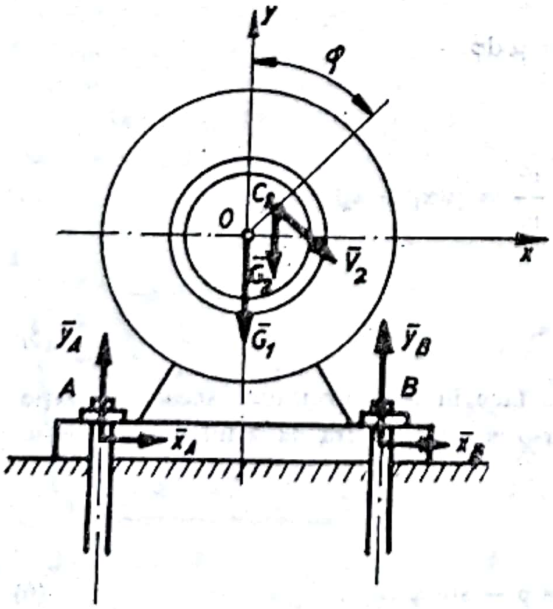


Fig. 2.40

Înlocuind rezultă:

$$Mx_c = \frac{G_2}{g}e\sin\varphi, \quad My_c = \frac{G_2}{g}e\cos\varphi.$$

Derivînd succesiv de două ori în raport cu timpul obținem:

$$M\ddot{x}_c = \frac{eG_2}{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\cos\varphi) =$$

$$= \frac{eG_2\pi}{g}\left(\cos\frac{\pi t^2}{2} - \pi t^2\cdot\sin\frac{\pi t^2}{2}\right);$$

$$M\ddot{y}_c = -\frac{eG_2}{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin\varphi) =$$

$$= -\frac{eG_2\pi}{g}\left(\sin\frac{\pi t^2}{2} + \pi t^2\cos\frac{\pi t^2}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

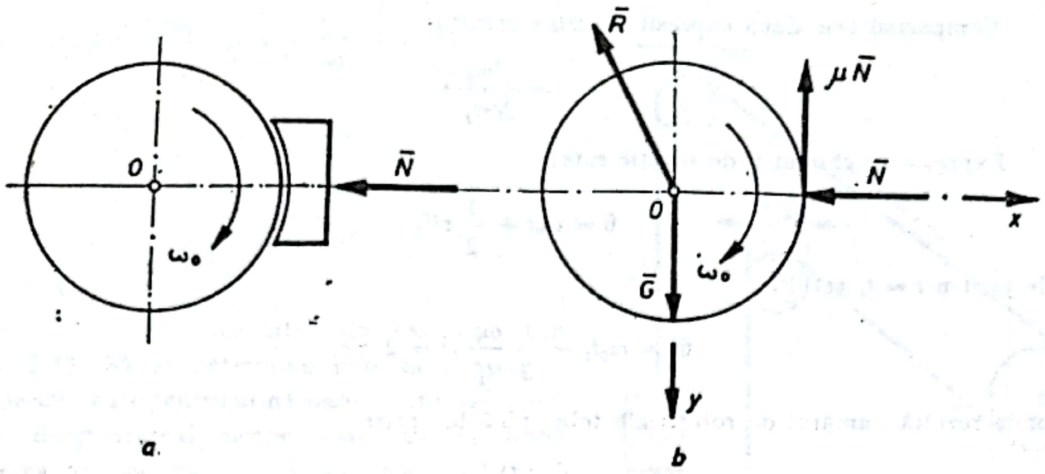


Fig. 2.41

Prin urmare pentru $t = 1$ obținem:

$$X_A + X_B = -\frac{eG_2\pi}{g}; \quad Y_A + Y_B = G_1 + G_2 - \frac{eG_2\pi}{g}.$$

Aplicația 3

Asupra tobei de rază r a unei instalații de extracție care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0, este apăsat un sabot de frînare, cu forța radială $\bar{N}$. După t_1 secunde toba se oprește ca urmare a frecării. Să se determine coeficientul de frecare μ, dintre sabot și tobă (fig. 2.41, *a*). Momentul de inerție al roții în raport cu axa de rotație este J. Să se determine de asemenea numărul de rotații pe care îl face roata.

Rezolvare.

Se izolează toba. Asupra ei vor acționa forțele (fig. 2.41, *b*):

$\bar{G}$ — greutatea proprie;

$\bar{N}$ — forța radială de apăsare;

μN — forța de frecare;

$\bar{R}$ — reacțiunea în articulație (lagăre).

Se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa de rotație:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z, \tag{1}$$

unde $K_z = J \cdot \omega$; $\quad \frac{dK_z}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J \cdot \varepsilon$ și $M_z = -\mu rN$.

Înlocuind aceste valori în (1) avem:

$$J \cdot \varepsilon = -\mu r N, \text{ de unde } \varepsilon = -\mu\frac{rN}{J}.$$

Din relația de mai sus rezultă că $\varepsilon = \text{const.}$, deci toba execută o mișcare circulară uniform variată.

Expresia vitezei unghiulare va fi deci:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{2}$$

Pentru a determina timpul t_1 după care roata se oprește se introduce în relația (2) $\omega = 0$ și rezultă:

$$\varepsilon = \frac{-\omega_0}{t_1}.$$

Comparînd cele două expresii pentru ε rezultă:

$$\mu = \frac{J\omega_0}{Nrt_1}.$$

Expresia unghiului θ de rotație este:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2,$$

unde pentru $t = t_1$ rezultă:

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_1} t_1^2 = 2\pi n,$$

de unde rezultă numărul de rotații ale tobei pînă la oprire:

$$n = \frac{\omega_0 t_1}{4\pi}.$$

Aplicația 4

Se consideră un transportor cu bandă înclinat față de orizontală cu unghiul α, care transportă un corp de greutate G (fig. 2.42). Să se determine accelerația greutății $\bar{G}$, cunoscînd momentul motor M care antrenează sistemul și momentele de inerție J_1 și J_2 ale celor doi tamburi.

Rezolvare. Se pleacă de la relația:

$$dE_c = dL,$$

în care:

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2 + \frac{1}{2}J_2\omega^2;$$

Observînd că $\omega = \frac{V}{R}$, se mai poate scrie:

$$E_c = \left(\frac{G}{2g} + \frac{J_1}{2R^2} + \frac{J_2}{2R^2}\right)v^2,$$

iar lucrul mecanic elementar are expresia:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{M}{R}\,dx - G\sin\alpha\,dx.$$

Înlocuind avem:

$$\left(\frac{G}{g} + \frac{J_1 + J_2}{R^2}\right)v\,dv = \left(\frac{M}{R} - G\sin\alpha\right)dx.$$

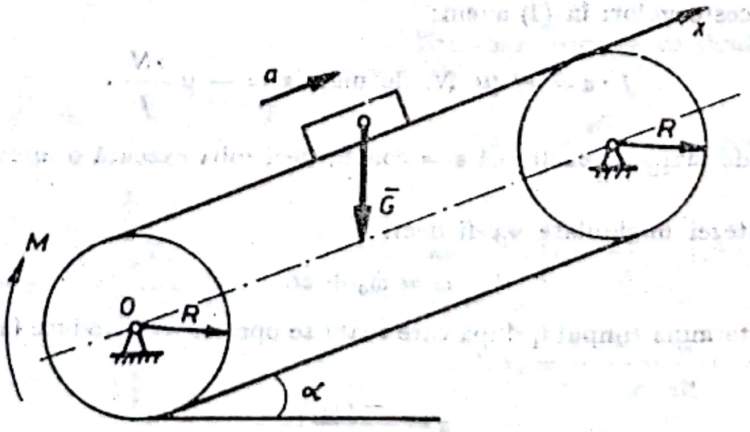


Fig. 2.42

Observînd că $v = \frac{dx}{dt}$ și $a = \frac{dv}{dt}$ rezultă:

$$a = \frac{\frac{M}{R} - G \sin \alpha}{\frac{G}{g} + \frac{J_1}{R^2} + \frac{J_2}{R^2}}.$$

Aplicația 5

Se consideră instalația de extracție din figura 2.43. Să se determine puterea P a motorului de acționare pentru următoarele date: ridicarea coliviei de greutate G_1 începe cu accelerația a; după atingerea vitezei maxime V_{max}, această viteză rămîne constantă; diametrul tobei de acționare este $2r_1$, diametrele moletelor $2r_2$, respectiv $2r_3$, momentul de inerție al tobei J_1, momentele de inerție ale moletelor J_2, respectiv J_3, greutatea coliviei cu vagonete încărcate G_1, greutatea coliviei cu vagonete goale coborîte G_2, greutatea cablului pe unitatea de lungime q, lungimea totală a cablului l (fig. 2.43).

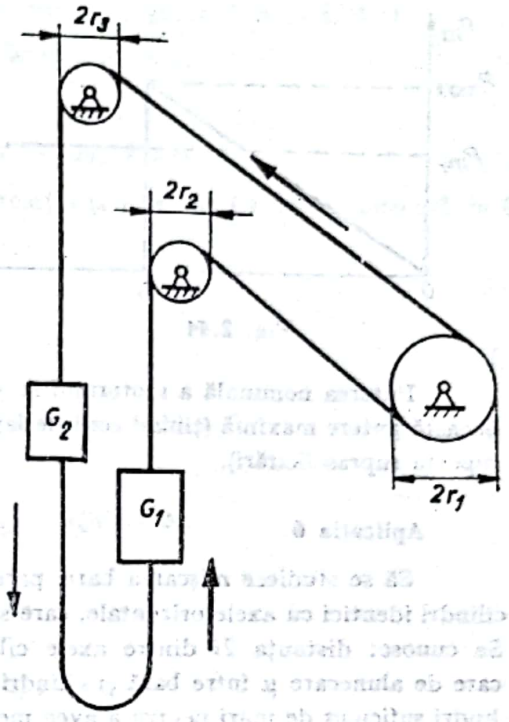


Fig. 2.43

Rezolvare.

Se presupune că cele două ramuri ale cablului, cea care se ridică și cea care coboară, se echilibrează așa încît lucrul mecanic efectuat de greutatea cablului este nul. Energia cinetică totală a sistemului este:

$$E = \left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2}\right)\frac{v^2}{2},$$

de unde deducem:

$$dE = dL = \left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2}\right) \cdot v \cdot dv.$$

Însă:

$$dL = dL_m - (G_1 - G_2) \cdot v \cdot dt.$$

Expresia puterii motorului devine:

$$P_m = \frac{dL_m}{dt} = \left[\left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2}\right)a + G_1 - G_2\right]v.$$

În timpul demarajului $v = at$ și deci:

$$P_m(t) = \left[\left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2}\right) \cdot a + G_1 - G_2\right] \cdot at, \qquad (0 \leq t \leq t_1).$$

Timpul scurs din momentul începerii demarajului pînă în momentul atingerii vitezei maxime este:

$$t_1 = \frac{v_{max}}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

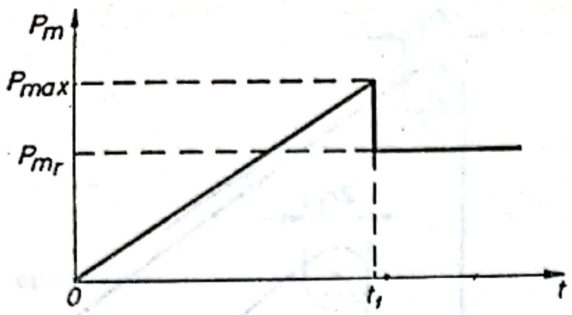


Fig. 2.44

După stabilirea vitezei de regim, adică după ce v a devenit constant, avem $a = 0$ și deci:

$$P_{mr} = (G_1 - G_2)\, v_{max} \quad (t > t_1).$$

Diagrama puterii motoare este dată în figura 2.44, iar valoarea puterii maxime este:

$$P_{max} = P_m(t_1) = \left[\left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2}\right) \cdot a + G_1 - G_2\right] v_{max}.$$

Puterea nominală a motorului se va alege în practică egală sau cu ceva mai mică decît această putere maximă (ținînd cont de faptul că pentru pericade scurte de timp un motor poate suporta suprasolicitări).

Aplicația 6

Să se studieze mișcarea barei paralelipipedice din figura 2.45. Bara este așezată pe doi cilindri identici cu axele orizontale, care se rotesc cu viteze egale în sensuri contrare ca în figură. Se cunosc: distanța $2l$ dintre axele cilindrilor, dimensiunea $2a$ a barei și coeficientul de frecare de alunecare μ între bară și cilindri. Se presupune bara omogenă și vitezele celor doi cilindri suficient de mari pentru a avea mereu alunecare în punctele A și B.

Rezolvare:

Bara este acționată de următoarele forțe:

— Greutatea G în centrul de greutate C;

— Reacțiunea normală N_1 și forța de frecare $T_1 = \mu N_1$ în punctul A;

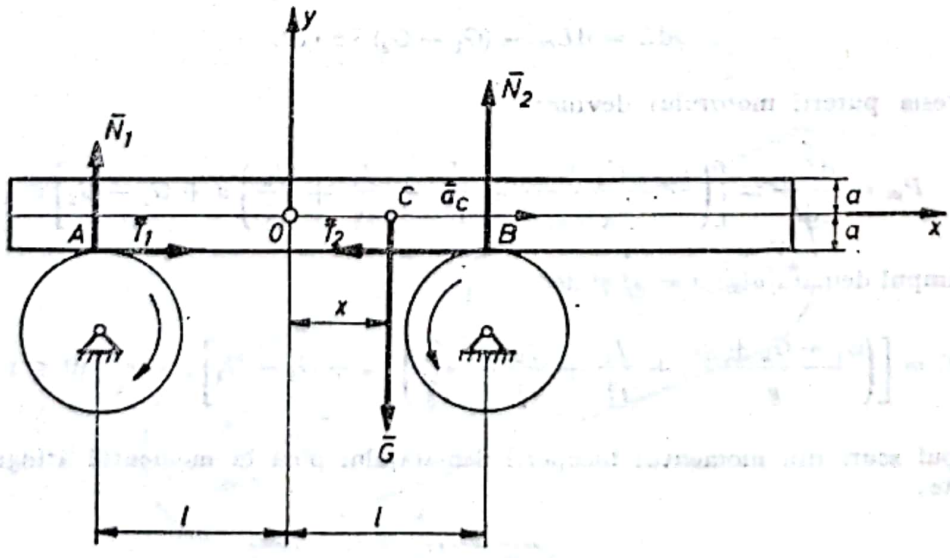
— Reacțiunea normală N_2 și forța de frecare $T_2 = \mu N_2$ în punctul B.

Alegem sistemul de referință fix $Oxyz$ după cum se vede în figură.

Teorema mișcării centrului de masă C și teorema momentului cinetic față de acest centru se scriu:

$$\bar{G} + \bar{N}_1 + \bar{T}_1 + \bar{N}_2 + \bar{T}_2 = \frac{G}{g} \cdot \bar{a}_c; \tag{1}$$

$$\sum_i \bar{M}_{ic} = \dot{\bar{K}}_c. \tag{2}$$



ig. 2.45

Însă bara făcînd o mișcare de translație are viteza unghiulară nulă și deci:

$$\bar{\omega} = 0 \Rightarrow [\overline{K_c}] = [J]_c \cdot [\bar{\omega}] = 0 \Rightarrow \dot{\overline{K}}_c = 0.$$

Relația (2) se scrie în acest caz:

$$\overline{M}_c(\overline{N}_1) + \overline{M}_c(\overline{T}_1) + \overline{M}_c(\overline{N}_2) + \overline{M}_c(\overline{T}_2) = 0. \tag{2'}$$

Proiectînd relația (1) pe axele Ox și Oy, iar relația (2') pe axa Cz (perpendiculară în C pe planul desenului) obținem:

$$\begin{cases} \mu N_1 - \mu N_2 = \dfrac{G}{g}\,\ddot{x} \\ N_1 + N_2 - G = 0 \\ -N_1(l + x) + \mu N_1 a - \mu N_2 a + N_2(l - x) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Din ultima relație a sistemului (3) deducem:

$$\mu a(N_1 - N_2) - l(N_1 - N_2) = x(N_1 + N_2).$$

Din a doua relație:

$$N_1 + N_2 = G,$$

și deci:

$$(N_1 - N_2)\ (\mu a - l) = xG.$$

Din această relație și prima relație a sistemului (3) rezultă:

$$\mu \cdot \frac{xG}{\mu a - l} = \frac{G}{g}\,\ddot{x},$$

sau:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0, \tag{4}$$

în care:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu g}{l - \mu a}}.$$

Soluția ecuației (4) cu condițiile la limită:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

este:

$$x = x_0 \cos \alpha t + \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t, \tag{5}$$

care se scrie sub forma echivalentă:

$$x = A \sin\ (\alpha t + \varphi), \tag{5'}$$

în care:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha x_0}{v_0}$$

În cazul particular $v_0 = 0$, relația (5) se scrie:

$$x = x_0 \cos \alpha t. \tag{5''}$$

Se observă deci că bara execută o mișcare de translație rectilinie oscilatorie armonică indiferent de viteza inițială. Vom vedea mai tîrziu că o asemenea mișcare o execută un corp sub acțiunea forțelor elastice (forțe orientate mereu spre un punct fix și proporționale în modul cu distanța pînă la acel punct fix). Interesant este că în cazul barei de mai sus forțele de frecare au o rezultantă de tip elastic, ele imprimînd deci caracterul oscilatoriu al mișcării.

Scanned with OKEN Scanner

3. PUNCTUL MATERIAL

3.1. MIŞCAREA, ECHILIBRUL ŞI REPAUSUL PUNCTULUI MATERIAL

Dat fiind un sistem de referinţă inerţial (T) şi un punct material M, vom spune că punctul M se află în repaus faţă de (T) cînd nu-şi schimbă în timp poziţia faţă de sistemul (T). În cazul cînd punctul M îşi schimbă în timp poziţia faţă de (T) vom spune că punctul se află în mişcare faţă de sistemul (T). În cazul cînd punctul M se află faţă de (T) fie în repaus, fie în mişcare rectilinie şi uniformă, vom spune despre M că se află în echilibru faţă de (T), sau că este un punct inerţial.

Ecuaţia vectorială de mişcare a oricărui punct material este dată de principiul al doilea al Mecanicii:

$$\bar{R} = m\bar{a}, \tag{3.1}$$

în care $\bar{R}$ este rezultanta tuturor forţelor ce acţionează punctul material liber (sau devenit liber prin înlocuirea legăturilor cu forţele de legătură).

Evident că poate fi utilizată şi teorema momentului cinetic:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0, \tag{3.1'}$$

sau teorema energiei cinetice:

$$E_2 - E_1 = L_{1-2}, \tag{3.1''}$$

sau legile de conservare respective.

Condiţia necesară şi suficientă ca un punct material liber (sau devenit liber prin înlocuirea legăturilor cu forţele de legătură) să fie în echilibru este:

$$\bar{R} = 0, \tag{3.2}$$

datorită implicaţiilor:

$$\bar{R} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{r} = 0 \\ \text{sau} \\ \bar{r} = \bar{C}_2 \end{cases} \\ \text{sau} \\ \bar{v} = \bar{C}_1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Condiţiile necesare şi suficiente pentru repausul unui punct material liber (sau devenit liber prin înlocuirea legăturilor cu forţele de legătură) sînt:

$$\begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{v}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\bar{v}(0)$ este viteza punctului la timpul $t = 0$, denumită viteză inițială. Într-adevăr, utilizînd relația (3.4), implicațiile (3.3) devin:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{R} = 0 \\ &\bar{v}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{r} = 0 \\ \text{sau} \qquad (\bar{v} = \bar{C}_1 = 0) \\ \bar{r} = \bar{C}_2 \end{cases} \tag{3.5}$$

Remarcăm acum faptul că rezultanta $\bar{R}$ din relațiile (3.1), (3.2) sau (3.5) reprezintă:

a) rezultanta forțelor exterioare:

$$\bar{R} = \bar{R}_E, \tag{3.6}$$

în cazul unui punct material liber;

b) rezultanta forțelor exterioare și de legătură:

$$\bar{R} = \bar{R}_E + \bar{R}_L, \tag{3.7}$$

în cazul unui punct material legat;

c) rezultanta forțelor exterioare, de legătură și interioare:

$$\bar{R} = \bar{R}_E + \bar{R}_L + \bar{R}_I, \tag{3.8}$$

în cazul unui punct material care face parte dintr-un sistem de puncte.

Mai remarcăm de asemenea faptul că pentru găsirea ecuațiilor de mișcare ale unui punct material cînd se cunosc forțele ce-l acționează va trebui să integrăm ecuația diferențială (3.1) scrisă sub forma:

$$\bar{R} = m\ddot{\bar{r}}, \tag{3.9}$$

operație care necesită și cunoașterea condițiilor inițiale:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \end{cases} \tag{3.10}$$

adică vectorul de poziție și viteza punctului la momentul $t = 0$.

O ultimă observație este aceea că pentru găsirea tuturor necunoscutelor unei probleme de mișcarea, echilibrul sau repausul unor puncte materiale sînt necesare uneori relații suplimentare (în afara celor specificate mai sus), și anume:

— relații geometrice (în cazul punctelor cu legături);

— relații cinematice (între parametrii cinematici ai punctelor unui sistem).

3.2. MIȘCĂRI SIMPLE ALE PUNCTULUI MATERIAL

3.2.1. **Mișcarea rectilinie uniformă și uniform variată.** Spunem că un punct are o mișcare rectilinie dacă traiectoria descrisă de el este o dreaptă. Spunem în general că o mișcare a unui punct este uniformă dacă modulul vitezei sale este constant.

Vom spune că o mișcare a unui punct este uniform variată dacă modulul accelerației sale tangențiale este constant.

Scanned with OKEN Scanner

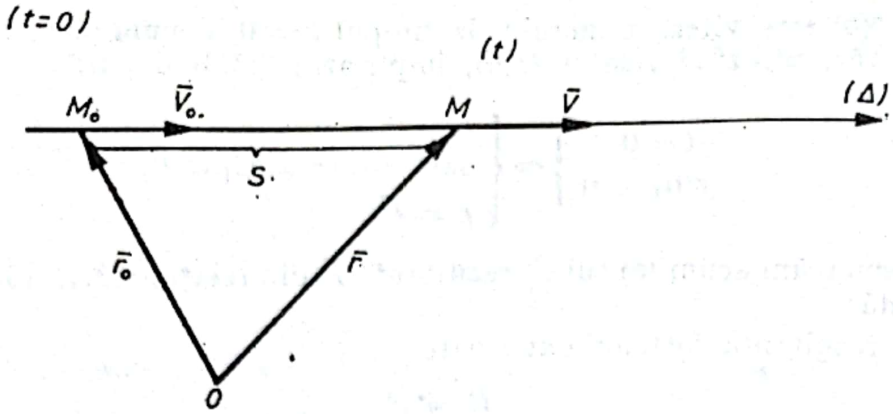


Fig. 3.1

Fie un punct material M aflat într-o mişcare rectilinie uniformă (fig. 3.1). Vectorul viteză $\bar{v}$, fiind dirijat pe suportul traiectoriei (Δ) şi fiind constant şi ca mărime, este constant ca vector:

$$\bar{v} = \bar{C}. \tag{3.11}$$

De aici deducem celelalte două legi de mişcare:

$$\bar{r} = \bar{C}t + \bar{C}_1; \tag{3.12}$$

$$\bar{a} = 0. \tag{3.13}$$

Vectorii constanţi $\bar{C}$ şi $\bar{C}_1$ îi găsim cu ajutorul condiţiilor iniţiale:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \end{cases} \tag{3.14}$$

care aplicate relaţiilor (3.11) şi (3.12) ne dau:

$$\begin{cases} \bar{C}_1 = \bar{r}_0 \\ \bar{C} = \bar{v}_0, \end{cases} \tag{3.15}$$

şi deci putem scrie legile de mişcare sub forma:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t; \tag{3.16}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0; \tag{3.17}$$

$$\bar{a} = 0. \tag{3.18}$$

Forţa rezultantă care produce o astfel de mişcare rezultă înlocuind relaţia (3.18) în (3.11):

$$\bar{R} = 0. \tag{3.19}$$

Observăm că traiectoria şi sensul mişcării sînt respectiv suportul şi sensul vectorului viteză iniţială $\bar{v}_0$. Prin proiectare pe axa (Δ) orientată în sensul mişcării, legile de mişcare se scriu:

$$\begin{cases} a = 0 \\ v = v_0 = \text{ct} \\ s = vt. \end{cases} \tag{3.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

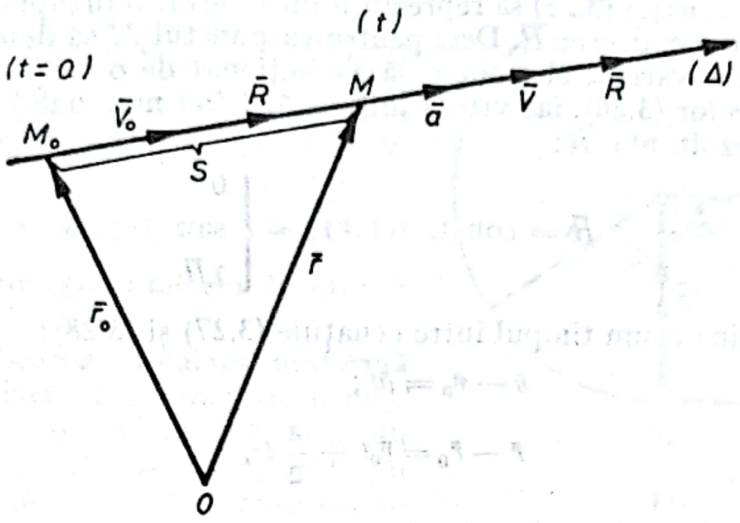


Fig. 3.2

Fie acum un punct M, de masă m, aflat într-o mişcare rectilinie uniform variată (fig. 3.2). Mişcarea fiind rectilinie, din paragraful 1.2.4. reamintim faptul că acceleraţia $\bar{a}$ nu are componenta normală $\bar{a}_n$ şi deci este egală chiar cu componenta tangenţială $\bar{a}_\tau$, care e constantă ca mărime în cazul acestei mişcări şi fiind constantă şi ca direcţie, rezultă că acceleraţia $\bar{a}$ este constantă ca vector:

$$\bar{a} = \bar{C} \tag{3.21}$$

De aici se deduc celelalte două legi de mişcare:

$$\bar{v} = \bar{C}t + \bar{C}_1; \tag{3.22}$$

$$\bar{r} = \bar{C}\frac{t^2}{2} + \bar{C}_1 + \bar{C}_2. \tag{3.23}$$

Constantele vectoriale $\bar{C}$, $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$ se deduc din condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \end{cases} \tag{3.24}$$

şi din relaţia (3.11):

$$\begin{cases} \bar{C}_2 = \bar{r}_0 \\ \bar{C}_1 = \bar{v}_0 \\ \bar{C} = \dfrac{\bar{R}}{m}, \end{cases} \tag{3.25}$$

cu care legile de mişcare se scriu:

$$\bar{a} = \frac{\bar{R}}{m} \quad (\Rightarrow \bar{R} = m\bar{C}); \tag{3.26}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t; \tag{3.27}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}}{2}t^2. \tag{3.28}$$

Pentru ca ecuația (3.28) să reprezinte într-adevăr o dreaptă trebuie ca $\bar{v}_0$ să fie coliniar cu $\bar{a}$ și deci cu $\bar{R}$. Deci pentru ca punctul M să descrie o mișcare rectilinie uniform variată el trebuie să fie acționat de o forță rezultantă $\bar{R}$ constantă ca vector (3.26), iar viteza inițială $\bar{v}_0$ (cînd nu e nulă) trebuie să fie coliniară cu rezultanta $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \text{const.} \qquad \bar{v}_0 = \begin{cases} 0 \\ \text{sau} \\ \lambda \bar{R}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Vom elimina acum timpul între ecuațiile (3.27) și (3.28):

$$\bar{v} - \bar{v}_0 = \bar{a}t; \tag{3.30}$$

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}}{2} t^2, \tag{3.31}$$

sub forma:

$$\bar{a}t^2 = (\bar{v} - \bar{v}_0)\, t;$$

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{v}_0 t + \frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{v}_0)\, t;$$

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \frac{1}{2}(\bar{v} + \bar{v}_0) t;$$

$$2\bar{a} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = (\bar{v} + \bar{v}_0) \cdot \bar{a}t;$$

$$2\bar{a} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = (\bar{v} + \bar{v}_0) \cdot (\bar{v} - \bar{v}_0);$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\bar{a} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0);$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\bar{a} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0)}. \tag{3.32}$$

Relația (3.32), pe care o vom numi relație de tip *Torricelli*, face legătura între poziția momentană a punctului (vectorul $\bar{r}$) și viteza acestuia (scalarul v) la o mișcare cu accelerație constantă ca vector. Pentru cazul:

$$\bar{r}_0 = 0; \quad \bar{v}_0 = 0, \tag{3.33}$$

această ecuație se particularizează printr-o relație de tip *Galilei*:

$$v = \sqrt{2\bar{a} \cdot \bar{r}} = \sqrt{2as}, \tag{3.34}$$

vectorii $\bar{r}$ și $\bar{a}$ fiind acum obligatoriu coliniari și în același sens.

Relația (3.32) se scrie în cazul mișcării rectilinii uniform variate (fig. 3.2) sub forma:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\bar{a} \cdot \overline{M_0 M}} = \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot s}. \tag{3.35}$$

Legile de mișcare (3.26), (3.27) și (3.28), prin proiectare pe axa (Δ) orientată în sensul mișcării (sensul lui $\bar{v}$), conduc la ecuațiile:

$$\begin{cases} a_\Delta = \dfrac{R_\Delta}{m} = \text{ct.} \\ v = v_{0\Delta} + a_\Delta t. \\ s = v_{0\Delta} t + \dfrac{a_\Delta}{2} t^2. \end{cases} \tag{3.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd vectorii $\bar{v}$ și $\bar{a}$ au același sens:

$$\bar{v} \cdot \bar{a} > 0, \tag{3.37}$$

mișcarea se numește uniform accelerată ($a_\Delta > 0$), iar cînd vectorii $\bar{v}$ și $\bar{a}$ au sensuri contrare:

$$\bar{v} \cdot \bar{a} < 0, \tag{3.38}$$

mișcarea se numește uniform încetinită ($a_\Delta < 0$).

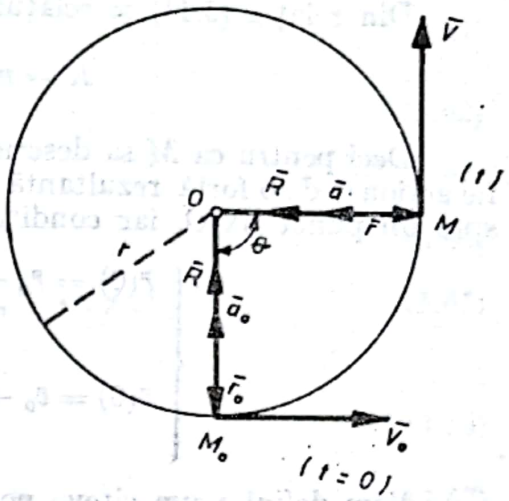


Fig. 3.3

3.2.2. **Mișcarea circulară uniformă și uniform variată.** Un punct are o mișcare circulară cînd traiectoria sa este un cerc. Asupra caracterului uniform sau uniform variat al unei mișcări s-a discutat la începutul paragrafului precedent.

Fie un punct material M, de masă m (fig. 3.3), care descrie o mișcare circulară uniformă pe un cerc de rază r, aceasta fiind egală cu modulul vectorului de poziție $\bar{r}$ al lui M față de centrul O al cercului. Datorită caracterului uniform al mișcării viteza lui M va fi constantă ca mărime:

$$v = \text{const.} \tag{3.39}$$

Vom reaminti acum cîteva formule referitoare la mișcarea circulară a punctului (paragraful 2.3.3):

$$v = \omega r; \tag{3.40}$$

$$a_n = \omega^2 r; \tag{3.41}$$

$$a_\tau = \varepsilon r; \tag{3.42}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \tag{3.43}$$

$$\omega = \dot{\theta}; \tag{3.44}$$

$$\varepsilon = \ddot{\theta}, \tag{3.45}$$

în care θ este unghiul dintre vectorul $\bar{r}$ și o direcție fixă trecînd prin O, direcție pe care am ales-o ca fiind vectorul de poziție inițial $\bar{r}_0$, ω e viteza unghiulară, iar ε accelerația unghiulară.

Relațiile de mai sus conduc, datorită condiției (3.39) la următoarele:

$$\omega = \text{ct}; \tag{3.46}$$

$$\theta = \omega t; \tag{3.47}$$

$$\varepsilon = 0; \tag{3.48}$$

$$a_\tau = 0; \tag{3.49}$$

$$a = a_n = \omega^2 r = \text{ct.}; \tag{3.50}$$

$$v = \omega r = \text{ct.} \tag{3.51}$$

Din relația (3.11) și relațiile de mai sus rezultă imediat:

$$R = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r} = \text{ct.} \tag{3.52}$$

Deci pentru ca M să descrie o mișcare circulară uniformă el trebuie să fie acționat de o forță rezultantă $\bar{R}$ constantă ca mărime și îndreptată mereu spre un punct fix O, iar condițiile inițiale să fie:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 = \overline{OM_0} \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \rightarrow \begin{cases} v_0 = \sqrt{\dfrac{Rr_0}{m}} \\ \bar{v}_0 \cdot \bar{r}_0 = 0 \quad (\bar{v}_0 \perp \bar{r}_0). \end{cases} \end{cases} \tag{3.53}$$

Vom defini acum cîteva noțiuni utile în studiul mișcării circulare uniforme. Perioada T este timpul necesar unei rotații complete a punctului pe cerc. Frecvența f reprezintă numărul de rotații complete efectuate de punct într-o secundă. Turația n reprezintă numărul de rotații complete efectuate de punct într-un minut.

Din relația (3.47) obținem respectiv pentru $\theta = 2\pi$ rad. și $t = 1$ s, relațiile:

$$2\pi = \omega T; \tag{3.54}$$

$$2\pi f = \omega \cdot 1, \tag{3.55}$$

care împreună cu relația evidentă:

$$n = 60\, f, \tag{3.56}$$

conduc la șirul de egalități:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{\pi n}{30}, \tag{3.57}$$

în care unitățile de măsură sînt:

ω[rad/s] T[s] f[rot/s] n[rot/min.].

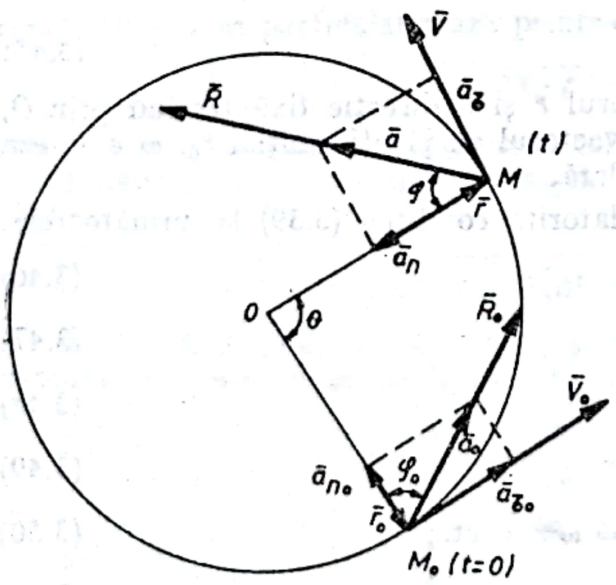


Fig. 3.4

Relațiile (3.57) sînt utile în special în Mecanica aplicată. Fie acum un punct material M, de masă m (fig. 3.4) care descrie o mișcare circulară uniform variată pe un cerc de rază r, aceasta fiind și mărimea vectorului de poziție $\bar{r}$ al lui M față de centrul O al cercului. Datorită caracterului uniform variat al mișcării vom avea relația:

$$a_\tau = \text{ct.} \tag{3.58}$$

Din aceasta și din relațiile generale (3.40)—(3.45) deducem:

$$\omega = \text{ct.} \tag{3.59}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \tag{3.60}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2; \tag{3.61}$$

$$a_\tau = \varepsilon r = \text{ct.}; \tag{3.62}$$

$$a_n = \omega^2 r \neq \text{ct.}; \tag{3.63}$$

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \neq \text{ct.} \tag{3.64}$$

$$v = \omega r = \omega_0 r + \varepsilon r t = v_0 + \varepsilon r t \neq \text{ct.} \tag{3.65}$$

Din aceste relații și din (3.11) rezultă:

$$R = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \neq \text{ct.} \tag{3.66}$$

$$R_n = R\cos\varphi = ma_n = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r} \neq \text{ct}; \tag{3.67}$$

$$R_\tau = R\sin\varphi = ma_\tau = m\varepsilon r = \text{ct.} \tag{3.68}$$

Notînd:

$$R_{n_0} = R_0\cos\varphi_0 = \frac{mv_0^2}{r_0}; \tag{3.69}$$

$$R_{\tau 0} = R_0\sin\varphi_0 = m\varepsilon r_0, \tag{3.70}$$

după calcule simple putem scrie relația:

$$R_n = R_{n_0} + \frac{R_{\tau_0}}{r_0}\cdot\left(2v_0 + \frac{R_{\tau_0}}{m}t\right)\cdot t, \tag{3.71}$$

pe care o asociem cu (3.68):

$$R_\tau = R_{\tau 0} = m\varepsilon r_0 = \text{ct.} \tag{3.72}$$

În cazul particular $v_0 = 0$ relația (3.71) se reduce la forma:

$$R_n = \frac{R_{\tau 0}^2}{mr_0}\cdot t^2. \tag{3.73}$$

Cu ajutorul relațiilor (3.69)—(3.72) putem afirma acum că pentru ca punctul M să descrie o mișcare circulară uniform variată trebuie ca plecînd din condițiile inițiale:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 = \overline{OM_0} \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \rightarrow \begin{cases} \bar{v}_0 = 0 \\ \text{sau} \\ \bar{v}_0 \cdot \bar{r}_0 = 0 \ \ (\bar{v}_0 \perp \bar{r}_0), \end{cases} \end{cases} \tag{3.74}$$

punctul să fie acționat de o forță rezultantă a cărei proiecție pe direcția tangentei la traiectorie să fie constantă:

$$R_\tau = R_{\tau 0} = \text{ct.}, \tag{3.72'}$$

Scanned with OKEN Scanner

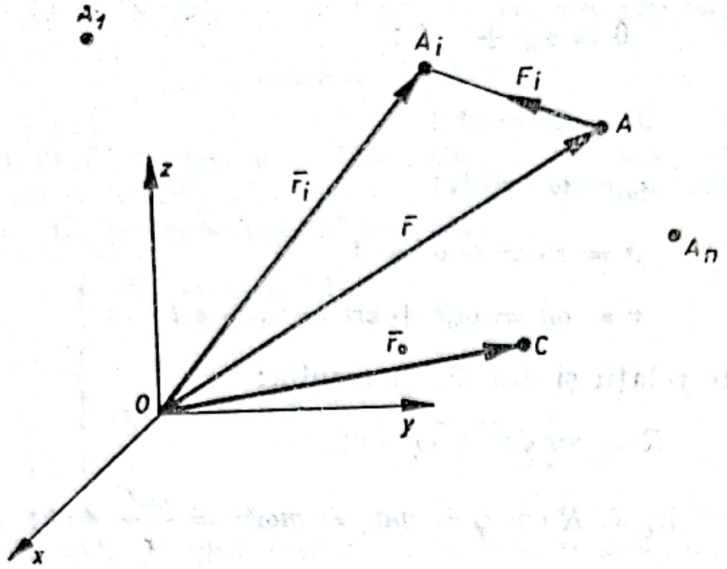


Fig. 3.5

iar pe direcţia normalei la traiectorie să fie:

$$R_n = R_{n0} + \frac{R_{\tau_0}}{r_0}\left(2v_0 + \frac{R_{\tau_0}}{m}\cdot t\right)\cdot t. \tag{2.71'}$$

În acest caz acceleraţia unghiulară a mişcării va fi:

$$\varepsilon = \frac{R_{\tau_0}}{mr_0}. \tag{3.72''}$$

3.2.3. **Mişcarea oscilatorie.** Fie un punct material M de masă m şi vector de poziţie $\bar{r}$ faţă de originea O a unui sistem inerţial de referinţă (fig. 3.5). Punctul A este acţionat de n forţe elastice:

$$\bar{F}_i = K_i(\bar{r}_i - \bar{r}), \tag{3.75}$$

în care $\bar{r}_i$ sînt n vectori constanţi, iar K_i, n constante scalare.

Fie condiţiile iniţiale ale mişcării de forma:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0. \end{cases} \tag{3.76}$$

Ecuaţia de mişcare (3.11) conduce la:

$$\sum_i K_i(\bar{r}_i - \bar{r}) = m\ddot{\bar{r}},$$

sau:

$$\ddot{\bar{r}} + \omega^2\bar{r} = \frac{\sum K_i\bar{r}_i}{m}, \tag{3.77}$$

în care:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum_i K_i}{m}}. \tag{3.78}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția generală a ecuației (3.77) este:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \cos \omega t + \bar{C}_2 \sin \omega t + \bar{r}_c, \tag{3.79}$$

în care:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i K_i \bar{r}_i}{\sum_i K_i}. \tag{3.80}$$

Prin aplicarea condițiilor inițiale (3.76) rezultă:

$$\begin{cases} \bar{r}_0 = \bar{C}_1 + \bar{r}_c \\ \bar{v}_0 = \bar{C}_2 \omega, \end{cases} \tag{3.81}$$

și deci:

$$\bar{r} = (\bar{r}_0 - \bar{r}_c) \cos \omega t + \frac{\bar{V}_0}{\omega} \sin \omega t + \bar{r}_c. \tag{3.82}$$

În cazul prezenței unei singure forțe elastice ($i = 1$) vom alege originea O în punctul A_1 și din (3.80) rezultă:

$$\bar{r}_c = 0, \tag{3.83}$$

iar ecuația (3.82) devine:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \omega t + \frac{\bar{V}_0}{\omega} \sin \omega t, \tag{3.84}$$

care se poate arăta relativ ușor că reprezintă o traiectorie eliptică cu punctul de simetrie O. În acest caz spunem că avem de-a face cu un oscilator eliptic, traiectoria eliptică aflîndu-se în planul vectorilor $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$. Cazul particular cînd acești doi vectori sînt coliniari:

$$\bar{v}_0 = \lambda \bar{r}_0, \tag{3.85}$$

reprezintă cazul oscilatorului liniar, a cărui ecuație de mișcare se scrie:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right). \tag{3.86}$$

Observăm că oscilatorul cu n forțe elastice a cărui traiectorie este (3.82) este tot un oscilator eliptic de tipul (3.84), cu diferența că punctul de simetrie al elipsei nu mai este O, ci punctul C dat de relația (3.80). Facem observația că toate cele trei mișcări oscilatorii de mai sus sînt periodice cu perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{3.87}$$

care în cazul oscilatorului (3.82) se scrie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\sum K_i}}, \tag{3.88}$$

iar în cazul oscilatorilor (3.84) sau (3.86) se particularizează prin:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}. \tag{3.89}$$

Scanned with OKEN Scanner

3.2.4. Mişcarea în cîmpul gravitaţional în vid şi în aer. Fie un punct material M de masă m care se mişcă într-un cîmp gravitaţional a cărui acceleraţie constantă este $\bar{g}$.

Dacă punctul se mişcă în vid (sau dacă se neglijează frecarea cu aerul) singura forţă ce acţionează punctul este propria sa greutate:

$$\bar{G} = m\bar{g}. \tag{3.90}$$

Condiţiile iniţiale ale mişcării fiind:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \end{cases} \tag{3.91}$$

ecuaţia (3.11) se scrie:

$$m\bar{g} = m\bar{a} = m\ddot{\bar{r}}, \tag{3.92}$$

şi deci:

$$\begin{cases} \bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \bar{g} \\ \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \bar{g}t = \bar{C}_1 \\ \bar{r} = \bar{g}\dfrac{t^2}{2} + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2. \end{cases} \tag{3.93}$$

Aplicînd condiţiile iniţiale (3.91) obţinem:

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 &= \bar{C}_2; \\ \bar{v}_0 &= \bar{C}_1, \end{aligned} \tag{3.94}$$

şi deci ecuaţiile (3.93) se scriu sub formele:

$$\bar{a} = \bar{g}; \tag{3.95}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{g}t; \tag{3.96}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{g}}{2} t^2, \tag{3.97}$$

absolut similare cu ecuaţiile (3.26), (3.27) şi (3.28) singura diferenţă constînd în faptul că nu se impune în general restricţia (3.29) pentru viteza iniţială. În cazul cînd:

$$\bar{v}_0 = \begin{cases} 0 \\ \text{sau} \\ \lambda\bar{G}, \end{cases} \tag{3.98}$$

mişcarea este rectilinie, uniform variată, pe direcţia vectorului $\bar{G}$. Dacă $\bar{v}_0$ nu satisface condiţia (3.98) vom proceda astfel. Vom alege un reper cu originea O în punctul iniţial al mişcării (M_0), cu axa Oy paralelă cu vectorul $\bar{G}$ şi în sens contrar lui (Oy: verticala ascendentă a locului) şi cu Ox în planul

Scanned with OKEN Scanner

determinat de Oy și $\bar{v}_0$ astfel ca unghiul dintre $\bar{v}_0$ și Ox să fie ascuțit. În acest caz vom avea:

$$\begin{cases} \bar{r}_0 = 0 \\ \bar{v}_0(v_0 \cos\alpha,\ v_0 \sin\alpha,\ 0) \\ \bar{g}(0,\ -g,\ 0) \\ \alpha = \sphericalangle\,(\bar{v}_0, Ox) < 90°. \end{cases} \tag{3.99}$$

Ținînd cont de (3.99) proiectarea ecuației (3.97) pe axele triedrului considerat conduce la:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{g}{2} t^2 \\ z = 0. \end{cases} \tag{3.100}$$

Deci traiectoria este o curbă plană a cărei ecuație carteziană:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2, \tag{3.101}$$

reprezintă o parabolă cu axa de simetrie verticală (fig. 3.6), cu punctul de maxim A de coordonate:

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ y_A = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \end{cases} \tag{3.102}$$

punct în care viteza are valoarea minimă:

$$v_{min} = v_A = v_0 \cos\alpha. \tag{3.103}$$

Distanța OB se numește bătaia traiectoriei și are valoarea:

$$OB = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{3.104}$$

Pentru același v_0 bătaia maximă se obține evident pentru unghiul $\alpha = 45°$ și are valoarea:

$$OB_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{3.105}$$

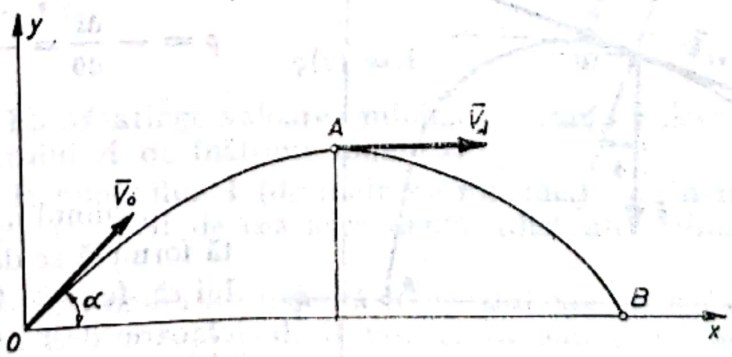


Fig. 3.36

Înfășurătoarea familiei de curbe (3.101) cu v_0 constant și α parametru se numește cupola de siguranță și ea se obține, după cum se știe prin eliminarea parametrului α între ecuațiile:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \tag{3.106}$$

Rezultatul acestui calcul conduce la parabola:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{3.107}$$

Fie acum același punct material M considerat mai sus cu deosebirea că mișcarea sa are loc în aer. În acest caz, pe lîngă forța de greutate, va trebui să luăm în considerație și rezistența datorită frecării cu aerul. Această forță de rezistență este un vector mereu opus ca sens vitezei și a cărui mărime este o funcție (pozitivă) strict crescătoare cu viteza, funcție care se determină experimental. Vom putea scrie această forță sub forma:

$$\bar{R}_a = -mg\varphi(v)\frac{\bar{v}}{v} = -mg\varphi(v)\,\bar{\tau}. \tag{3.108}$$

Ecuația (3.11) se scrie în acest caz:

$$m\bar{g} - mg\varphi(v)\frac{\bar{v}}{v} = m\bar{a}, \tag{3.109}$$

sau:

$$\bar{a} = \bar{g} - g\varphi(v)\,\bar{\tau}. \tag{3.110}$$

Proiectînd această ecuație pe axele triedrului lui *Frenet* obținem (fig. 3.7) următoarele ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -g\sin\theta - g\varphi(v) \\ \dfrac{v^2}{\rho} = g\cos\theta. \end{cases} \tag{3.111}$$

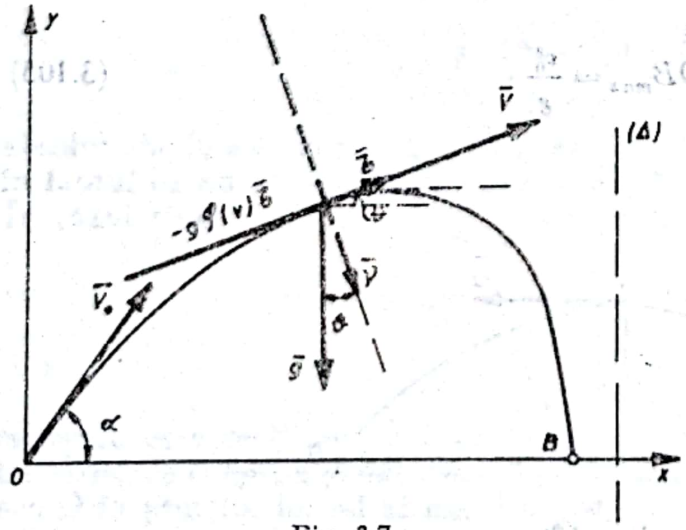


Fig. 3.7

Raza de curbură o vom calcula cu formula:

$$\rho = -\frac{ds}{d\theta} = -\frac{\dfrac{ds}{dt}}{\dfrac{d\theta}{dt}} = -\frac{v}{\dot{\theta}}. \tag{3.112}$$

Semnul minus din această formulă se datorează faptului că funcția θ este descrescătoare, deci $d\theta$ este negativ, pe cînd ds și ρ sînt pozitive.

Prin împărțirea relațiilor (3.111), după înlocuirea lui ρ prin expresia (2.112) obținem ecuația:

$$\frac{dv}{vd\theta} = \operatorname{tg}\theta + \frac{\varphi(v)}{\cos\theta}, \tag{3.113}$$

cunoscută sub numele de ecuația principală a balisticii exterioare. Prin rezolvarea acestei ecuații diferențiale de ordinul întîi (în practică rezolvare numerică pe calculator), cu condiția inițială:

$$v(\alpha) = v_0, \tag{3.114}$$

rezultă funcția:

$$v = v(\theta), \tag{3.115}$$

care rezolvă în esență problema de balistică studiată, datorită formulei:

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} \frac{v(\theta)}{\cos\theta}\, d\theta, \tag{3.116}$$

obținută din rezultatul înlocuirii relației (3.112) în (3.111):

$$v\frac{d\theta}{dt} = -g\cos\theta \tag{3.117}$$

și a formulelor:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} v^2(\theta)\, d\theta \\ y = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} v^2(\theta)\operatorname{tg}\theta\, d\theta, \end{cases} \tag{3.118}$$

obținute tot din relația (3.117) după cum urmează:

$$\begin{cases} dx = v_x \cdot dt = v\cos\theta\, dt = -\frac{1}{g}v^2 d\theta \\ dy = dx\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{g}v^2\operatorname{tg}\theta\, d\theta. \end{cases} \tag{3.119}$$

Plecînd de la formulele stabilite pînă aici se pot demonstra următoarele proprietăți ale mișcării punctului material în aer:

a) traiectoria admite o asimptotă verticală (Δ), (fig. 3.7);

b) pe ramura descendentă viteza tinde spre o valoare limită v_L care este soluția ecuației:

$$\varphi(v) = 1; \tag{3.120}$$

c) viteza lui M atinge valoarea minimă pe ramura descendentă (după depășirea punctului A de înălțime maximă);

d) verticala punctului A (de înălțime maximă) este mai apropiată de ramura descendentă decît de cea ascendentă (distanțele fiind măsurate pe orizontală);

e) vitezele pe ramura ascendentă (OA) sînt mai mari în modul și mai puțin înclinate față de orizontală decît vitezele în punctele de aceeași înălțime de pe ramura descendentă (AB).

Scanned with OKEN Scanner

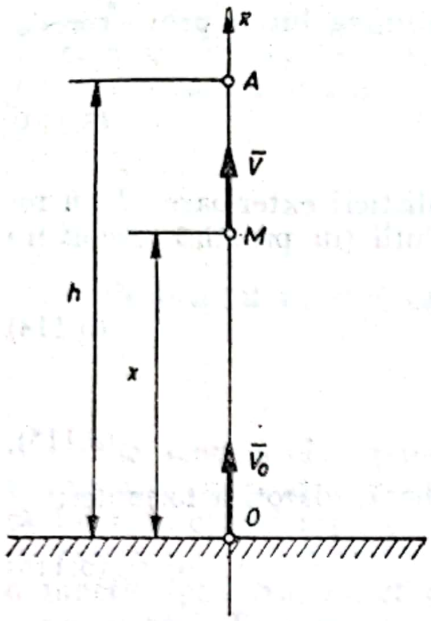


Fig. 3.8

Demonstrația acestor proprietăți, precum și a altora mai puțin importante considerăm că depășește cadrul prezentului curs și constituie probleme prezentate pe larg în orice tratat de balistică.

APLICAȚII

1. Să se studieze mișcarea unui corp greu aruncat vertical de pe sol în sus cu viteza inițială v_0 din punctul O, neglijîndu-se rezistența aerului (fig. 3.8).

Rezolvare: Proiectînd pe verticala ascendentă ecuațiile (3.95)—(3.97) pentru $r_0 = 0$ se obțin legile mișcării:

$$x = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t; \quad v_x = -gt + v_0; \quad a_x = -g.$$

Pe porțiunea ascendentă, mișcarea este uniform întîrziată pînă în punctul A cînd atinge înălțimea maximă h. Timpul t_A pînă în punctul maxim A se obține anulînd expresia vitezei:

$$-gt_A + v_0 = 0, \quad t_A = \frac{v_0}{g}.$$

Înlocuind timpul $t = t_A$ în expresia abscisei se găsește

$$x_A = h = -\frac{1}{2} gt_A^2 + v_0 t_A = \frac{v_0^2}{2g}.$$

După atingerea punctului maxim A, corpul coboară din nou pe aceeași verticală avînd o mișcare uniform accelerată și ajunge în punctul de plecare O, în timpul t_0 dat în relația:

$$x = -\frac{1}{2} gt_0^2 + v_0 t_0 = 0,$$

care are două soluții $t_0' = 0$ și $t_0'' = \frac{2v_0}{g}$. Prima soluție este valabilă pentru momentul pornirii, iar a doua pentru momentul cînd punctul revine în O. Se observă că $t_0'' = 2t_A$, deci timpul pentru mișcare din O în A este egal cu timpul pentru mișcarea de întoarcere din A în O.

Viteza cu care corpul revine în O este egală și de sens contrar vitezei inițiale $\bar{v}_0$. Într-adevăr cu relația $v_x = -gt + v_0$ pentru $t = t_0''$ rezultă:

$$v_x = -gt_0'' + v_0 = -v_0,$$

rezultat care se putea obține și din (3.35).

2. Un punct material de masă m este lăsat să cadă în aer, fără viteză inițială. Să se determine legea de mișcare a punctului, viteza în funcție de timp și de spațiul parcurs, și viteza limită în cazul căderii la infinit, știind că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei $R = k v^2$, unde k este coeficientul de rezistență (fig. 3.9).

Rezolvare: Alegem originea O în poziția inițială a punctului și axa Ox orientată în sens descendent. Condițiile inițiale sînt: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm mobilul într-o poziție oarecare dată de abscisa x. Asupra punctului acționează două forțe: greutatea proprie și rezistența aerului $R = k\,v^2$ orientată în sens contrar deplasării.

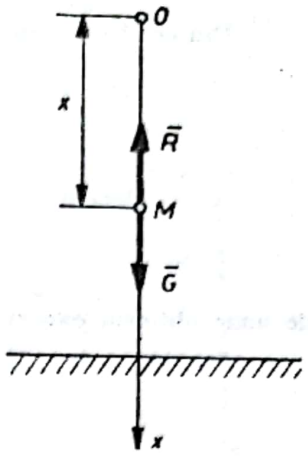


Fig. 3.9

Legea de mișcare este atunci:

$$m\ddot{x} = mg - kv^2 = mg\left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right),$$

sau:

$$\ddot{x} = g\left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right). \qquad (a)$$

Notînd: $\frac{k}{mg} = \frac{1}{c^2}$ relația (a) devine:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2). \qquad (b)$$

Separînd variabilele obținem:

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2}\,dt,$$

apoi integrînd rezultă:

$$\frac{1}{2c}\ln\frac{c+v}{c-v} = \frac{g}{c^2}t + C_1.$$

Scriind expresia de mai sus pentru condițiile inițiale rezultă că $C_1 = 0$, deci:

$$\frac{1}{2c}\ln\frac{c+v}{c-v} = \frac{g}{c^2}t.$$

Expresia vitezei va fi de forma:

$$v = c\,\frac{e^{\frac{2gt}{c}} - 1}{e^{\frac{2gt}{c}} + 1} = c\,\frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{\frac{-gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{\frac{-gt}{c}}} = c\,\frac{1 - e^{-\frac{2gt}{c}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{c}}}. \qquad (c)$$

Se observă că dacă $t \to \infty$, atunci $v_{max} = c = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \text{const.}$

Pentru a determina expresia vitezei funcție de spațiul parcurs x scriem:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx},$$

și relația (b) devine:

$$v\,\frac{dv}{dx} = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2),$$

Separînd variabilele rezultă:

$$\frac{v\,dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2}\,dx,$$

și integrînd obținem:

$$-\frac{1}{2}\ln(c^2 - v^2) = \frac{g}{c^2}x + C_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din condițiile inițiale $x_0 = 0$ și $v_0 = 0$ rezultă că $C_2 = -\frac{1}{2} \ln c^2$ și înlocuind avem:

$$-\frac{1}{2} \ln \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{g}{c^2} x \text{ sau}$$

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2} = e^{-\frac{2gx}{c^2}},$$

de unde obținem expresia vitezei:

$$v = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2gx}{c^2}}}.$$

Pentru a determina legea mișcării ne folosim de relația (c) unde înlocuind $v = \frac{dx}{dt}$, avem:

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{\frac{-gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{\frac{-gt}{c}}}.$$

Separînd variabilele

$$dx = c \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{\frac{-gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{\frac{-gt}{c}}} dt,$$

și integrînd avem:

$$x = \frac{c^2}{g} \ln (e^{\frac{gt}{c}} + e^{\frac{-gt}{c}}) + C_3.$$

Din condițiile inițiale, pentru $t = 0$, $x = 0$, rezultă $C_3 = -\frac{c^2}{g} \ln 2$ și înlocuind

$$x = \frac{c^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{c}} + e^{\frac{-gt}{c}}}{2}.$$

Pentru valori mari ale timpului t, $e^{\frac{-gt}{c}}$ se poate neglija și deci:

$$x \cong \frac{c^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{c}}}{2} = ct - \frac{c^2}{g} \ln 2.$$

Deci după trecerea unui anumit timp spațiul parcurs în continuare va fi proporțional cu timpul.

3. Un punct material execută oscilații liniare armonice. Să se determine legea mișcării punctului știind că pentru $t = 0$ avem $x_0 = 0$ și $v_0 = 1$ m/s și că numărul de oscilații pe minut este 60.

Rezolvare: Legea mișcării punctului se obține din relația (3.86) prin proiectare pe axa mișcării:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Perioada mișcării este:

$$T = \frac{60 \text{ s/min}}{60 \text{ oscil./min}} = 1\text{s}.$$

Din relația (3.87) rezultă:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}.$$

Deci legea de mișcare a punctului va fi:

$$x = 0{,}159 \sin 2\pi t.$$

4. Pe toba T a unei instalații de extracție cu raza $r = 0{,}5$ m se înfășoară cablul la capătul căruia se găsește colivia (C) care coboară după legea $s = 0{,}6\ t^2$. Să se afle accelerația punctului M situat pe circumferința tobei după 1 s de la începutul mișcării (fig. 3.10).

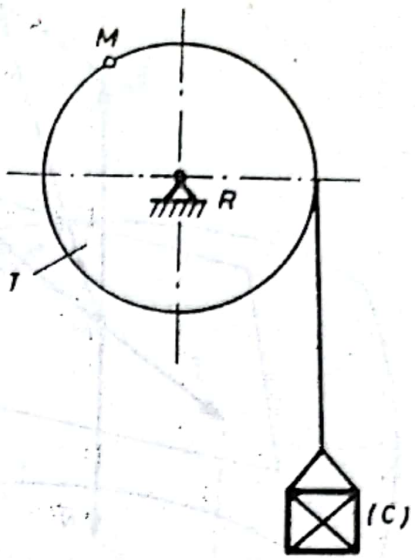


Fig. 3.10

Rezolvare:

Viteza coliviei (C) este:

$$V = \frac{ds}{dt} = 1{,}2\ t.$$

Cablul fiind înfășurat pe tobă, punctul M va avea tot viteza:

$$V_M = V = 1{,}2\ t.$$

Accelerația punctului M are componentele:

— tangențială

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 1{,}2$$

— normală

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{(1{,}2t)^2}{0{,}5} = 2{,}88\ t^2.$$

După $t = 1$ s de la începutul mișcării, aceste componente sînt:

$$a_\tau = 1{,}2 \text{ m/s}^2; \quad a_n = 2{,}88 \text{ m/s}^2.$$

Accelerația totală a punctului M este:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 2{,}88^2} = 3{,}12 \text{ m/s}^2.$$

3.3. PUNCTUL MATERIAL LEGAT PE O SUPRAFAȚĂ SAU PE O CURBĂ

3.3.1. **Frecarea de alunecare.** La contactul între un punct material și o suprafață sau o curbă materială (în general la contactul a două corpuri) s-a observat experimental că respectiva legătură acționează asupra punctului cu o forță de rezistență la alunecarea punctului pe acea suprafață sau curbă. Această forță, numită forța de frecare de alunecare, este dirijată în planul tangent la suprafață (respectiv după tangenta la curbă), în sens contrar de-

Scanned with OKEN Scanner

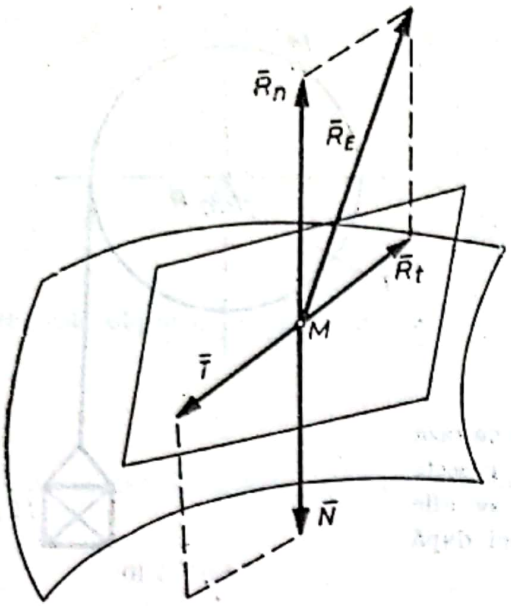


Fig. 3.11

plasării sau tendinței de deplasare a punctului. În ceea ce privește modulul acestei forțe el este limitat la valoarea maximă:

$$T_m = \mu N, \qquad (3.121)$$

în care N este reacțiunea normală a respectivei legături, iar μ un coeficient experimental numit coeficient de frecare de alunecare. Pentru a fi mai precişi, cît timp punctul prezintă doar tendință de deplasare față de legătură, forța de frecare poate lua orice valoare T între zero și T_m:

$$0 \leqslant T \leqslant T_m = \mu N, \qquad (2.122)$$

iar cînd punctul se deplasează față de legătură, forța de frecare are întotdeauna valoarea:

$$T = T_m = \mu N. \qquad (3.123)$$

Efectul forței de frecare este echilibrarea componentei tangențiale a rezultantei forțelor exterioare cît timp aceasta rămîne sub valoarea limită μN. Reacțiunea normală N echilibrează întotdeauna componenta normală a acestei rezultante, indiferent de mărimea acestei componente (fig. 3.11).

Există un caz special demn de remarcat și anume cazul echilibrului la limită. Un asemenea echilibru este întotdeauna specificat în problemă printr-o valoare maximă sau minimă a unui parametru (forță, moment, distanță, unghi etc.), pentru care se mai păstrează echilibrul. Altfel spus, la depășirea acelei valori maxime sau la scăderea sub acea valoare minimă punctul își pierde starea de echilibru. Într-un asemenea caz valoarea forței de frecare este cea maximă:

$$T = T_m = \mu N. \qquad (3.124)$$

Legile frecării de alunecare (numite legile lui *Coulomb*) se referă la caracteristicile coeficientului de frecare μ. Ele se enunță astfel:

1) coeficientul de frecare μ nu depinde de:

— mărimea suprafeței de contact (presupunînd contactul între două corpuri ca nefiind punctiform datorită elasticității tuturor corpurilor, punctul material fiind în realitate un corp cu dimensiuni mici, dar finite);

— mărimea reacțiunii normale a legăturii;

— viteza de deplasare a corpului față de legătură;

2) coeficientul de frecare μ depinde de:

— natura (materialul) corpurilor ce vin în contact;

— starea mecanică (rugozitatea) suprafețelor în contact;

— starea de lubrefiere (ungere) a acestor suprafețe.

Cercetările ulterioare confirmă valabilitatea ultimelor trei afirmații, însă infirmă valabilitatea ultimei afirmații din primele trei. În realitate

Scanned with OKEN Scanner

coeficientul de frecare μ depinde de viteza de deplasare relativă v a celor două corpuri în contact, funcția $\mu(v)$ avînd în general forma arătată în figura 3.12.

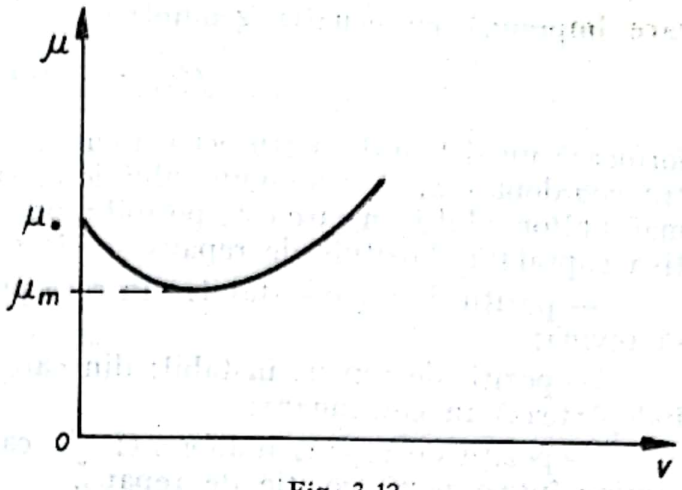


Fig. 3.12

Prin aceasta se explică faptul că frînarea la viteze de alunecare mici este mai eficace decît la viteze de alunecare ceva mai mari. Spre exemplu frînarea unui autovehicul e mai eficace atunci cînd roțile sale nu patinează.

Datorită faptului că raportul T/N are valoarea maximă μ, putem afirma că rezultanta $\bar{R}_L$ a forțelor de legătură $\bar{N}$ și $\bar{T}$ face cu normala $n—n$ (fig. 3.13) la suprafața sau curba de legătură un unghi maxim de valoare:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \mu, \tag{3.125}$$

numit unghi de frecare. Rolul acestui unghi în studiul mișcărilor și al echilibrului cu frecare se va vedea în paragrafele care urmează.

3.3.2. **Punctul material legat pe o suprafață lucie.** Vom spune că o suprafață este lucie dacă putem neglija frecarea pe acea suprafață. Un punct legat pe o astfel de suprafață va fi acționat de rezultanta forțelor exterioare $\bar{R}_E$ și de forța de legătură $\bar{R}_L = \bar{N}$. Deci pentru echilibrul unui astfel de punct material va trebui să scriem ecuația:

$$\bar{R}_E + \bar{N} = 0, \tag{3.126}$$

iar pentru studiul mișcării sale ecuația:

$$\bar{R}_E + \bar{N} = m\bar{a}, \tag{3.127}$$

în care m este masa acestui punct.

Se știe din Geometria analitică faptul că vectorul „grad f" este normal la suprafața $f(x, y, z) = 0$. Scriind deci reacțiunea normală $\bar{N}$ sub forma:

$$\bar{N} = \lambda \operatorname{grad} f, \tag{3.128}$$

în care λ este un scalar pentru moment nedeterminat, iar $f(x, y, z) = 0$ ecuația carteziană a suprafeței de legătură, relația (3.126), se scrie:

$$\bar{R}_E + \lambda \operatorname{grad} f = 0. \tag{3.129}$$

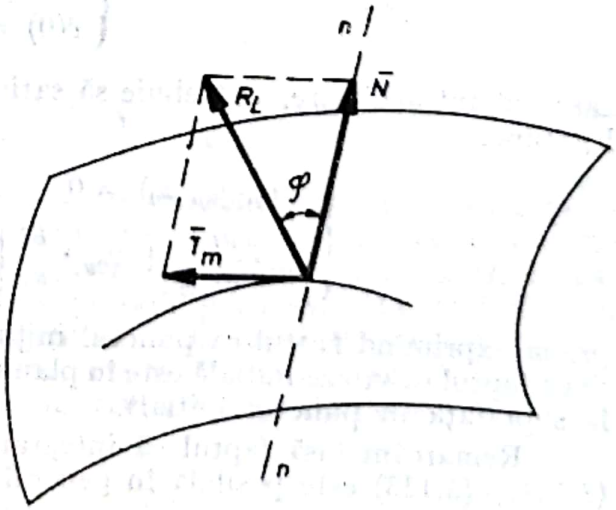


Fig. 3.13

Prin proiectarea acestei ecuații pe axele sistemului de referință cartezian obținem ecuațiile:

$$\begin{cases} R_{Ex} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ R_{Ey} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ R_{Ez} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{3.130}$$

Scanned with OKEN Scanner

care împreună cu ecuația geometrică:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{3.131}$$

formează un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute: scalarul λ și cele trei coordonate x, y, z ale punctului de pe suprafață (sau punctelor în cazul mai multor soluții) în care este posibil repausul punctului material pe respectiva suprafață. Pozițiile de repaus se clasifică în:

— poziții de repaus stabil: din care punctul material odată scos tinde să revină;

— poziții de repaus instabil: din care punctul material odată scos se îndepărtează în continuare;

— poziții de repaus indiferent: din care punctul material odată scos, rămîne într-o nouă poziție de repaus.

În ceea ce privește acum relația (3.127) scrisă pentru mișcarea punctului material pe o suprafață lucie, prin proiectarea ei pe axe și folosind relația (3.128) obținem ecuațiile:

$$\begin{cases} R_{ex} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} = m\ddot{x} \\ R_{ey} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} = m\ddot{y} \\ R_{ez} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} = m\ddot{z} \end{cases} \tag{3.132}$$

care împreună cu ecuația geometrică:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{3.133}$$

constituie un sistem de patru ecuații diferențiale cu patru necunoscute: scalarul $\lambda(t)$ și cele trei coordonate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ale punctului în mișcare. Evident, pentru determinarea celor șase constante scalare ce apar la integrarea sistemului sînt necesare șase condiții. Acestea se obțin prin proiectarea pe axe a condițiilor inițiale ale mișcării:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0 \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \end{cases} \tag{3.134}$$

care nu sînt arbitrare, ci trebuie să satisfacă următoarele condiții impuse de legătură:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ v_{0x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 + v_{0y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_0 + v_{0z} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_0 = 0, \end{cases} \tag{3.135}$$

prima exprimînd faptul că punctul inițial este un punct al suprafeței, iar a doua faptul că viteza inițială este în planul tangent (perpendiculară pe normala la suprafață în punctul inițial).

Remarcăm însă faptul că integrarea sistemului de ecuații diferențiale (3.132)—(3.133) este posibilă în general doar numeric cu ajutorul unui calculator.

Scanned with OKEN Scanner

3.3.3. Punctul material legat pe o suprafață aspră. O suprafață aspră este o suprafață la care trebuie să considerăm efectul forțelor de frecare. Un punct legat pe o astfel de suprafață va fi acționat deci de rezultanta forțelor exterioare $\bar{R}_E$ și de rezultanta forțelor de legătură:

$$\bar{R}_L = \bar{N} + \bar{T}, \qquad (3.136)$$

despre care știm că se poate îndepărta de la normala la suprafață cel mult cu unghiul:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \mu, \qquad (3.137)$$

numit unghi de frecare.

Ecuația de echilibru a unui asemenea punct este următoarea:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = 0. \qquad (3.138)$$

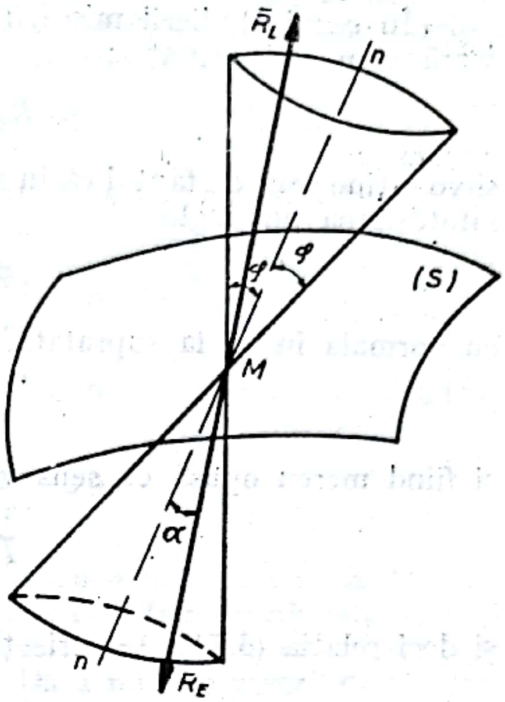


Fig. 3.14

Ea ne arată că și rezultanta $\bar{R}_E$ a forțelor exterioare trebuie să fie situată în interiorul unui con circular cu axa de simetrie după direcția normalei la suprafață și cu unghiul între generatoare și această axă egal cu unghiul de frecare (fig. 3.14). Acest con poartă numele de con de frecare. Deci pozițiile de echilibru ale punctului M pe suprafața (S), care sînt și pozițiile în care e posibil repausul lui M, sînt acelea în care rezultanta forțelor exterioare se află în interiorul conului de frecare. Prin această condiție se pot delimita zone de echilibru ale punctului M pe suprafața (S). Analitic, condiția de echilibru de mai sus, se poate scrie sub forma:

$$\frac{R_{Ex}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + R_{Ey}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + R_{Ez}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{R_{Ex}^2 + R_{Ey}^2 + R_{Ez}^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad (3.139)$$

care exprimă faptul că $\alpha \leqslant \varphi$ adică:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{R}_E \cdot \operatorname{grad} f}{R_E\,|\operatorname{grad} f|} \geqslant \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}. \qquad (3.140)$$

Rezolvarea analitică propriu-zisă a unei probleme de echilibru a punctului material legat pe o suprafață aspră se face prin proiectarea ecuației (3.138) pe axele unui triedru de referință cartezian cu originea în M, cu axa My după direcția normalei în M la suprafață și cu axa Mx dirijată după dreapta de intersecție a planului tangent în M la suprafață cu planul determinat de $\bar{R}_E$ și Mx. Dacă sensul acestor axe va fi ales astfel încît $\bar{R}_E$ să aibă proiecții negative pe ele, atunci putem scrie ecuațiile de proiecții:

$$\begin{cases} T + R_{Ex} = 0 \\ N + R_{Ey} = 0. \end{cases} \qquad (3.141)$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul studierii mișcării unui punct material legat pe o suprafață aspră vom scrie ecuația:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = m\bar{a}, \tag{3.142}$$

și vom ține cont de faptul că în acest caz rezultanta forțelor de legătură face întotdeauna un unghi

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\, \mu \tag{3.143}$$

cu normala în M la suprafață. Forța de frecare are deci valoarea:

$$T = \mu N \tag{3.144}$$

și fiind mereu opusă ca sens vectorului viteză putem scrie relația:

$$\bar{T} = -\mu N \frac{\bar{v}}{v} \tag{3.145}$$

și deci relația (3.142) se scrie ținînd cont și de (3.128) sub forma:

$$\bar{R}_E + \lambda \operatorname{grad} f - \frac{\lambda\mu\,|\operatorname{grad} f|}{v} \cdot \bar{v} = m\bar{a}. \tag{3.146}$$

Prin proiectarea acestei ecuații pe axele triedrului lui *Frenet* se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} R_{E\tau} - \mu N = m\dot{v} \\ R_{E\nu} + N_\nu = \dfrac{mv^2}{\rho} \\ R_{E\beta} + N_\beta = 0. \end{cases} \tag{3.147}$$

Studiul mișcării punctului cu aceste relații este însă extrem de dificil.

3.3.4. **Punctul material legat pe o curbă lucie.** Vom spune că o curbă este lucie cînd putem neglija frecarea pe acea curbă. Un punct material legat pe o astfel de curbă va fi acționat de rezultanta forțelor exterioare $\bar{R}_E$ și de reacțiunea normală $\bar{N}$ despre care nu putem spune la început decît că se află în planul normal la curbă în punctul M.

În consecință ecuația de echilibru a unui punct material M legat pe o curbă lucie se scrie:

$$\bar{R}_E + \bar{N} = 0, \tag{3.148}$$

iar ecuația de mișcare a acestui punct este:

$$\bar{R}_E + \bar{N} = m\bar{a}, \tag{3.149}$$

în care m este masa punctului M.

Ecuația de echilibru (3.148) poate fi transformată într-o formă convenabilă calculului analitic, dacă se dă curba (C) sub forma ecuațiilor:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{3.150}$$

Scanned with OKEN Scanner

a căror intersecție este curba (C). În acest caz reacțiunea $\bar{N}$ din planul normal la curbă este coplanară cu vectorii „grad f" și „grad g" dirijați după normalele la cele două suprafețe de mai sus și deci avem relația:

$$\bar{N} = \lambda \operatorname{grad} f + \mu \operatorname{grad} g. \tag{3.151}$$

Prin proiectarea pe axele triedrului cartezian $Oxyz$ a ecuației (3.148), folosind formula (3.151), obținem relațiile:

$$\begin{cases} R_{Ex} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ R_{Ey} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ R_{Ez} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{3.152}$$

care împreună cu relațiile geometrice (3.150) constituie un sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute: scalarii λ și μ și cele trei coordonate x, y, z ale punctului de pe curbă (sau punctelor în cazul mai multor soluții) în care este posibil repausul punctului material M. Dacă nu interesează decît coordonatele x, y, z ale pozițiilor posibile de repaus, acestea se vor determina din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} R_{Ex} & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ R_{Ey} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ R_{Ez} & \dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \end{vmatrix} = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{3.153}$$

prima ecuație reprezentînd condiția de compatibilitate a sistemului (3.152) cu necunoscutele λ și μ.

În cazul mișcării punctului material este în general convenabil să proiectăm ecuația (3.149) pe axele triedrului lui *Frenet* obținînd relațiile:

$$\begin{cases} R_{E\tau} = m\dot{v}, \\ R_{E\nu} + N_\nu = m \dfrac{v^2}{\rho} \\ R_{E\beta} + N_\beta = 0. \end{cases} \tag{3.154}$$

Evident că se poate folosi, după caz, și teorema momentului cinetic sau a energiei cinetice.

3.3.5. **Pendulul matematic.** Pendulul matematic este un punct material M de masă m, supus doar acțiunii propriei greutăți și legat pe un cerc luciu aflat în planul vertical al locului. Legătura poate fi realizată cu ajutorul unui fir flexibil și inextensibil ce leagă punctul M de un punct fix O. Fie un

Scanned with OKEN Scanner

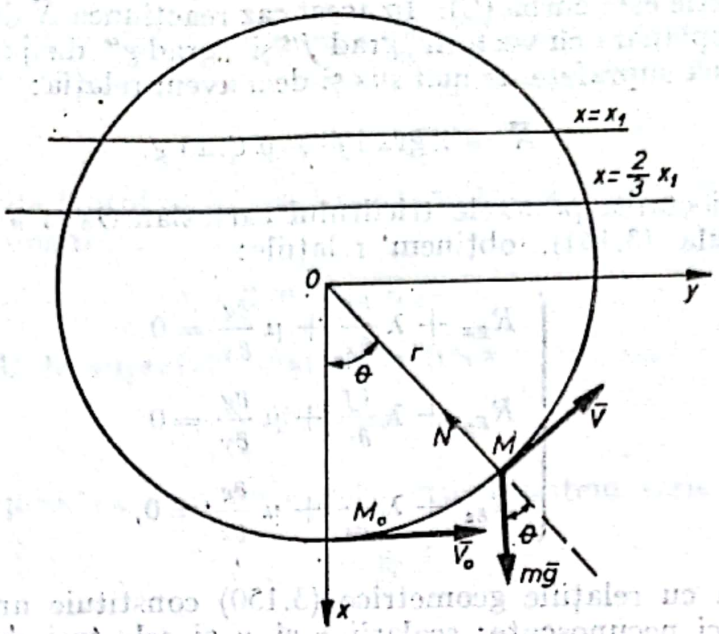


Fig. 3.15

astfel de punct (fig. 3.15) care pleacă din poziția inițială M_0 cu viteza inițială $\bar{v}_0$. Notînd cu r lungimea razei OM și luînd ca axă Ox verticala descendentă, iar ca axă Oy orizontala ce trece prin O, ecuația de mișcare (3.149) se scrie:

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{a}, \tag{3.155}$$

iar ecuațiile de proiecții (3.154) devin:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = m\dot{v} \\ N - mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{\rho}. \end{cases} \tag{3.156}$$

Folosind relațiile:

$$\begin{cases} v = \dot{\theta}r \\ \rho = r \end{cases} \tag{3.157}$$

ecuațiile (3.156) se scriu:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0; \tag{3.158}$$

$$N = mg\cos\theta + m\dot{\theta}^2 r. \tag{3.159}$$

Prima ecuație servește la determinarea mișcării, a doua la determinarea reacțiunii normale (odată mișcarea găsită). Pentru un studiu calitativ al mișcării vom aplica teorema energiei cinetice între punctul inițial $M_0(x_0, y_0, 0)$ și punctul curent $M(x, y, 0)$:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(x - x_0), \tag{3.160}$$

care se mai scrie:

$$v^2 = 2g(x - x_1), \tag{3.161}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

$$x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2g}. \tag{3.162}$$

Rezultă că viteza se anulează în punctele în care dreapta $x = x_1$ taie cercul. Considerînd legătura bilaterală, mișcarea (avînd loc în domeniul $x > x_1$) va fi deci:

— oscilatorie dacă $x_1 > -r$

— asimptotică dacă $x_1 = -r$

— rotatorie (se menține sensul) dacă $x_1 < -r$.

Dacă legătura este unilaterală (de exemplu realizată printr-un fir) va trebui să studiem și reacțiunea normală N care va trebui să fie dirijată spre centrul O pentru a nu avea desprindere de pe cerc. Din relațiile (3.156), (3.157) și (3.161) rezultă:

$$N = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\theta = \frac{m \cdot 2g(x - x_1)}{r} + \frac{mgr\cos\theta}{r};$$

$$N = \frac{mg}{r}(3x - 2x_1). \tag{3.163}$$

Deci reacțiunea N va fi îndreptată spre centrul cercului pentru $x > \frac{2x_1}{3}$, se va anula pentru $x = \frac{2x_1}{3}$ și va fi îndreptată spre exteriorul cercului pentru $x < \frac{2x_1}{3}$. În consecință, în cazul legăturii unilaterale mișcarea va fi:

— oscilatorie pentru $x_1 \geqslant 0$ deci $2gx_0 - v_0^2 \geqslant 0$;

— cu desprindere pentru $-r < \frac{2x_1}{3} < 0$ deci: $-3gr < 2gx_0 - v_0^2 < 0$;

— rotatorie pentru $\frac{2x_1}{3} \leqslant -r$ deci: $2gx_0 - v_0^2 \leqslant -3gr$.

Considerînd acum cazul unei mișcări oscilatorii, amplitudinea α a oscilației poate fi determinată din relația (3.161) ținînd cont de faptul că în punctele de amplitudine maximă viteza se anulează și deci:

$$x_{max} = r\cos\alpha = x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2g},$$

de unde:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{x_0}{r} - \frac{v_0^2}{2gr}\right). \tag{3.164}$$

Revenind acum la ecuația diferențială (3.158) se știe că ea nu este integrabilă analitic, ci doar numeric. Pentru a o putea integra analitic vom considera cazul unei amplitudini α mici (în practică sub 5°), caz în care unghiul θ fiind și el mic tot timpul mișcării ($|\theta| \leqslant \alpha$) putem face înlocuirea sinusului prin unghiul în radiani și deci relația (3.158) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0. \tag{3.165}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția acestei ecuații diferențiale este:

$$\theta = A \sin(\omega t + \varphi), \tag{3.166}$$

în care:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}, \tag{3.167}$$

iar constantele de integrare A și φ au valorile:

$$\begin{cases} A = \alpha \\ \varphi = \arcsin \dfrac{\theta_0}{\alpha}. \end{cases} \tag{3.168}$$

Mișcarea descrisă de legea (3.167) este o mișcare periodică cu perioada:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}, \tag{3.169}$$

care este independentă de amplitudinea α a mișcării. O astfel de mișcare se numește izocronă. Deci oscilațiile mici ale unui pendul matematic sînt niște oscilații izocrone. În cazul oscilațiilor cu amplitudine mai mare, mișcarea nu mai este izocronă, perioada oscilațiilor depinzînd de amplitudine, conform relației a cărei demonstrație nu o mai dăm:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 K^4 + \ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\right)^2 \cdot K^{2n} + \ldots\right] \tag{3.170}$$

$$\left(K = \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

Pentru amplitudini $\alpha < 23°$ eroarea relativă comisă aproximînd (3.170) prin (3.169) este sub 1%. Cînd $\alpha \to 0$ se vede că formula (3.170) tinde spre (3.169).

3.3.6. **Punctul material legat pe o curbă aspră.** O curbă aspră este o curbă la care trebuie să considerăm efectul forțelor de frecare. Un punct material legat pe o astfel de curbă va fi acționat de rezultanta forțelor exterioare $\bar{R}_E$ și de rezultanta forțelor de legătură:

$$\bar{R}_L = \bar{N} + \bar{T}. \tag{3.171}$$

Ecuația de echilibru a unui punct material legat pe o curbă aspră este deci:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = 0, \tag{3.172}$$

iar ecuația de mișcare:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = m\bar{a}, \tag{3.173}$$

în care m este masa punctului.

Pentru a studia echilibrul vom introduce noțiunea de con de frecare atașat unei curbe aspre într-un punct M al ei ca fiind un con circular cu axa de simetrie după tangenta în M la curbă și cu unghiul între generatoare

Scanned with OKEN Scanner

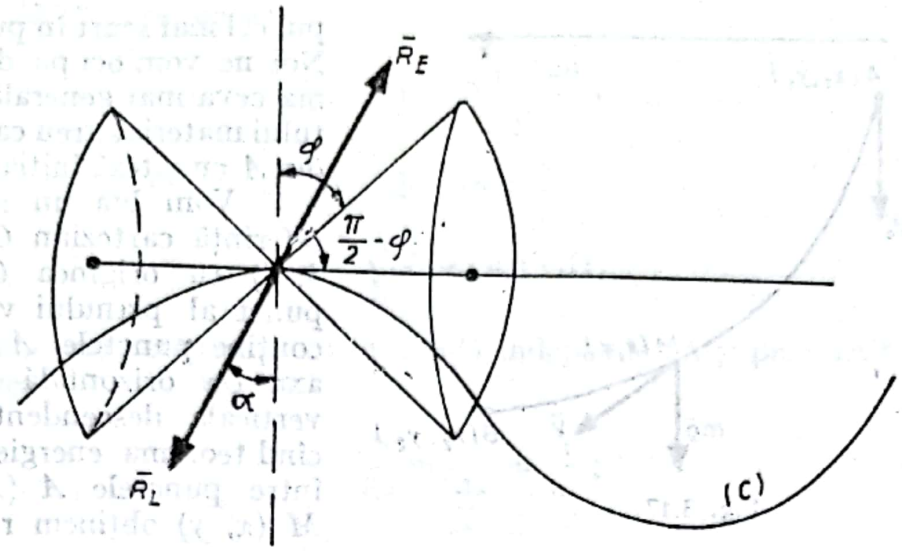


Fig. 3.16

și axă egal cu $\pi/2 - \varphi$ (fig. 3.16). Rezultanta $\bar{R}_L$ făcînd cu planul normal la curbă în M un unghi:

$$\alpha \leqslant \varphi, \tag{3.174}$$

înseamnă că ea va trebui să se găsească în afara conului de frecare. Din relația (3.172) rezultă atunci că pentru ca punctul M să fie în echilibru trebuie ca rezultanta forțelor exterioare $\bar{R}_E$ să fie exterioară conului de frecare atașat curbei în punctul M. Cu această condiție se pot delimita porțiuni de curbă în care punctul M se poate găsi în repaus.

Pentru a studia mișcarea unui punct material pe o curbă aspră se va ține cont de faptul că forța de frecare T are valoarea maximă și deci ecuația (3.173) scrisă sub forma:

$$\bar{R}_E + \bar{N} + \bar{T} = m\bar{a} \tag{3.175}$$

se proiectează pe axele triedrului lui *Frenet* sub forma:

$$\begin{cases} R_{E\tau} - \mu N = m\dot{v} \\ R_{E\nu} + N_\nu = m\dfrac{v^2}{\rho} \\ R_{E\beta} + N_\beta = 0, \end{cases} \tag{3.176}$$

a căror aplicare este însă în general dificilă.

3.3.7. **Brachistocronele.** Problema brachistocronei (sau problema curbei de timp minim) pusă de *Johann Bernoulli* în 1696 a fost istoricește prima problemă de calcul variațional care a atras interesul general al matematicienilor. De rezolvarea acestei probleme s-au ocupat pe rînd frații *Johann* și *Jacob Bernoulli*, *Newton*, *Leibnitz*, *l'Hôspital*, iar studiile lor au fost continuate și extinse de către *Euler*, *Lagrange*, *Poisson* și alții. Din aceste căutări și studii s-a născut calculul variațional.

Problema pusă inițial de *Bernoulli* se enunța astfel: dintre toate curbele care unesc două puncte date A și B (nesituate pe aceeași verticală) să se găsească aceea pe care un punct material greu, plecat din punctul mai înalt A fără viteză inițială și supus numai acțiunii forței de gravitație, ajunge în tim-

Scanned with OKEN Scanner

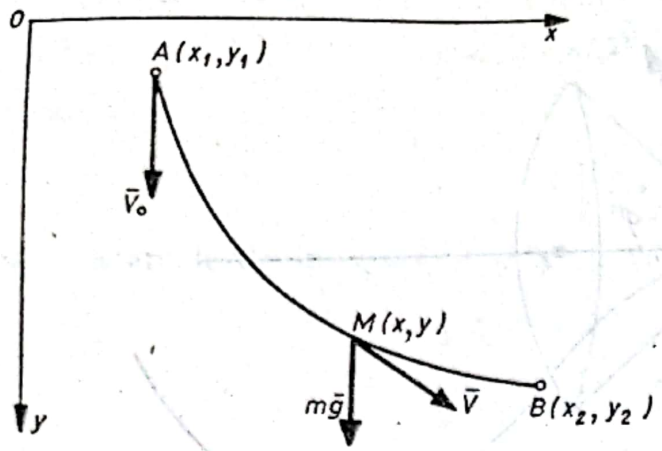


Fig. 3.17

pul cel mai scurt în punctul B. Noi ne vom ocupa de problema ceva mai generală a punctului material greu care pleacă din A cu viteză inițială dată v_0.

Vom lua un sistem de referință cartezian $Oxyz$ (fig. 3.17) cu originea O într-un punct al planului vertical ce conține punctele A și B, cu axa Ox orizontală și cu Oy verticala descendentă. Aplicînd teorema energiei cinetice între punctele $A\ (x_1,\ y_1)$ și $M\ (x,\ y)$ obținem relația:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(y - y_1), \tag{3.177}$$

de unde:

$$v = \sqrt{2g(y + y_0)}, \tag{3.178}$$

în care:

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g} - y_1. \tag{3.179}$$

Dar:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} \cdot dx}{dt} \tag{3.180}$$

și deci:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y + y_0)}} \cdot dx, \tag{3.181}$$

$$t_{A-B} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y + y_0)}}\, dx. \tag{3.182}$$

Problema minimului acestui timp este o problemă variațională pentru o funcțională de tip (1.341) și care se rezolvă deci integrînd ecuația lui *Euler* (1.381).

Funcția F din relația (1.341) este în cazul nostru:

$$F(y,\ y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y + y_0)}} \tag{3.183}$$

și ea nu depinde explicit de x. Vom face schimbarea de variabilă:

$$\begin{cases} u = y + y_0 \\ u' = y' \end{cases} \tag{3.184}$$

Scanned with OKEN Scanner

și relația (3.183) se scrie:

$$F(u,\ u') = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{2gu}}\cdot \tag{3.185}$$

Problema (3.182) este deci de tipul:

$$J = \int_a^b F(u,\ u')\cdot \mathrm{d}x. \tag{3.186}$$

Considerînd acum pe u ca variabilă independentă și pe x ca funcție de u vom avea:

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{u'}; \tag{3.187}$$

$$\mathrm{d}x = x'\cdot \mathrm{d}u; \tag{3.188}$$

$$F(u,\ u')\cdot \mathrm{d}x = F\left(u,\ \frac{1}{x'}\right)\cdot x'\cdot \mathrm{d}u = G(u,\ x')\cdot \mathrm{d}u; \tag{3.189}$$

$$G(u,\ x') = x'\cdot F\left(u,\ \frac{1}{x'}\right), \tag{3.190}$$

cu care (3.186) devine:

$$J = \int_{a_1}^{b_1} G(u,\ x')\cdot \mathrm{d}u. \tag{3.191}$$

Ecuația (1.381) scrisă pentru funcționala (3.191) devine:

$$G_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} G_{x'} = 0. \tag{3.192}$$

Însă:

$$G_x = 0 \tag{3.193}$$

și din relația (3.190) și (3.187) rezultă:

$$G_{x'} = F + x'\cdot F_{\frac{1}{x'}}\cdot\left(-\frac{1}{x'^2}\right) = F - u'\cdot F_{u'}. \tag{3.194}$$

Cu (3.193) și (3.194) ecuația (3.192) se transformă în:

$$F - u'\cdot F_{u'} = C_1, \tag{3.195}$$

care, utilizînd expresia (3.185), se scrie:

$$\frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{2gu}} - u'\,\frac{2\cdot u'}{2\sqrt{2gu}\cdot\sqrt{1+u'^2}} = \frac{1+u'^2-u'^2}{\sqrt{2gu}\cdot\sqrt{1+u'^2}} = C_1. \tag{3.196}$$

Deci putem scrie relația:

$$u(1+u'^2) = C_2, \tag{3.197}$$

Scanned with OKEN Scanner

care se poate pune sub forma ecuației cu variabilele separate:

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{C_2}{u}-1}}=dx. \tag{3.198}$$

Vom folosi însă un artificiu de calcul introducînd parametrul α prin relația:

$$u'=\operatorname{tg}\alpha. \tag{3.199}$$

Din (3.197) rezultă:

$$u=\frac{C_2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=C_2\cos^2\alpha=\frac{C_2}{2}(1+\cos 2\alpha). \tag{3.200}$$

Derivînd această relație în raport cu x obținem:

$$u'=-C_2\sin 2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dx}. \tag{3.201}$$

Cu ajutorul relației (3.199) deducem:

$$dx=\frac{-C_2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=-2C_2\cos^2\alpha\cdot d\alpha=$$

$$=-C_2(1+\cos 2\alpha)\,d\alpha, \tag{3.202}$$

și deci:

$$x=-\frac{C_2}{2}(2\alpha+\sin 2\alpha)+C_3. \tag{3.203}$$

Introducînd un nou parametru θ prin relația:

$$2\alpha=\pi-\theta, \tag{3.204}$$

din relațiile (3.184), (3.200) și (3.203) deducem:

$$\begin{aligned} x&=r(\theta-\sin\theta)+C;\\ y&=r(1-\cos\theta)-y_0, \end{aligned} \tag{3.205}$$

în care constanta y_0 este dată de (3.179), iar constantele de integrare r și C se determină din condiția impusă curbei de a trece prin A și prin B:

$$\begin{cases} x_1=r(\theta_1-\sin\theta_1)+C\\ y_1=r(1-\cos\theta_1)-y_0\\ x_2=r(\theta_2-\sin\theta_2)+C\\ y_2=r(1-\cos\theta_2)-y_0. \end{cases} \tag{3.206}$$

Ecuațiile parametrice (3.205) definesc o cicloidă generată prin rostogolirea unui cerc de rază r pe dreapta $y=-y_0$.

Să considerăm cazul cînd punctele A și B sînt pe Ox, A fiind originea. În acest caz vom avea:

$$y_0=\frac{v_0^2}{2g}. \tag{3.207}$$

Scanned with OKEN Scanner

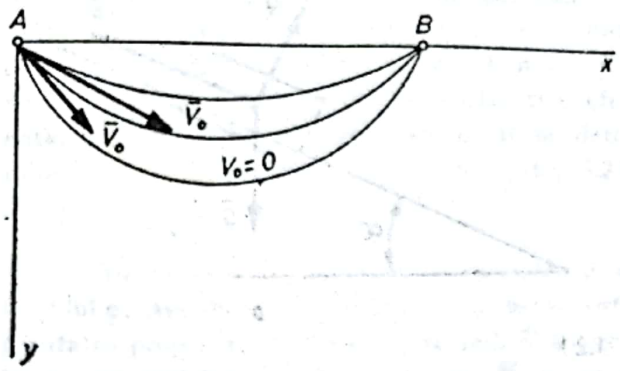


Fig. 3.18

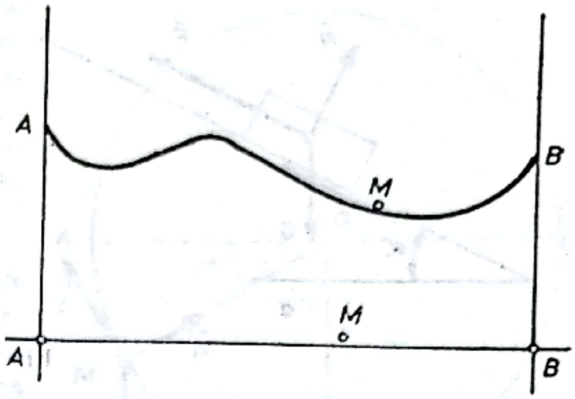


Fig. 3.19

Pentru $v_0 = 0$, rezultă $y_0 = 0$ și deci curba este un arc complet de cicloidă care taie axa Ox sub un unghi drept. Cu cît se consideră o viteză inițială v_0 mai mare cu atît dreapta $y = -y_0$ se îndepărtează de Ox și arcele de cicloidă ce trec prin A și B se apropie de dreapta AB, spre care tind cînd $v_0 \to \infty$ (fig. 3.18). De aici rezultă un fapt care pare paradoxal la prima vedere: cu același consum de combustibil putem ajunge în unele cazuri din punctul A în punctul B (fig. 3.19) mai repede mergînd pe un drum cu pante decît mergînd pe un drum rectiliniu.

APLICAȚII

1. Un punct material de greutate G poate aluneca fără frecare pe un cerc. Asupra punctului acționează forța orizontală F (fig. 3.20). Să se determine poziția de echilibru a punctului și reacțiunea cercului.

Rezolvare:

Eliberăm punctul material de legătura sa cu cercul și introducem reacțiunea normală N. Prin introducerea forței de legătură $\bar{N}$, punctul material M poate fi considerat liber sub acțiunea forțelor date ($\bar{G}$ și $\bar{F}$) și a reacțiunii $\bar{N}$. Ecuația vectorială de echilibru va fi:

$$\bar{F} + \bar{G} + \bar{N} = 0.$$

Luînd sistemul de axe Ox și Oy și proiectînd ecuația vectorială pe aceste axe avem:

$$F - N\cos\alpha = 0;$$

$$N\sin\alpha - G = 0,$$

de unde rezultă că:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{G}{F}; \quad N = \sqrt{F^2 + G^2}.$$

Discuție

— cînd $F \to \infty$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\alpha = 0$ sau π;

— cînd $F = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \infty$;

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$;

— cînd $F = G$; $\operatorname{tg}\alpha = 1$;

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ sau $\frac{5\pi}{4}$.

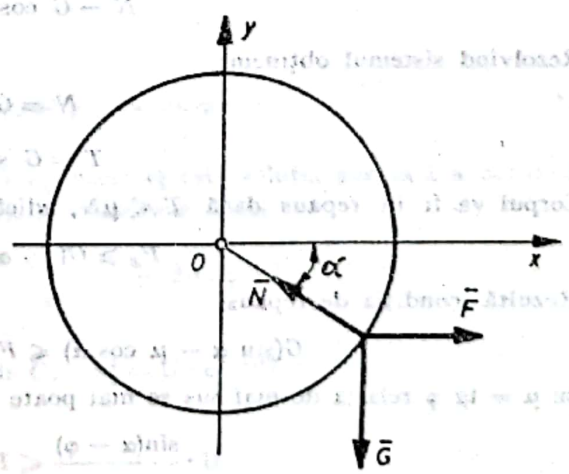


Fig. 3.20

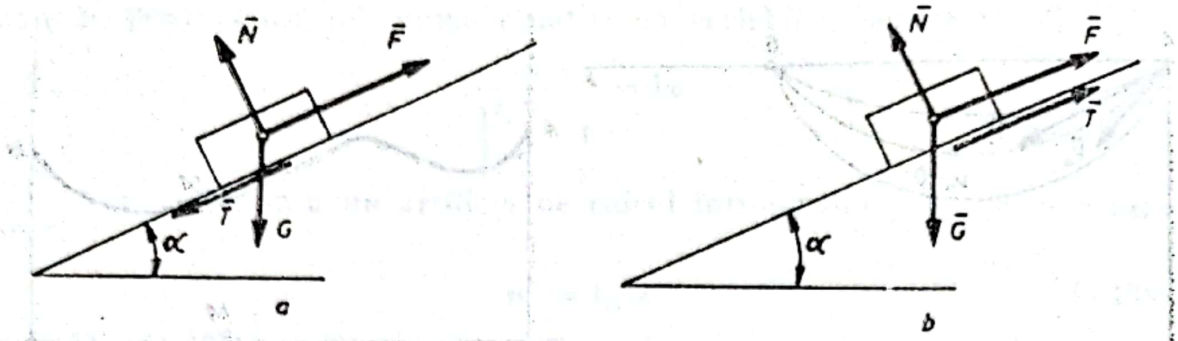


Fig. 3.21

2. Un corp de greutate $\bar{G}$ se reazemă pe un plan înclinat cu unghiul α față de planul orizontal. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ. Se cere să se determine limitele între care poate varia intensitatea forței $\bar{F}$ în așa fel încît corpul să rămînă în repaus (fig. 3.21).

Rezolvare:

Asupra corpului asimilat cu un punct lucrează forțele $\bar{F}$, $\bar{G}$, reacțiunea normală $\bar{N}$ și forța de frecare $\bar{T}$.

Vom considera atît cazul cînd mișcarea se execută în sus, cît și cazul cînd mișcarea se execută în jos.

a. Mișcarea în sus (fig. 3.21, *a*).

Scriem condițiile de echilibru proiectînd pe axe toate forțele:

$$F_x - T - G \sin \alpha = 0;$$

$$N - G \cos \alpha = 0.$$

Avem un sistem de ecuații cu necunoscutele N și T pe care rezolvîndu-l obținem:

$$N = G \cos \alpha;$$

$$T = F_x - G \sin \alpha.$$

Corpul va rămîne în repaus dacă $T \leqslant \mu N$, adică $F_x \leqslant G(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$.

b. Mișcarea în jos (fig. 3.21, *b*).

În acest caz, forța de frecare T își schimbă sensul. Scriem ecuațiile de echilibru:

$$F_x + T - G \sin \alpha = 0;$$

$$N - G \cos \alpha = 0.$$

Rezolvînd sistemul obținem:

$$N = G \cos \alpha;$$

$$T = G \sin \alpha - F_x.$$

Corpul va fi în repaus dacă $T \leqslant \mu N$, adică:

$$F_x \geqslant G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Rezultă condiția de repaus:

$$G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leqslant F_x \leqslant G(\mu \cos \alpha + \sin \alpha),$$

cu $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ relația de mai sus se mai poate scrie și sub forma:

$$G \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \leqslant F_x \leqslant G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Un inel se deplasează sub acțiunea greutății sale proprii G pe un cerc de rază r, conținut într-un plan vertical. Știind că inelul pornește din poziția A fără viteză inițială și coeficientul de frecare la alunecare este μ, să se determine viteza cu care trece prin punctul B (fig. 3.22).

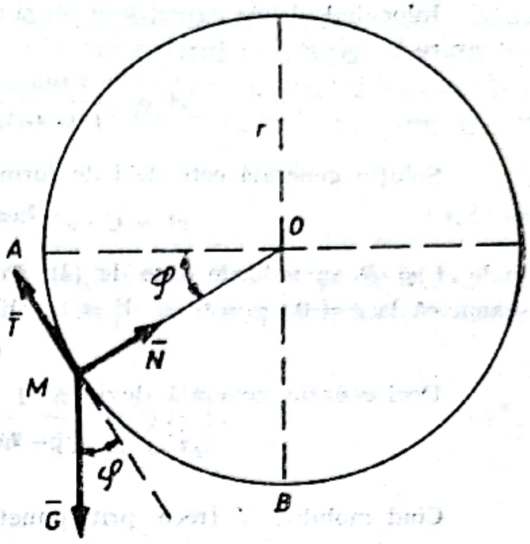


Fig. 3.22

Rezolvare:

Poziția mobilului M este determinată de unghiul φ. Asupra sa acționează următoarele forțe: greutatea proprie $\bar{G}$, reacțiunea normală $\bar{N}$ a cercului asupra inelului și forța de frecare $\bar{T}$ orientată în sens contrar deplasării.

Folosind relațiile (3.176) avem:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau; \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_\nu,$$

unde:

$$F_\tau = G\cos\varphi - T;$$

$$F_\nu = N - G\sin\varphi;$$

$$T = \mu N \text{ și } \rho = r.$$

Înlocuind avem:

$$m\frac{dv}{dt} = G\cos\varphi - \mu N; \quad m\frac{v^2}{r} = N - G\sin\varphi.$$

Din cele două relații rezultă:

$$\frac{dv}{dt} = g(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) - \frac{\mu}{r}v^2.$$

Dar:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v \text{ și } ds = r\,d\varphi,$$

deci ecuația diferențială devine:

$$v\frac{dv}{d\varphi} + \mu v^2 = rg(\cos\varphi - \mu\sin\varphi),$$

care se mai poate scrie:

$$\frac{d}{d\varphi}(v^2) + 2\mu v^2 = 2rg(\cos\varphi - \mu\sin\varphi). \tag{1}$$

Soluția generală va fi de forma $v^2 = v_1^2 + v_2^2$, unde v_1^2 este soluția generală a ecuației omogene și v_2^2 este o soluție particulară a ecuației neomogene. Deci:

$$\frac{d}{d\varphi}(v_1^2) + 2\mu v_1^2 = 0; \quad \frac{d(v_1^2)}{v_1^2} = -2\mu\,d\varphi.$$

$$\int\frac{d(v_1^2)}{v_1^2} = -2\mu\int d\varphi + \ln C; \quad v_1^2 = C\cdot e^{-2\mu\varphi}$$

și:

$$v_2^2 = A\cos\varphi + B\sin\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind ultima expresie în (1) și identificînd termenii obținem valorile constantelor de integrare A și B:

$$A = \frac{6\,rg\mu}{1+4\mu^2}; \quad B = \frac{2rg(1-2\mu^2)}{1+4\mu^2}. \tag{2}$$

Soluția generală este deci de forma:

$$v^2 = C \cdot e^{-2\mu\varphi} + A\cos\varphi + B\sin\varphi, \tag{3}$$

unde A și B au valorile date de (2). Pentru a determina constanta de integrare C, ținem seama că la $t = 0$; $\varphi = 0$ și $V = 0$. Din (3) rezultă:

$$C = -A.$$

Deci ecuația generală devine:

$$v^2 = -A\,e^{-2\mu\varphi} + A\cos\varphi + B\sin\varphi.$$

Cînd mobilul M trece prin punctul B, atunci $\varphi = \frac{\pi}{2}$ deci:

$$V_B = \sqrt{\frac{2rg}{1+4\mu^2}(1-2\mu^2-3\mu\,e^{-\mu\pi})}.$$

3.4. PUNCTUL MATERIAL ACȚIONAT DE FORȚE CENTRALE. ATRACȚIA UNIVERSALĂ

3.4.1. **Formula lui Binet.** Fie un punct material liber A de masă m acționat de o forță ce trece mereu printr-un punct fix O, numit pol. O astfel de forță se numește centrală (fig. 3.23).

Aplicînd teorema momentului cinetic față de O putem scrie:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F} = 0. \tag{3.208}$$

Deci:

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{v} = 2\,m\bar{\Omega} = \text{const.}, \tag{3.209}$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\bar{r} \times \bar{v} = \frac{1}{2}\bar{r}_0 \times \bar{v}_0, \tag{3.210}$$

în care $\bar{\Omega}$ este viteza areolară studiată în paragraful 2.3.10. Relațiile (3.209) și (3.210) arată că la mișcarea sub acțiunea unei forțe centrale momentul

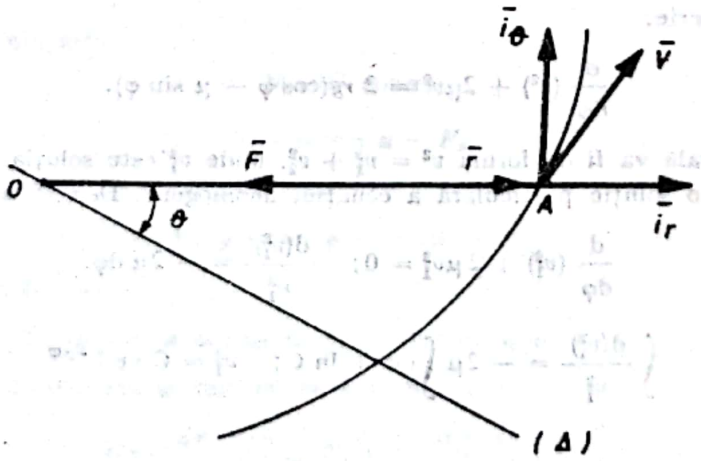


Fig. 3.23

cinetic se conservă și deci se conservă și viteza areolară, mișcarea punctului fiind prin urmare plană, vectorul său de poziție măturînd arii egale în intervale de timp egale. Vom studia acum în coordonate polare mișcarea punctului A de mai sus. Considerînd versorii $\bar{i}_r$ și $\bar{i}_\theta$ și cele două coordonate polare r și θ (fig. 3.23) putem scrie:

$$\bar{F} = F_r \bar{i}_r, \tag{3.211}$$

în care F_r e pozitiv pentru forțe de repulsie și negativ pentru forțe de atracție. Ținînd cont de expresia (1.210) a accelerației unui punct în coordonate polare, ecuația (3.208) se scrie:

$$F_r \bar{i}_r = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\,\bar{i}_\theta,\right], \tag{3.212}$$

din care rezultă:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2); \tag{3.213}$$

$$0 = \frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}). \tag{3.214}$$

Din (3.214) regăsim constanța vitezei areolare:

$$r^2\dot{\theta} = 2\Omega = C = \text{const.}, \tag{3.215}$$

iar în relația (3.213) vom transforma derivata lui r în raport cu timpul într-o derivată în raport cu θ, folosind relația (3.215):

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -C\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta};$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}. \tag{3.216}$$

Utilizînd relațiile (3.215) și (3.216) ecuația (3.213) devine:

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{F_r\cdot r^2}{mC^2}, \tag{3.217}$$

cunoscută sub denumirea de *ecuație a lui Binet*. Ea reprezintă ecuația diferențială a traiectoriei unui punct acționat de forțe centrale. Constanta C este:

$$C = 2\Omega = r_0\cdot v_0\cdot\sin\alpha, \tag{3.218}$$

α fiind unghiul dintre vectorul de poziție inițial $\bar{r}_0$ și viteza inițială $\bar{v}_0$, iar Ω fiind viteza areolară.

3.4.2. **Mișcarea sub acțiunea forțelor de atracție universală.** Dacă un punct mobil A este atras de un punct fix O cu o forță de atracție universală:

$$F = \frac{Km_0m}{r^2}, \tag{3.219}$$

Scanned with OKEN Scanner

K fiind constanta atracției universale, iar m_0 masa punctului O, ecuația (3.217) devine:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}=-\frac{-Km_0m\cdot r^2}{r^2\cdot m\cdot C^2}=\frac{Km_0}{C^2}=\frac{1}{p}. \tag{3.220}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul doi, cu coeficienți constanți, este:

$$\frac{1}{r}=\frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{p}, \tag{3.221}$$

unde ε și θ_0 sînt constantele de integrare. Deci:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}, \tag{3.222}$$

care se știe din Geometrie că reprezintă o conică cu focarul în O și de excentricitate ε.

3.4.3. **Legile lui Kepler.** Se știe că planetele rămîn în jurul Soarelui. Aceasta înseamnă că ele se mișcă pe niște elipse, elipsa fiind singura conică închisă. Parametrul p al elipsei se determină din ecuația (3.222) în care:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}<1, \tag{3.223}$$

c fiind distanța între centrul elipsei și un focar. Ținînd cont de relația geometrică:

$$a^2=b^2+c^2, \tag{3.224}$$

în care b este semiaxa mică a elipsei, din relația (3.222) deducem:

$$2a=\frac{p}{1-\varepsilon}+\frac{p}{1+\varepsilon}=\frac{2p}{1-\varepsilon^2},$$

$$p=a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=a\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{a}. \tag{3.225}$$

Din relația:

$$\Omega=\frac{dS}{dt}$$

deducem:

$$S=\Omega t. \tag{3.226}$$

care aplicată pentru o rotație completă ne dă perioada:

$$T=\frac{S}{\Omega}=\frac{\pi ab}{\Omega}. \tag{3.227}$$

Cu ajutorul relațiilor (3.218), (3.220) și (3.225) putem scrie:

$$\Omega=\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{Km_0p}=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{Km_0}{a}}, \tag{3.228}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu care perioada de revoluție a unei planete (3.227) devine:

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{Km_0}},$$

și deci:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Km_0} = \text{const.} \qquad (3.229)$$

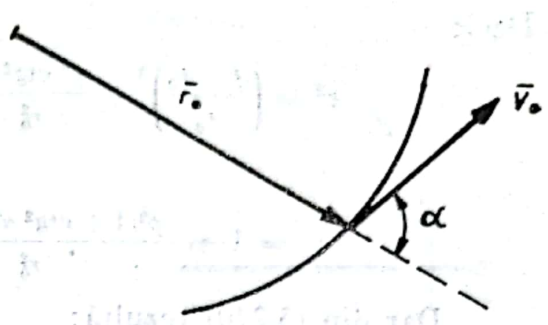


Fig. 3.24

Cu aceasta putem enunța cele *trei legi ale lui Kepler* sub forma:

— planetele descriu elipse avînd unul din focare în Soare;

— raza vectoare a planetei descrie arii egale în intervale de timp egale;

— raportul dintre pătratul timpului de revoluție și cubul semiaxei mari este același pentru toate planetele.

Notăm că aceste legi au fost descoperite de *Kepler* pe baza observațiilor sale, calculele fiind făcute de-abia după ce *Newton* a descoperit legea atracției universale și a aplicat calculul infinitezimal la rezolvarea acestei probleme de „mecanică cerească".

3.4.4. **Determinarea excentricității conicei cu ajutorul condițiilor inițiale.** Fie conica dată de ecuația (3.222), condițiile inițiale ale mișcării fiind pentru $\theta = 0$:

$$\begin{cases} r = r_0. \\ v = v_0 \\ \sphericalangle\,(\bar{r}_0, \bar{v}_0) = \alpha \end{cases} \qquad (3.230)$$

după cum se vede în figura 3.24. Conform relației (1.209) componenta vitezei după direcția razei vectoare este:

$$v_r = \dot{r}, \qquad (3.231)$$

pe care o calculăm cu ajutorul relațiilor (3.222) și (3.215) sub forma:

$$v_r = \frac{p\varepsilon \sin(\theta - \theta_0)}{[1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)]^2} \cdot \dot{\theta} =$$

$$= \frac{Cp\varepsilon \sin(\theta - \theta_0)}{r^2[1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)]^2} = \frac{C\varepsilon \sin(\theta - \theta_0)}{p}. \qquad (3.232)$$

La $\theta = 0$ va trebui să avem:

$$\begin{cases} r = r_0 \\ v_r = v_0 \cos\alpha. \end{cases} \qquad (3.233)$$

Aplicînd aceste condiții relațiilor (3.222) și (3.232) avem:

$$r_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta_0}; \qquad v_0 \cos\alpha = -\frac{C\varepsilon \sin\theta_0}{p},$$

și deci, cu relația (3.218) putem scrie:

$$\varepsilon\cos\theta_0 = \frac{p - r_0}{r_0}; \qquad \varepsilon\sin\theta_0 = -\frac{pv_0\cos\alpha}{C} = -\frac{pv_0\cos\alpha}{r_0 v_0 \sin\alpha} = -\frac{p\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{r_0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci:

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{p - r_0}{r_0}\right)^2 + \frac{p^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{r_0^2} = \frac{p^2 - 2pr_0 + r_0^2 + p^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{r_0^2} =$$

$$= 1 + \frac{p^2(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 2pr_0}{r_0^2} = 1 + \frac{\dfrac{p^2}{\sin^2 \alpha} - 2pr_0}{r_0^2}. \tag{3.234}$$

Dar din (3.220) rezultă:

$$p = \frac{C^2}{Km_0} = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{Km_0},$$

şi deci:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{\dfrac{r_0^4 v_0^4 \sin^2 \alpha}{K^2 m_0^2} - \dfrac{2r_0^3 v_0^2 \sin^2 \alpha}{Km_0}}{r_0^2}} = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{K^2 m_0^2}\left(v_0^2 - \frac{2Km_0}{r_0}\right)}. \tag{3.235}$$

Rezultă că:

— pentru $v_0 = \sqrt{\dfrac{Km_0}{r_0}}$ şi $\alpha = \pm \dfrac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$: traiectoria este un cerc.

— pentru $v_0 < \sqrt{\dfrac{2Km_0}{r_0}}$, $\varepsilon < 1$: traiectoria este o elipsă.

— pentru $v_0 = \sqrt{\dfrac{2Km_0}{r_0}}$, $\varepsilon = 1$: traiectoria este o parabolă.

— pentru $v_0 > \sqrt{\dfrac{2Km_0}{r_0}}$, $\varepsilon > 1$: traiectoria este o hiperbolă.

Este interesant faptul că natura conicii (elipsă, parabolă sau hiperbolă) nu depinde de direcţia vitezei iniţiale (adică de unghiul α), ci doar de modulul acestei viteze. Dacă lansarea are loc de pe Pământ viteza necesară instalării unui corp pe o orbită circulară circumterestră se numeşte „prima viteză cosmică" şi ea are valoarea:

$$v_I = \sqrt{\frac{Km_0}{r_0}} = \sqrt{gr_0} = \sqrt{9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 6\,370\,000 \text{ m}} \simeq 7\,900 \text{ m/s}.$$

Viteza necesară la lansarea unui corp de pe Pământ pentru a-l instala pe o traiectorie parabolică (deci pentru a-i permite o mişcare interplanetară) poartă numele de „a doua viteză cosmică" şi ea are valoarea:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2Km_0}{r_0}} = \sqrt{2gr_0} \simeq 11\,000 \text{ m/s}.$$

3.5. PUNCTUL MATERIAL DE MASĂ VARIABILĂ

3.5.1. **Ecuaţia lui Mescerski generalizată.** Fie un punct material M (fig. 3.25) a cărui masă variază în timp datorită faptului că din el se desprind o serie de particule (A) şi în acelaşi timp i se alipesc o serie de particule (B).

Scanned with OKEN Scanner

În consecință masa punctului material M se va schimba în timp după o lege de forma:

$$m(t) = m_0 - \alpha(t) + \beta(t), \tag{3.236}$$

în care α și β sînt două funcții pozitive, strict crescătoare în timp și nule la momentul $t = 0$, moment în care masa punctului M este m_0. Funcțiile α și β reprezintă respectiv masa particulelor desprinse din M în intervalul $0 - t$ și masa particulelor atașate lui M în acest interval de timp. Notînd:

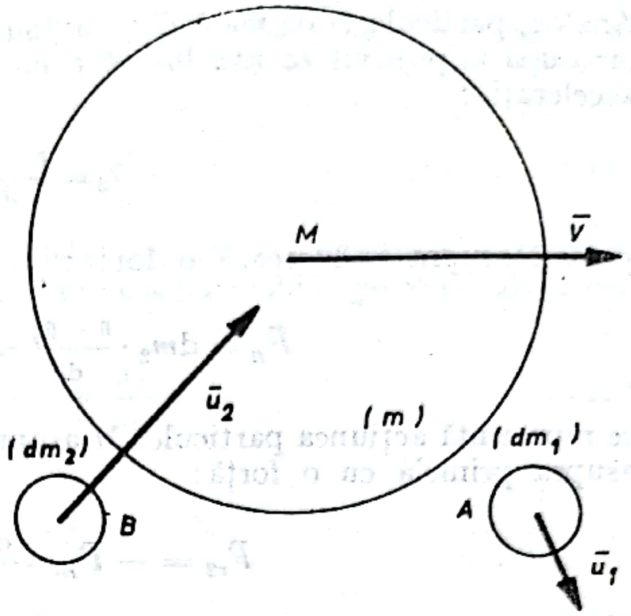


Fig. 3.25

$$\begin{cases} m_0 - \alpha(t) = m_1(t) \\ \beta(t) = m_2(t) \end{cases} \tag{3.237}$$

formula (3.236) devine:

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t). \tag{3.238}$$

Prin diferențierea relațiilor (3.237) și (3.238) obținem:

$$-\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}\alpha, \tag{3.239}$$

reprezentînd masa desprinsă într-un interval de timp $\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}m_2 = \mathrm{d}\beta, \tag{3.240}$$

reprezentînd masa alipită în intervalul de timp $\mathrm{d}t$, și

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 + \mathrm{d}m_2, \tag{3.241}$$

reprezentînd variația masei punctului M în intervalul de timp $\mathrm{d}t$.

Particula A de masă $-\mathrm{d}m_1$, avînd înainte de desprindere viteza absolută $\bar{v}$ a masei m, iar după desprindere viteza absolută $\bar{u}_1$, are în intervalul de timp $\mathrm{d}t$ accelerația:

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{u}_1 - \bar{v}}{\mathrm{d}t} \tag{3.242}$$

și deci asupra ei lucrează o forță:

$$\bar{F}_A = -\mathrm{d}m_1 \frac{\bar{u}_1 - \bar{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}(\bar{u}_1 - \bar{v}). \tag{3.243}$$

Această forță reprezintă evident acțiunea particulei M asupra particulei A. Conform principiului acțiunii și reacțiunii particula A va reacționa asupra particulei M cu o forță egală în mărime și opusă ca sens:

$$\bar{F}_{r1} = -\bar{F}_A = \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}(\bar{u}_1 - \bar{v}). \tag{3.244}$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog, particula B de masă dm_2, avînd înainte de alipire viteza absolută $\bar{u}_2$, iar după alipire viteza absolută $\bar{v}$ a masei m, are în intervalul de timp dt accelerația:

$$\bar{a}_2 = \frac{\bar{v} - \bar{u}_2}{dt}, \tag{3.245}$$

și deci asupra ei lucrează o forță:

$$\bar{F}_B = dm_2 \cdot \frac{\bar{v} - \bar{u}_2}{dt} = \frac{dm_2}{dt}(\bar{v} - \bar{u}_2), \tag{3.246}$$

ce reprezintă acțiunea particulei M asupra particulei B. Aceasta va reacționa asupra primeia cu o forță:

$$\bar{F}_{r2} = -\bar{F}_B = \frac{dm_2}{dt}(\bar{u}_2 - \bar{v}). \tag{3.247}$$

În final, presupunînd că punctul material M este supus și acțiunii unor forțe exterioare date (greutate proprie etc.) a căror rezultantă este $\bar{F}$, relația (3.1) se scrie în cazul punctului M sub forma:

$$\bar{F} + \frac{dm_1}{dt}\bar{v}_{r1} + \frac{dm_2}{dt}\bar{v}_{r2} = m\bar{a}, \tag{3.248}$$

cunoscută sub numele de ecuație a lui *Mescerski* generalizată în care:

$$\bar{v}_{r1} = \bar{u}_1 - \bar{v} \tag{3.249}$$

reprezintă viteza relativă a particulelor ce se desprind (particulele A) față de punctul M, iar:

$$\bar{v}_{r2} = \bar{u}_2 - \bar{v} \tag{3.250}$$

reprezintă viteza relativă a particulelor ce se alipesc (particulele B) față de punctul M.

Termenii suplimentari:

$$\begin{cases} \bar{F}_{r1} = \dfrac{dm_1}{dt}\bar{v}_{r1} \\ \bar{F}_{r2} = \dfrac{dm_2}{dt}\bar{v}_{r2} \end{cases} \tag{3.251}$$

se numesc forțe reactive.

Aplicînd teorema impulsului particulelor M, A și B printr-un calcul simplu pe care-l lăsăm pe seama cititorului se poate obține relația (3.248). Rezultă deci că teorema impulsului este valabilă și în cazul punctului de masă variabilă.

3.5.2. **Formula lui Țiolkovski.** Fie o rachetă care-și micșorează masa după legea generală:

$$m(t) = m_0 - \alpha(t) = m_1(t). \tag{3.252}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să studiem mişcarea pe verticală a acestei rachete, ce pleacă de pe sol fără viteză iniţială, neglijînd forţa de greutate proprie şi forţa de rezistenţă a aerului. În acest caz relaţia (3.248) se scrie:

$$\frac{dm}{dt}\bar{v}_r = m\frac{d\bar{v}}{dt}. \tag{3.253}$$

Presupunînd viteza $\bar{v}_r$ a particulelor ejectate constantă şi dirijată în sens contrar mişcării rachetei, proiectînd ecuaţia (3.253) pe verticala ascendentă obţinem relaţia:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_r\frac{dm}{dt}. \tag{3.254}$$

Din aceasta rezultă:

$$dv = -v_r\frac{dm}{m};$$

$$v = -v_r \ln m + C. \tag{3.255}$$

Aplicînd condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ m(0) = m_0 \end{cases} \tag{3.256}$$

obţinem:

$$C = v_r \ln m_0, \tag{3.257}$$

şi deci relaţia (3.255) devine:

$$v = v_r \ln\frac{m_0}{m}, \tag{3.258}$$

cunoscută sub numele de formula lui *Ţiolkovski*.

Pentru un studiu exact al mişcării trebuie să plecăm de la relaţia:

$$m\bar{g} + \bar{F}_a + \frac{dm}{dt}\bar{v}_r = m\bar{a}, \tag{3.259}$$

în care $\bar{g}$ este acceleraţia gravitaţiei variabilă cu altitudinea, $\bar{F}_a$ forţa de rezistenţă a aerului variabilă cu viteza şi cu densitatea aerului (deci cu altitudinea). Studiul unei astfel de ecuaţii depăşeşte însă cadrul acestui curs.

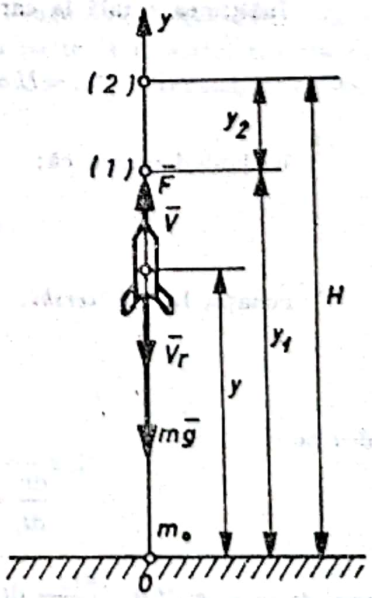


Fig. 3.26

APLICAŢII

1. O rachetă care are masa variabilă este lansată vertical fără viteză iniţială (fig. 3.26). Viteza relativă de scurgere a gazelor din rachetă v_r este constantă. Dacă se neglijează rezistenţa aerului, se cere să se determine legile mişcării rachetei în următoarele ipoteze:

a. masa rachetei variază după legea $m = m_0 e^{-\alpha t}$;

b. masa rachetei variază după legea $m = m_0(1 - \alpha t)$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare:

a. Aplicînd relația (3.248) avem:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v}).$$

Proiectînd pe axa Oy vom obține:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt}v_r.$$

În prima ipoteză

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m_0 e^{-\alpha t} = -\alpha m,$$

deci:

$$\frac{m\,dv}{dt} = -mg + \alpha m v_r.$$

După simplificare obținem:

$$\frac{dv}{dt} = a = -g + \alpha v_r.$$

Integrînd succesiv obținem:

$$v = -gt + \alpha v_r t = t(\alpha v_r - g) \text{ și } y = (\alpha v_r - g)\frac{t^2}{2}.$$

Cunoscînd că partea necombustibilă a rachetei este $\frac{m_0}{k}$ se poate determina timpul de ardere a combustibilului t_1 și înălțimea y_1 la care se ridică racheta în acest moment:

$$t_1 = \frac{\ln k}{\alpha}; \quad v_1 = \frac{(\alpha v_r - g)\ln k}{\alpha}; \quad y_1 = \frac{\alpha v_1 - g}{2}\left(\frac{\ln k}{\alpha}\right)^2.$$

Înălțimea totală la care se ridică racheta este:

$$H = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\alpha v_r}{2g}(\alpha v_r - g)\left(\frac{\ln k}{\alpha}\right)^2.$$

b. Ținînd seama că:

$$m = m_0(1 - \alpha t); \quad \frac{dm}{dt} = -m_0\alpha,$$

ecuația lui *Mescerski*:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt}v_r$$

devine:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{dm}{dt}v_r = -g + \frac{\alpha}{1 - \alpha t}v_r,$$

sau $dv = -g\,dt + \frac{\alpha v_r}{1 - \alpha t}dt$, de unde $v = -gt - v_r \ln(1 - \alpha t)$.

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd din nou:

$$dy = -gt\,dt - v_r \ln(1-\alpha t)\,dt;$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} - v_r \int \ln(1-\alpha t)\,dt.$$

Ultima integrală se rezolvă prin părți:

$$\int \ln(1-\alpha t)\,dt = t\ln(1-\alpha t) -$$

$$-\int\left(1-\frac{1}{1-\alpha t}\right)dt = t\ln(1-\alpha t) - t -$$

$$-\frac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha t) = \frac{1}{\alpha}[\ln(1-\alpha t)(\alpha t-1) - \alpha t].$$

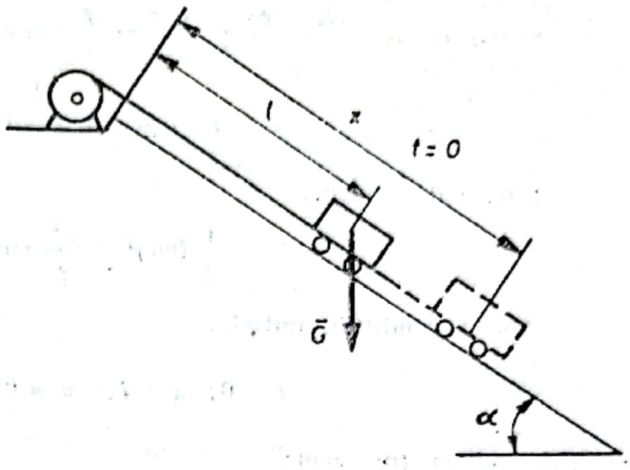


Fig. 3.27

Deci:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{v_r}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t].$$

Timpul de ardere al combustibilului t_1 se determină astfel:

$$\frac{m_0}{k} = m_0(1-\alpha t_1), \text{ de unde } t_1 = \frac{k-1}{k\alpha}.$$

Înlocuind timpul t_1 în expresia vitezei și a spațiului obținem:

$$v_1 = v_r \ln k - g\frac{k-1}{\alpha k}; \quad y_1 = \frac{v_r}{\alpha k}[(k-1) - \ln k] - \frac{g}{2}\left(\frac{k-1}{\alpha k}\right)^2.$$

Înălțimea totală la care se ridică racheta este:

$$H = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_r^2(\ln k)^2}{2g} + \frac{v_r}{\alpha k}(k - 1 - k\ln k).$$

2. În timpul ridicării pe un plan înclinat cu ajutorul troliului a unui vagonet, se întrerupe alimentarea motorului electric. Frîna troliului fiind defectă, vagonetul începe să se deplaseze în sens descendent. Să se determine legea de variație a vitezei vagonetului, avînd în vedere că în timpul mișcării sale, cablul se desfășoară de pe tobă și ia parte la mișcare. Greutatea cablului pe unitatea de lungime este p. La momentul inițial sistemul se află în repaus, iar cablul era desfășurat pe o lungime l. Frecările se pot neglija (fig. 3.27).

Rezolvare:

Scriem ecuația lui *Mescerski* sub forma:

$$m\frac{dv}{dt} = R - \frac{dm}{dt}V,$$

unde: $R = mg\sin\alpha = (G + px)\sin\alpha$.
Deci:

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = mg\sin\alpha \text{ sau } d(mv) = mg\sin\alpha\,dt.$$

Înmulțind ecuația cu produsul mv, se obține:

$$mv\,d(mv) = (m^2 g\sin\alpha)\,v\,dt. \qquad (a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Știind că $m = \frac{G + px}{g}$; $\frac{dm}{dt} = \frac{p}{g} v$ și $v\,dt = \frac{g}{p}\,dm$, înlocuind în ecuația (a) rezultă:

$$mv\,d(mv) = \frac{g^2}{p} \sin\alpha\, m^2\,dm.$$

Integrînd obținem:

$$\frac{1}{2}(mv)^2 = \frac{g^2}{p} \sin\alpha \frac{m^3}{3} + C. \qquad (b)$$

Punem condițiile inițiale:

$$t = 0;\quad x = l;\quad v = 0;\quad m = \frac{G + pl}{g};$$

și înlocuind în (b) avem:

$$0 = \frac{g^2 \sin\alpha}{3p}\left(\frac{G + pl}{g}\right)^3 + C, \text{ de unde } C = -\frac{(G + pl)^3 \sin\alpha}{3p\,g}.$$

Înlocuind constanta în (b) rezultă:

$$\frac{1}{2}(mv)^2 = \frac{g^2 m^3}{3p} \sin\alpha - \frac{(G + p\,l)^3}{3pg} \sin\alpha.$$

Deci legea de variație a vitezei va fi:

$$v = \sqrt{\frac{2g(G + px)^3 - (G + pl)^3 \cdot \sin\alpha}{3p(G + px)^2}}.$$

3. Să se studieze mișcarea coliviei unei instalații de extracție în timpul coborîrii sale ținînd seama și de greutatea proprie a cablului (fig. 3.28), masa cablului pe unitatea de lungime este ρ, masa coliviei este m_0 și știm că la momentul inițial cablul avea lungimea a.

În timpul mișcării se consideră motorul de acționare deconectat.

Rezolvare:

Rezultanta forțelor exterioare pe direcția mișcării este $R = m_0 g + \rho g x = mg$.

Scriem ecuația lui *Mescerski* sub forma:

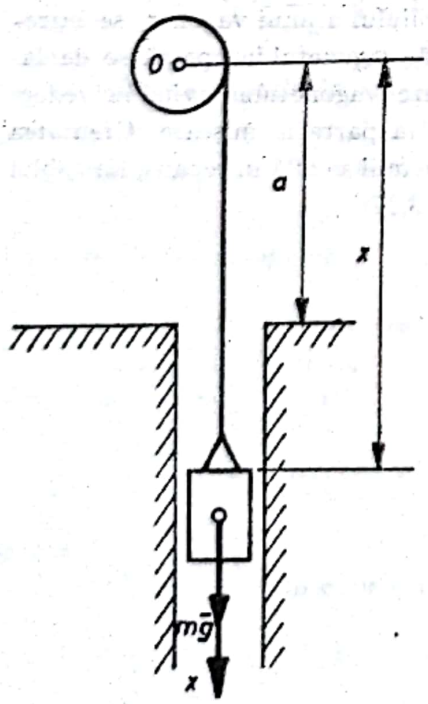


Fig. 3.28

$$m\frac{dv}{dt} = R - \frac{dm}{dt} v, \text{ de unde rezultă:}$$

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = (m_0 + \rho x)\,g,$$

sau:

$$d(mv) = g(m_0 + \rho x)\,dt = mg\,dt.$$

Înmulțind ecuația cu produsul mv obținem:

$$mv\,d(mv) = m^2 g v\,dt.$$

Știind că:

$$m = m_0 + \rho x;\quad \frac{dm}{dt} = \rho v \text{ și } v\,dt = \frac{dm}{\rho},$$

procedînd în continuare în mod analog ca la problema precedentă obținem expresia vitezei:

$$v = \sqrt{\frac{2g[(m_0 + \rho x)^3 - (m_0 + \rho a)^3}{3(m_0 + \rho x)^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.6. MIȘCAREA ȘI REPAUSUL RELATIV AL PUNCTULUI MATERIAL

3.6.1. Ecuațiile de mișcare și repaus relativ. Am văzut în paragraful 2.3.4 că la mișcarea relativă a unui punct material A, viteza sa absolută este:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_r + \bar{v}_t, \tag{3.260}$$

în care

$$\bar{v}_r = \frac{d\bar{r}}{dt}; \tag{3.261}$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{3.262}$$

sînt viteza relativă și de transport a punctului. Accelerația absolută a punctului A este:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c, \tag{3.263}$$

în care:

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}; \tag{3.264}$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}); \tag{3.265}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r, \tag{3.266}$$

sînt respectiv: accelerația relativă, de transport și Coriolis a punctului A.

Fie $\bar{R}$ rezultanta forțelor ce acționează punctul material liber (sau devenit liber prin înlocuirea legăturilor cu forțele de legătură). Ecuația de mișcare (3.1) se scrie cu ajutorul relației (3.263) sub forma:

$$\bar{R} = m\bar{a}_A = m\bar{a}_r + m\bar{a}_t + m\bar{a}_c, \tag{3.267}$$

în care m este masa punctului A. Făcînd notațiile:

$$-m\bar{a}_t = \bar{F}_t; \tag{3.268}$$

$$-m\bar{a}_c = \bar{F}_c, \tag{3.269}$$

expresii pe care le vom numi respectiv forța de transport și forța Coriolis, relația (3.267) se scrie:

$$\bar{R} + \bar{F}_t + \bar{F}_c = m\bar{a}_r. \tag{3.270}$$

Aceasta este ecuația de mișcare a unui punct material aflat în mișcare relativă.

Dacă punctul material se află în repaus relativ (repaus față de sistemul mobil $Oxyz$) putem scrie:

$$\bar{v}_r = 0, \tag{3.271}$$

care atrage după sine, conform cu relațiile (3.264) și (3.266) relațiile:

$$\begin{cases} \bar{a}_r = 0 \\ \bar{a}_c = 0. \end{cases} \tag{3.272}$$

Cu relațiile (3.272) și (3.269), relația (3.270) devine:

$$\bar{R} + \bar{F}_t = 0. \tag{3.273}$$

Aceasta este ecuația de repaus relativ a unui punct material.

Scanned with OKEN Scanner

4. RIGIDUL

4.1. MIŞCAREA ECHILIBRULUI ŞI REPAUSUL RIGIDULUI

4.1.1. **Ecuaţiile de mişcare ale rigidului.** În principiu, mişcarea oricărui rigid liber (sau devenit liber prin înlocuirea legăturilor sale cu forţele de legătură) poate fi studiată cu ajutorul teoremei impulsului şi teoremei momentului cinetic. Aceasta se datorează faptului că teorema impulsului, prin concluzia sa numită teorema mişcării centrului de masă:

$$\bar{R} = m\bar{a}_c \tag{4.1}$$

permite determinarea vitezei $\bar{v}_c$ a centrului de masă al rigidului, iar teorema momentului cinetic aplicată faţă de centrul maselor C:

$$\bar{M}_c = \dot{\bar{K}}_c \tag{4.2}$$

permite determinarea vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ a rigidului la rotaţia sa în jurul axei instantanee de rotaţie trecînd prin C. Cunoaşterea vectorilor $\bar{v}_c$ şi $\bar{\omega}$ permite determinarea vitezei şi a acceleraţiei oricărui punct al rigidului. Componentele acestor vectori se găsesc din ecuaţiile de proiecţie a relaţiilor (4.1) şi (4.2) pe axele fixe (prima) şi mobile (a doua), determinarea constantelor de integrare făcîndu-se cu ajutorul condiţiilor iniţiale:

$$\begin{cases} \bar{v}_c(0) = \bar{v}_0 \\ \bar{\omega}(0) = \bar{\omega}_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

În cazul unui rigid care are unul sau mai multe puncte fixe tot timpul mişcării sale se aplică teorema mişcării centrului de masă (4.1) şi teorema momentului cinetic faţă de un punct fix O al rigidului:

$$\bar{M}_0 = \dot{\bar{K}}_0. \tag{4.4}$$

Necunoscutele sînt acum forţele de legătură şi viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a rigidului la rotaţia sa în jurul axei instantanee de rotaţie trecînd prin O, condiţia iniţială fiind:

$$\bar{\omega}(0) = \bar{\omega}_0, \tag{4.5}$$

În toate cazurile se presupune cunoscută şi poziţia iniţială a rigidului dată spre exemplu prin relaţiile:

$$\begin{cases} \bar{r}_0(0) = \bar{r}_0 \\ \alpha(0) = \alpha_0,\ \beta(0) = \beta_0,\ \gamma(0) = \gamma_0, \end{cases} \tag{4.6}$$

$\bar{r}_0$ fiind vectorul de poziţie al originii mobile faţă de cea fixă şi α, β, γ unghiurile cu care trebuie rotit succesiv sistemul fix în jurul axelor O_1x_1, O_1y_2, O_1z_3 pentru a deveni paralel cu sistemul mobil $Oxyz$ (paragraful 2.3.1).

Scanned with OKEN Scanner

Aceste condiții inițiale servesc la determinarea constantelor ce apar la integrarea ecuațiilor traiectoriilor punctelor rigidului:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{4.7}$$

Pentru studiul calitativ al mișcării unui rigid sau pentru obținerea unor rezultate parțiale se poate utiliza teorema energiei cinetice.

Se pot aplica, după caz, oricare dintre legile de conservare: a impulsului, a momentului cinetic sau a energiei mecanice.

4.1.2. **Ecuațiile de echilibru ale rigidului.** Prin analogie cu ecuația de echilibru a unui punct material liber $\bar{R} = 0$, care exprimă faptul că sistemul de forțe ce acționează punctul este echivalent cu zero, vom spune că un rigid este în echilibru dacă sistemul de forțe care îl acționează este echivalent cu zero, deci:

$$\bar{R} = 0; \tag{4.8}$$

$$\bar{M}_0 = 0. \tag{4.9}$$

în care O este un punct arbitrar.

Pentru a vedea ce fel de mișcare are rigidul în acest caz vom alege ca punct O centrul maselor C și vom scrie relațiile (4.1) și (4.2) cu condițiile (4.8) și (4.9):

$$m\bar{a}_c = 0; \tag{4.10}$$

$$\dot{\bar{K}}_c = 0. \tag{4.11}$$

Din relația (4.10) rezultă:

$$\bar{v}_c = \overline{\text{const.}}, \tag{4.12}$$

deci centrul maselor C este fie în repaus, fie în mișcare uniformă (fig. 4.1) pe o dreaptă (D) determinată de suportul vitezei inițiale a acestui punct:

$$\bar{v}_c = \bar{v}_0 = \text{const.} \tag{4.13}$$

Din relația (4.11) rezultă pe de o parte:

$$\bar{K}_c = \overline{\text{const.}}, \tag{4.14.}$$

iar pe de altă parte, alegînd axele sistemului $Cxyz$ axele principale de inerție ale rigidului, expresia analitică a vectorului moment cinetic va fi:

$$\bar{K}_c = J_{xx}\omega_x\bar{i} + J_{yy}\omega_y\bar{j} + J_{zz}\omega_z\bar{k}, \tag{4.15}$$

și relația (4.11) conduce la relațiile:

$$\begin{cases} J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{yy})\,\omega_z\omega_y = 0 \\ J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\,\omega_x\omega_z = 0 \\ J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\,\omega_y\omega_x = 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

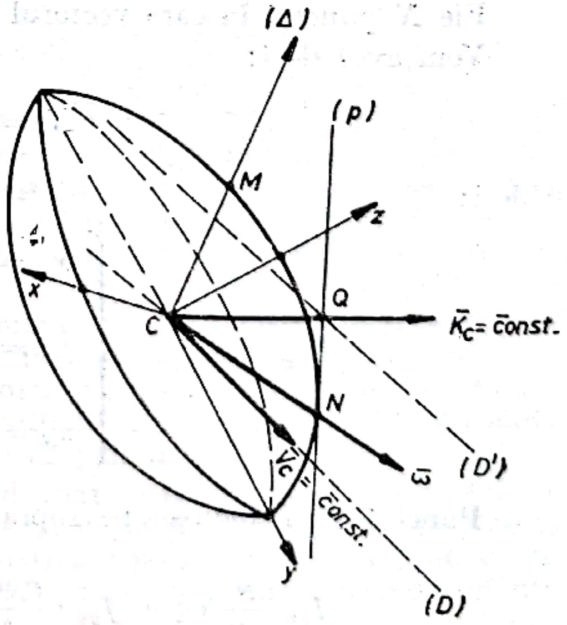


Fig. 4.1

sistem de ecuații diferențiale a cărui integrare poate fi redusă numai la cuadraturi. Două integrale prime ale acestui sistem se pot obține ușor înmulțind relațiile (4.16), respectiv cu ω_x, ω_y, ω_z, iar apoi cu $J_{xx}\omega_x$, $J_{yy}\omega_y$, $J_{zz}\omega_z$, adunînd în fiecare caz cele trei relații obținute și integrînd ecuația rezultată în raport cu timpul. În acest fel se obțin relațiile:

$$J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2 = \mu A^2 = 2E_{cr} = \overline{K}_c \cdot \overline{\omega}; \tag{4.17}$$

$$J_{xx}^2\omega_x^2 + J_{yy}^2\omega_z^2 + J_{zz}^2\omega_z^2 = \mu^2 A^2 = K_c^2. \tag{4.18}$$

Relația (4.17) se poate obține aplicînd teorema energiei cinetice față de centrul maselor, iar relația (4.18) reprezintă conservarea mărimii momentului cinetic. Constantele de integrare μ și A se pot determina ușor din condițiile inițiale. Semnificația constantei A reiese din relația:

$$A = \frac{\mu A^2}{\mu A} = \frac{\overline{K}_c \cdot \overline{\omega}}{K_c} = \mathrm{pr}_{\overline{K}_c}\overline{\omega}. \tag{4.19}$$

În locul determinării analitice a unei a treia integrale, vom prefera o interpretare geometrică sugestivă a mișcării, similară cu interpretarea dată de *Poinsot* în cazul cînd centrul C este fix. Pentru aceasta vom considera elipsoidul central de inerție al rigidului scris cu condiția:

$$CM = \frac{1}{\sqrt{J_\Delta}}. \tag{4.20}$$

Ecuația acestui elipsoid în sistemul principal $Cxyz$ este:

$$J_{xx} \cdot x^2 + J_{yy} \cdot y^2 + J_{zz} \cdot z^2 = 1, \tag{4.21}$$

și el reprezintă o suprafață atașată solidar rigidului.

Fie N punctul în care vectorul $\overline{\omega}$ înțeapă elipsoidul.

Vom avea deci:

$$\overline{CN} = \frac{CN}{\omega} \cdot \overline{\omega}, \tag{4.22}$$

și deci:

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{CN}{\omega}\,\omega_x \\ y_N = \dfrac{CN}{\omega}\,\omega_y \\ z_N = \dfrac{CN}{\omega}\,\omega_z. \end{cases} \tag{4.23}$$

Punctul N aflîndu-se pe suprafața (4.21) avem:

$$J_{xx}\frac{CN^2}{\omega^2}\,\omega_x^2 + J_{yy} \cdot \frac{CN^2}{\omega^2}\,\omega_y^2 + J_{zz} \cdot \frac{CN^2}{\omega^2} \cdot \omega_z^2 = 1, \tag{4.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci ținînd cont de relația (4.17) putem scrie:

$$\frac{CN}{\omega} = \frac{1}{A\sqrt{\mu}}; \tag{4.25}$$

$$\overline{CN} = \frac{\overline{\omega}}{A\sqrt{\mu}}; \tag{4.26}$$

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{\omega_x}{A\sqrt{\mu}} \\ y_N = \dfrac{\omega_y}{A\sqrt{\mu}} \\ z_N = \dfrac{\omega_z}{A\sqrt{\mu}}. \end{cases} \tag{4.27}$$

Ecuația planului (P) tangent în N la cuadrica (4.21) se obține din ecuația acesteia prin dedublare:

$$J_{xx}x_N x + J_{yy}y_N y + J_{zz}z_N z = 1, \tag{4.28}$$

și deci ecuația planului (P) este:

$$f(x, y, z) = J_{xx}\omega_x \cdot x + J_{yy}\omega_y \cdot y + J_{zz}\omega_z \cdot z - A\sqrt{\mu} = 0. \tag{4.29}$$

Se observă că:

$$\text{grad } f = \overline{K}_c, \tag{4.30}$$

deci normala la planul (P) are mereu aceeași direcție în spațiu datorită relației (4.14).

Aducînd ecuația (4.29) la forma canonică se determină distanța de la originea C la acest plan ca fiind:

$$CQ = d = \frac{A\sqrt{\mu}}{\sqrt{J_{xx}^2\omega_x^2 + J_{yy}^2\omega_y^2 + J_{zz}^2\omega_z^2}} = \frac{A\sqrt{\mu}}{K_c} = \frac{A\sqrt{\mu}}{A\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \tag{4.31}$$

Putem afirma acum despre punctul Q, piciorul perpendicularei din C pe planul (P), că se mișcă identic cu punctul C, deci, sau se află în repaus, sau într-o mișcare uniformă cu viteza v_c, pe o dreaptă (D') paralelă cu (D). Planul (P) are deci normala CQ orientată după suportul vectorului $\overline{K}_c$ a cărui direcție este mereu aceeași, iar poziția relativă a lui C față de planul (P) nu se schimbă. Această orientare în spațiu a lui (P) și poziția lui față de C depind exclusiv de constantele $\overline{K}_c$ și A, care la rîndul lor depind numai de condițiile inițiale ale mișcării.

Vom mai observa acum că elipsoidul de inerție (care este atașat solidar rigidului) se mișcă astfel încît rămîne mereu tangent planului (P), mișcarea sa făcîndu-se numai prin pivotare și rostogolire, nu și prin alunecare deoarece punctul de tangență N al elipsoidului aflîndu-se pe suportul vitezei unghiulare instantanee $\overline{\omega}$, viteza lui relativă față de planul (P) este nulă.

În concluzie mișcarea unui rigid aflat în echilibru se face astfel încît elipsoidul său central de inerție se rostogolește și pivotează pe un plan (P) de orientare fixă în spațiu și care-și păstrează poziția relativă față de centrul maselor C, întregul ansamblu, C și (P), aflîndu-se fie în repaus, fie într-o translație rectilinie uniformă.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul particular în care viteza unghiulară inițială este dirijată după una din axele principale de inerție ale rigidului, atunci evident și vectorul moment cinetic va fi dirijat tot după acea axă, mișcarea elipsoidului se reduce la o pivotare pe planul (P) în jurul acelei axe de direcție constantă în spațiu (datorită vectorului moment cinetic care se află pe acea axă), și deci mișcarea rigidului este o rotație în jurul acelei axe permanente de rotație de direcție constantă în spațiu, peste care se suprapune eventual și o mișcare de translație rectilinie uniformă cu viteza inițială a centrului maselor.

4.1.3. **Ecuațiile de repaus ale rigidului.** Dacă pe lîngă condițiile de echilibru ale unui rigid:

$$\bar{R} = 0 \tag{4.32}$$

$$\bar{M}_0 = 0 \tag{4.33}$$

punem și condițiile suplimentare:

$$\bar{v}_0(O) = 0 \tag{4.34}$$

$$\bar{\omega}(O) = 0 \tag{4.35}$$

O fiind un punct arbitrar al rigidului, $\bar{v}_0(t)$ viteza lui O și $\bar{\omega}(t)$ viteza unghiulară de rotație a rigidului în jurul unei axe instantanee ce trece prin O, obținem condițiile de repaus ale rigidului.

Într-adevăr din aceste relații rezultă:

$$\bar{R} = 0; \tag{4.36}$$

$$\bar{M}_0 + \overline{CO} \times \bar{R} = 0; \tag{4.37}$$

$$\bar{\omega}(O) = 0; \tag{4.38}$$

$$\bar{v}_c(0) = \bar{v}_0(O) + \bar{\omega}(O) \times \overline{OC} = 0. \tag{4.39}$$

Din relațiile (4.36) și (4.37) rezultă:

$$m\dot{\bar{v}}_c(t) = 0 \Rightarrow \bar{v}_c(t) = \bar{C}_1; \tag{4.40}$$

$$\dot{\bar{K}}_c = 0 \Rightarrow \bar{K}_c(t) = \bar{C}_2. \tag{4.41}$$

Constantele $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ le determinăm cu ajutorul condițiilor inițiale (4.38) și (4.39), utilizînd sistemul principal de inerție $Cxyz$:

$$\bar{C}_1 = 0 \tag{4.42}$$

$$\left.\begin{aligned} C_{2x} &= J_{xx} \cdot \omega_x(O) = 0 \\ C_{2y} &= J_{yy} \cdot \omega_y(O) = 0 \\ C_{2z} &= J_{zz} \cdot \omega_z(O) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{C}_2 = 0 \tag{4.43}$$

și deci avem relațiile:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_c(t) &= 0; \\ \bar{\omega}(t) &= 0; \end{aligned}\right. \tag{4.44}$$

care exprimă faptul că la orice moment t rigidul va fi în repaus.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. RIGIDUL CU UN PUNCT FIX

4.2.1. **Echilibrul rigidului cu un punct fix.** Fie un rigid cu un punct fix O acționat în punctele A_i de forțele exterioare $\bar{F}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Vom înlocui legătura din O (fig. 4.2) cu reacțiunea $\bar{R}_0$ arbitrară pentru moment ca mărime, direcție și sens (legătura fiind de tip articulație sferică). Rigidul liber va fi acționat deci de forțele $\bar{F}_i$ și reacțiunea $\bar{R}_0$. Vom alege un sistem de axe $Oxyz$ solidar legat de rigid și vom proiecta pe aceste axe ecuațiile de echilibru (4.8) și (4.9):

$$\bar{R}_0 + \sum_i^n \bar{F}_i = 0; \qquad (4.45)$$

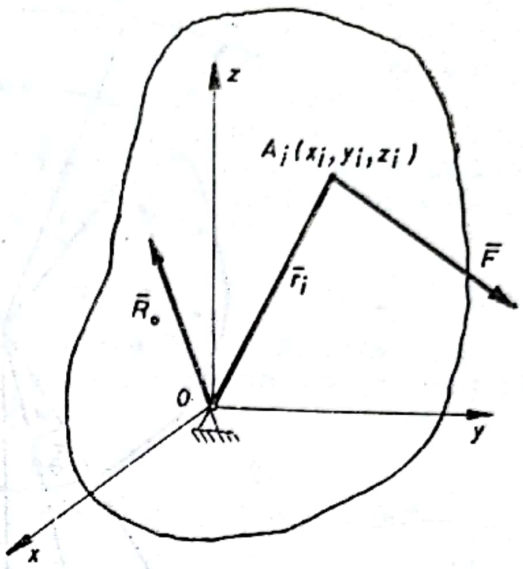


Fig. 4.2

$$\sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0, \qquad (4.46)$$

obținînd relațiile:

$$\begin{cases} R_{0x} + \sum_i^n F_{ix} = 0 \\ R_{0y} + \sum_i^n F_{iy} = 0 \\ R_{0z} + \sum_i^n F_{iz} = 0 \end{cases} \qquad (4.47)$$

$$\begin{cases} \sum_i^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0 \\ \sum_i^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0 \\ \sum_i^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0 \end{cases} \qquad (4.48)$$

Relațiile (4.47) servesc la determinarea proiecțiilor reacțiunii, iar relațiile (4.48) în care intervin numai date ale problemei (proiecțiile forțelor exterioare și coordonatele punctelor lor de aplicație) reprezintă așa-zisele *condiții de echilibru.*

4.2.2. **Relațiile cinematice ale lui Euler.** Fie un rigid cu un punct fix O (fig. 4.3). Vom considera un sistem de axe fix $Ox_1y_1z_1$ și unul mobil $Oxyz$ legat solidar cu rigidul (S). Sistemul mobil poate fi obținut din sistemul fix prin rotația acestuia din urmă (a se vedea paragraful 2.3.1) succesiv în jurul

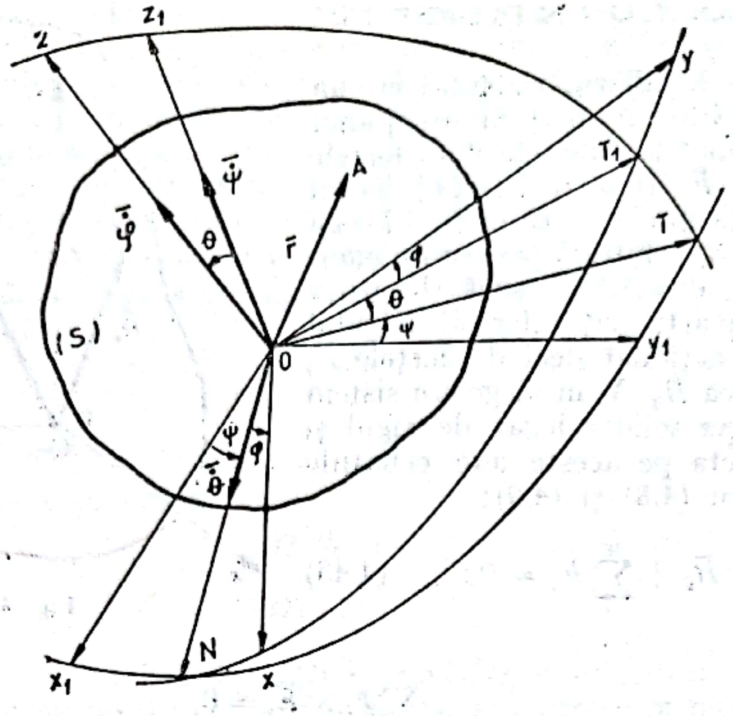


Fig. 4.3

axei Oz_1 cu unghiul ψ, în jurul axei ON cu unghiul θ și în jurul axei Oz cu unghiul φ. Cele trei unghiuri, numite unghiurile lui *Euler*, sînt:

ψ — unghiul de precesie;

φ — unghiul de rotație proprie;

θ — unghiul de nutație.

Axa ON se numește linia nodurilor, axa OT axa transversă, iar sistemul de axe $ONTz$ sistemul lui *Résal*.

Mișcarea instantanee a unui punct A al rigidului, de vector de poziție $\bar{r}$ poate fi considerată ca fiind compusă din mișcarea relativă cu viteza $\bar{v}_r$ față de triedrul ONT_1z_1 și din mișcarea de transport a acestuia la care viteza de transport este:

$$\bar{v}_t = \dot{\bar{\psi}} \times \bar{r}. \tag{4.49}$$

La rîndul ei viteza $\bar{v}_r$ a lui A față de triedrul ONT_1z_1 poate fi considerată ca suma dintre viteza relativă a lui A la mișcarea lui față de triedrul lui *Résal* $ONTz$:

$$\bar{v}_r' = \dot{\bar{\varphi}} \times \bar{r}, \tag{4.50}$$

și viteza de transport la mișcarea triedrului $ONTz$ față de triedrul ONT_1z_1:

$$\bar{v}_t' = \dot{\bar{\theta}} \times \bar{r}. \tag{4.51}$$

Însumînd relațiile (4.49), (4.50) și (4.51) pentru a obține viteza lui A, avem relația:

$$\bar{v}_A = (\dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{\theta}}) \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{4.52}$$

în care:

$$\bar{\omega} = \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{\theta}}, \tag{4.53}$$

Scanned with OKEN Scanner

vectorii din membrul drept al acestei relații fiind vitezele unghiulare instantanee la cele trei mișcări (de precesie, de rotație proprie și de nutație) care prin compunere dau mișcarea triedrului mobil față de cel fix. Vectorul $\bar{\omega}$ este viteza unghiulară rezultantă a celor trei mișcări. Facem observația că repetînd raționamentul de mai sus pentru cazul compunerii a n mișcări de rotație a unui rigid (sau punct) în jurul unor axe concurente deducem că mișcarea rezultantă este tot o rotație a cărei viteză unghiulară este suma vectorială a vitezelor unghiulare ale mișcărilor componente:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots + \bar{\omega}_n. \tag{4.54}$$

Calculînd cosinusurile unghiurilor dintre axa Oz_1 și axele Ox și Oy cu formula fundamentală din trigonometria sferică, așa cum am procedat în paragraful 2.3.1, se obțin relațiile:

$$\begin{cases} \cos(Oz_1, Ox) = \cos 90^\circ \cos\varphi + \sin 90^\circ \sin\varphi \cos(90^\circ - \theta) = \sin\varphi \sin\theta \\ \cos(Oz_1, Oy) = \cos 90^\circ \cos(90^\circ + \varphi) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ + \varphi) \cos(90^\circ - \theta) = \\ \qquad = \cos\varphi \sin\theta \end{cases} \tag{4.55}$$

Vom proiecta acum relația (4.53) pe axele sistemului $Oxyz$:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin\varphi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos\varphi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\varphi \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \tag{4.56}$$

Relațiile (4.56) poartă numele de relații cinematice ale lui *Euler*.

4.2.3. **Ecuațiile dinamice ale lui Euler. Mișcarea rigidului cu un punct fix.** Fie un rigid cu un punct fix O acționat de un sistem de forțe exterioare $\bar{F}_i$ în punctele A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pentru studiul mișcării acestui rigid se mai presupun cunoscute: caracteristicile inerțiale ale rigidului (spre exemplu momentele sale principale de inerție relative la punctul O) și condițiile inițiale ale mișcării care precizează poziția inițială și viteza unghiulară inițială a rigidului (date spre exemplu prin valorile la timpul $t = 0$ ale funcțiilor ψ, φ, θ, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$). Înlocuind acum articulația sferică din O prin reacțiunea $\bar{R}_0$ și reducînd sistemul forțelor exterioare și de legătură în O vom obține torsorul:

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \sum_i^n \bar{F}_i; \tag{4.57}$$

$$\bar{M}_0 = \sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i. \tag{4.58}$$

Alegînd un sistem de axe fix $Ox_1y_1z_1$ și unul mobil $Oxyz$ solidar atașat rigidului, axele Ox, Oy și Oz fiind axele principale de inerție relative la punctul O, ecuațiile de mișcare (4.1) și (4.4) se scriu:

$$\bar{R}_0 + \Sigma \bar{F}_i = m[\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c)]; \tag{4.59}$$

$$\bar{M}_0 = \dot{\bar{K}}_0 = \frac{d\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0, \tag{4.60}$$

în care $\bar{r}_c = \overline{OC}$ este vectorul de poziție al centrului maselor.

Scanned with OKEN Scanner

Relația (4.59) servește la determinarea reacțiunii $\bar{R}_0$ după ce vectorul $\bar{\omega}(t)$ a fost găsit. Cu ajutorul expresiei analitice a momentului cinetic:

$$\bar{K}_0 = J_{xx}\omega_x\bar{i} + J_{yy}\omega_y\bar{j} + J_{zz}\omega_z\bar{k}, \tag{4.61}$$

proiecțiile ecuației (4.60) pe axele triedrului $Oxyz$ se scriu:

$$\begin{cases} J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{yy})\,\omega_z\omega_y = M_{0x} \\ J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\,\omega_x\omega_z = M_{0y} \\ J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\,\omega_y\omega_x = M_{0z} \end{cases} \tag{4.62}$$

Relațiile (4.62) poartă numele de ecuații dinamice ale lui *Euler*. Integrarea acestui sistem de ecuații nu se poate face analitic în cazul general, ci doar în unele cazuri particulare enumerate mai jos. De integrarea acestui sistem de ecuații s-au ocupat matematicieni de renume ca: *Euler, Poinsot, Legrange, Poisson, Mac Cullagh, Kovalevskaia, Hess, Grammel, Steklov, Bobîleov* și alții. Sistemul (4.62) odată integrat, legătura dintre viteza unghiulară și parametrii mișcării este dată de relațiile dinamice ale lui *Euler* (4.56).

Integrarea ecuațiilor (4.62) s-a efectuat în trei cazuri particulare cunoscute sub denumirile de:

1) Cazul *Euler-Poinsot;*

2) Cazul *Lagrange-Poisson;*

3) Cazul *Sofia Kovalevskaia.*

1) În cazul *Euler-Poinsot* se presupune momentul rezultant nul: $\bar{M}_0 = 0$. Sistemul a fost integrat analitic de *Euler*, iar *Poinsot* a elaborat o interpretare geometrică cu totul similară celei din paragraful 4.1.2 cu singura deosebire că originea sistemului de axe este în punctul fix O și nu în C, deci planul (P) va fi acum un plan fix în spațiu.

2) Cazul *Lagrange-Poisson* presupune realizate condițiile: $C(0,\ 0,\ z_c)$; $J_{xx} = J_{yy}$ și singura forță ce acționează rigidul să fie propria lui greutate aplicată în C și paralelă cu Oz_1.

3) Cazul *Sofia Kovalevskaia* presupune realizate condițiile: $C(x_c,\ y_c,\ 0)$; $J_{xz} = J_{yy} = 2J_{zz}$ și singura forță ce acționează rigidul să fie greutatea sa aplicată în C și paralelă cu Oz_1.

Ecuațiile (4.62) au mai fost integrate și în alte situații, dar numai pentru anumite condiții inițiale.

Revenind acum la cazul general putem specifica unele proprietăți ale mișcării rigidului cu un punct fix indiferent de forțele ce-l acționează. Întrucît mișcarea rigidului în acest caz o putem privi ca o succesiune de mișcări instantanee de rotație în jurul unor axe variabile ca direcție, dar trecînd tot timpul prin punctul fix O putem afirma că locul geometric al punctelor de viteză nulă (punctele axei instantanee de rotație) este un con curbiliniu cu vîrful în punctul fix O. Dacă vom considera acest loc geometric față de sistemul $Oxyz$ atașat solidar rigidului (deci dacă vom considera succesiunea dreptelor rigidului care devin succesiv axe instantanee de rotație) vom obține ceea ce se numește conul polodic. Dacă vom considera același loc geometric față de sistemul fix $Ox_1y_1z_1$ (deci dacă vom considera succesiunea pozițiilor ocupate în spațiu de respectivele axe instantanee de rotație) vom obține ceea ce se numește conul herpolodic. Este evident acum faptul că la un moment dat t axa instantanee de rotație aparține ambelor conuri (ea aparține ambelor

Scanned with OKEN Scanner

locuri geometrice), iar punctele ei fiind în repaus în acel moment înseamnă că nu avem alunecare între cele două conuri. Deci în decursul mișcării rigidului cu punct fix (fig. 4.4) conul polodic (P) se rostogolește fără să alunece peste conul herpolodic (H), generatoarea comună fiind axa instantanee de rotație (Δ) după care e dirijată viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$.

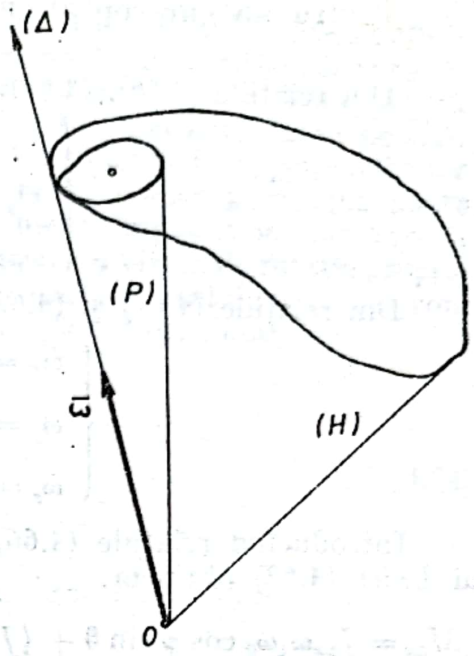


Fig. 4.4

Spre exemplu în cazul mișcării Pămîntului în raport cu centrul său considerat fix, conul herpolodic este un con circular cu axa perpendiculară pe ecliptică și cu jumătatea unghiului la vîrf egală cu aproximativ 23°27′17″, iar conul polodic e tot un con circular cu axa după axa polilor și cu unghiul la vîrf de aproximativ de 0″01. Conul polodic se rostogolește peste conul herpolodic parcurgîndu-l complet după o perioadă de aproximativ 26 000 de ani. Consecința este că polul ceresc se schimbă încontinuu și odată cu el priveliștea bolții cerești. Astăzi polul ceresc se află la o depărtare de 1°8′ de steaua α din Ursa Mică pe care o numim stea polară și el se va apropia de această stea în următorii 250 de ani pînă la o depărtare de 27′, apoi se va îndepărta din nou de ea îndreptîndu-se spre alte stele care într-un viitor mai îndepărtat le vom numi poate „stele polare".

Menționăm faptul că simpla cunoaștere geometrică a celor două conuri nu rezolvă complet problema mișcării, ci doar problema traiectoriilor diferitelor puncte, problema vitezelor rămînînd încă nedeterminată.

4.2.4. Mișcarea de precesie regulată a giroscopului. Cuplul giroscopic.

Un giroscop este un rigid de revoluție avînd punctul fix chiar pe axa de simetrie Oz.

Vom spune că un giroscop execută o mișcare de precesie regulată cînd unghiurile lui *Euler* au următoarele expresii:

$$\begin{cases} \psi = \psi_0 + \omega_1 t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \\ \theta = \theta_0, \end{cases} \tag{4.63}$$

în care singura variabilă din membrul drept al relațiilor este timpul t. Problema pe care ne-o punem este a găsi vectorul moment rezultant care generează o astfel de mișcare.

Vectorul:

$$\dot{\bar{\psi}} = \bar{\omega}_1 \tag{4.64}$$

se numește viteza unghiulară de precesie și vectorul:

$$\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\omega}_0 \tag{4.65}$$

se numește viteza unghiulară de rotație proprie.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru un giroscop avem întotdeauna:

$$J_{xx} = J_{yy}. \tag{4.66}$$

Din relaţiile (4.56), (4.63), (4.64) şi (4.65) rezultă:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_1 \sin\varphi \sin\theta \\ \omega_y = \omega_1 \cos\varphi \sin\theta \\ \omega_z = \omega_1 \cos\theta + \omega_0 \end{cases} \tag{4.67}$$

Din relaţiile (4.67) şi (4.63) deducem:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \omega_1\omega_0 \cos\varphi \sin\theta \\ \dot{\omega}_y = -\omega_1\omega_0 \sin\varphi \sin\theta \\ \dot{\omega}_z = 0 \end{cases} \tag{4.68}$$

Introducînd relaţiile (4.66), (4.67) şi(4.68) în ecuaţiile dinamice ale lui *Euler* (4.62) obţinem:

$$\begin{cases} M_{0x} = J_{xx}\omega_1\omega_0 \cos\varphi \sin\theta + (J_{zz} - J_{xx})(\omega_1 \cos\theta + \omega_0)\,\omega_1 \cos\varphi \sin\theta \\ M_{0y} = -J_{xx}\omega_1\omega_0 \sin\varphi \sin\theta + (J_{xx} - J_{zz})\,(\omega_1 \cos\theta + \omega_0)\,\omega_1 \sin\varphi \sin\theta \\ M_{0z} = 0 \end{cases} \tag{4.69}$$

Proiectînd vectorul:

$$\bar{M}_0 = M_{0x}\bar{i} + M_{0y}\bar{j} + M_{0z}\bar{k} \tag{4.70}$$

pe axele triedrului lui *Résal ONTz* obţinem:

$$\begin{cases} M_{ON} = M_{0x} \cos\varphi - M_{0y} \sin\varphi \\ M_{OT} = M_{0x} \sin\varphi + M_{0y} \cos\varphi \\ M_{0z} = M_{0z}. \end{cases} \tag{4.71}$$

Introducînd relaţia (4.69) în relaţia (4.71) obţinem în final:

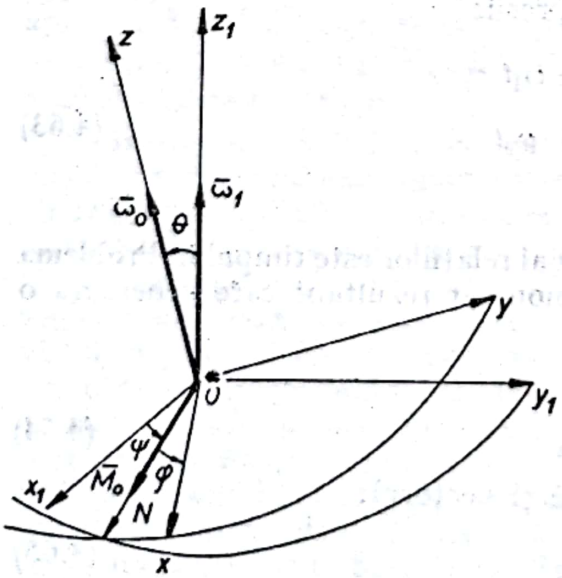


Fig. 4.5

$$\begin{cases} M_{ON} = J_{zz}\omega_0\omega_1 \sin\theta \left(1 + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{zz}} \dfrac{\omega_1}{\omega_0} \cos\theta\right) \\ M_{OT} = 0 \\ M_{0z} = 0, \end{cases} \tag{4.72}$$

ceea ce ne arată că vectorul moment rezultant este dirijat mereu după linia nodurilor (fig. 4.5), el putînd fi scris sub forma vectorială:

$$\bar{M}_0 = J_{zz}\left(1 + \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{zz}} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \cos\theta\right)\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_0, \tag{4.73}$$

deoarece produsul vectorial $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_0$ este dirijat după această linie în sensul

Scanned with OKEN Scanner

dorit și are modulul $\omega_0\omega_1 \sin\theta$. Observăm faptul că momentul $\bar{M}_0$ (un cuplu) în loc să producă rotația corpului care are viteza unghiulară inițială $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1$ în jurul axei momentului (linia nodurilor), mărind astfel unghiul θ, produce o rotație a axei Oz în jurul axei Oz_1 (care e perpendiculară pe $\bar{M}_0$), păstrînd unghiul θ constant. Deci axa Oz a giroscopului se mișcă perpendicular pe direcția în care e împinsă. Acest fenomen numit fenomen giroscopic poate fi pus în evidență foarte ușor printr-un experiment simplu. Vom lua o roată de bicicletă și ținîndu-i axa în mîini îi vom imprima o viteză de rotație proprie în jurul axei. Încercînd apoi să rotim axa în planul vertical de exemplu vom simți instantaneu tendința axei de a se roti în planul orizontal.

În cazul particular cînd:

$$\begin{cases} \theta = 90^\circ \\ \text{sau} \\ \omega_0 \gg \omega_1 \end{cases} \tag{4.74}$$

relația (4.73) se poate scrie (exact sau aproximativ) sub forma:

$$\bar{M}_0 = J_{zz}\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_0. \tag{4.75}$$

Momentul $\bar{M}_0$ reprezintă acțiunea corpurilor exterioare asupra giroscopului. Acesta va reacționa asupra corpurilor exterioare (adică asupra legăturilor) cu un cuplu de forțe egal în mărime și opus ca sens cuplului activ. Acest moment:

$$\bar{M}_g = -\bar{M}_0 \tag{4.76}$$

poartă numele de *cuplu giroscopic*. Nu trebuie uitat că el acționează asupra legăturilor și nu asupra giroscopului. Putem scrie deci cuplul giroscopic sub forma:

$$\bar{M}_g = J_{zz}\left(1 + \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{zz}} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \cos\theta\right)\bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_1 \tag{4.77}$$

sau în condițiile (4.74) sub forma:

$$\bar{M}_g = J_{zz}\bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_1. \tag{4.78}$$

4.2.5. Stabilitatea axei giroscopului. Un giroscop se numește centrat dacă punctul fix este chiar centrul maselor C și necentrat în caz contrar (cînd C se află pe axa Oz).

Fie un giroscop centrat supus chiar acțiunii propriei greutăți. În acest caz:

$$M_{0x} = M_{0y} = M_{0z} = 0 \tag{4.79}$$

și relațiile (4.62) se scriu cu ajutorul egalității (4.66) sub forma:

$$J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{xx})\,\omega_z\omega_y = 0; \tag{4.80}$$

$$J_{xx}\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\omega_z\omega_x = 0; \tag{4.81}$$

$$J_{zz}\dot{\omega}_z = 0. \tag{4.82}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.82) rezultă:

$$\omega_z = \omega_0 = \text{const.} \tag{4.83}$$

Înlocuind relația (4.83) în (4.80) și (4.81) și eliminînd ω_y între acestea se obține ecuația:

$$\ddot{\omega}_x + \alpha^2 \omega_x = 0 \tag{4.84}$$

în care:

$$\alpha = \frac{|J_{zz} - J_{xx}|}{J_{zz}} \omega_0. \tag{4.85}$$

Soluția ecuației (4.84) este:

$$\omega_x = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t \tag{4.86}$$

și din relația (4.80) rezultă:

$$\omega_y = \pm (C_1 \sin \alpha t - C_2 \cos \alpha t), \tag{4.87}$$

semnele $\pm$ corespunzînd respectiv cazurilor $J_{zz} > J_{xx}$ și $J_{xx} > J_{zz}$.

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale.

Dacă la momentul inițial viteza unghiulară este după axa Oz atunci $\omega_{x0} = 0$ și $\omega_{y0} = 0$ și rezultă $C_1 = C_2 = 0$ și deci $\omega_x = \omega_y = 0$ tot timpul mișcării. Pentru perturbații inițiale mici (ω_{x0} și ω_{y0} mici) constantele C_1 și C_2 vor fi și ele mici:

$$\begin{cases} C_1 = \omega_{x0} \\ C_2 = \mp \omega_{y0} \end{cases} \tag{4.88}$$

și din relațiile (4.86) și (4.87) rezultă că ω_x și ω_y vor fi și ele mici tot timpul mișcării, deci vectorul $\bar{\omega}$ deviază doar cu puțin de la poziția neperturbată, perioada perturbațiilor fiind perioada funcțiilor ω_x și ω_y:

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \frac{J_{zz}}{|J_{zz} - J_{xx}| \omega_0}. \tag{4.89}$$

Cu cît această perioadă este mai mică cu atît giroscopul se cheamă a fi mai stabil. Deci un giroscop centrat este cu atît mai stabil cu cît are o formă mai alungită pe axa de simetrie Oz (J_{zz} cît mai mic și J_{xx} cît mai mare) și cu cît i se imprimă o viteză inițială mai mare în jurul axei de simetrie.

Această proprietate de stabilizare a giroscopului stă la baza principiului de funcționare a girocompaselor (busole giroscopice) și a stabilizatoarelor giroscopice folosite în marină.

4.2.6. **Efecte giroscopice.** Efectul giroscopic semnalat în paragraful 4.2.4 a fost prezentat pentru un caz particular: cazul mișcării de precesie regulată. Vom prezenta în cele ce urmează efectul giroscopic în general și diferite moduri în care el se manifestă.

Fie un giroscop animat la început de o mișcare de rotație proprie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$ în jurul axei sale de simetrie. În acest caz vectorul

Scanned with OKEN Scanner

moment cinetic va fi și el dirijat după această axă (fig. 4.6) expresia sa fiind:

$$\bar{K}_c = J_{zz}\bar{\omega}. \tag{4.90}$$

Dacă viteza unghiulară de rotație proprie $\bar{\omega}_0$ este suficient de mare, chiar dacă i se imprimă axei Cz o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, viteza unghiulară rezultantă:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 \tag{4.91}$$

va avea proiecțiile pe axele Cx și Cy:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{1x} \\ \omega_y = \omega_{1y} \end{cases} \tag{4.92}$$

mult mai mici decît proiecția pe axa Cz:

$$\omega_z = \omega_0 + \omega_{1z} \tag{4.93}$$

și în consecință și vectorul moment cinetic va avea proiecțiile pe axele Cx și Cy:

$$\begin{cases} K_{cx} = J_{xx}\omega_x \\ K_{cy} = J_{yy}\omega_y = J_{xx}\omega_y \end{cases} \tag{4.94}$$

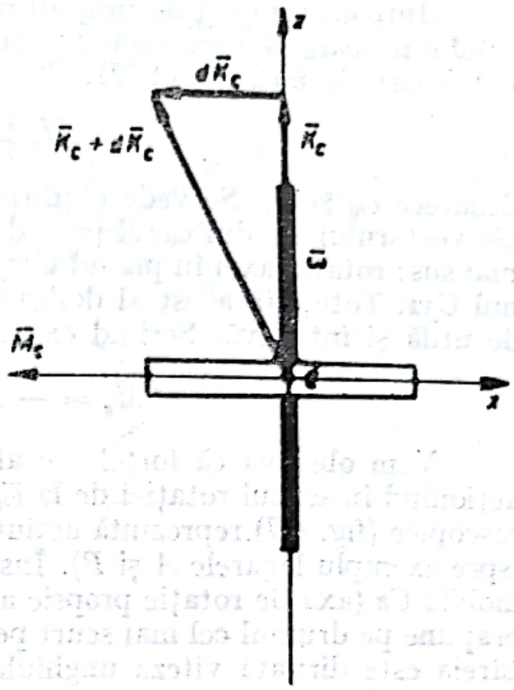


Fig. 4.6

mult mai mici decît proiecția pe Cz:

$$K_{cz} = J_z\omega_z \tag{4.95}$$

diferența fiind cu atît mai accentuată cu cît $J_{zz} > J_{xx}$. Concluzia este că vectorul moment cinetic va devia doar cu foarte puțin față de axa Oz a giroscopului, urmărind, se spune, această axă.

Să aplicăm acum axei giroscopului un cuplu de forțe al cărui moment este spre exemplu după axa Cx, forțele fiind deci în planul Cyz. Vom analiza acum două situații: prima cînd legăturile care aplică forțele nu impun mișcarea axei Cz a giroscopului și a doua situație cînd mișcarea axei giroscopului este impusă.

În primul caz momentul $\bar{M}_c$ produce într-un interval de timp dt o variație a momentului cinetic $\bar{K}_c$ dedusă din teorema momentului cinetic ca fiind:

$$d\bar{K}_c = \bar{M}_c \cdot dt, \tag{4.96}$$

și deci momentul cinetic se va roti în planul Cxz (fig. 4.6) ocupînd poziția vectorului $\bar{K}_c + d\bar{K}_c$. La fel se va mișca deci și axa Cz a giroscopului. Concluzia este că aplicînd axei giroscopului un cuplu de forțe în planul Cyz, acesta, în loc să rotească axa în acest plan, produce o rotație a axei în planul Cxz, perpendicular pe primul, de la vectorul $\bar{\omega}_0$ spre vectorul $\bar{M}_c$ pe drumul cel mai scurt. Acesta este efectul giroscopic.

În cazul al doilea să presupunem că mișcarea impusă de legături (de exemplu două lagăre) giroscopului este o rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ de la axa Cx spre Cz, adică tocmai mișcarea din cazul precedent. Vectorul $\bar{\omega}_1$ din figura 4.6 este atunci perpendicular pe planul desenului cu sensul înspre noi.

Scanned with OKEN Scanner

Într-un interval de timp dt mișcarea giroscopului poate fi presupusă ca fiind o mișcare de precesie regulată la care momentul exterior ce trebuie aplicat e dat de formula (4.75):

$$\bar{M}_c = J_{zz}\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_0, \tag{4.97}$$

deoarece $\omega_0 \gg \omega_1$. Se vede că direcția și sensul acestui vector corespund cu ale vectorului $\bar{M}_c$ din cazul precedent. Am ajuns deci la aceeași concluzie ca mai sus: rotația axei în planul Cxz este produsă de un cuplu de forțe din planul Cyz. Totuși în acest al doilea caz mai putem face o observație deosebit de utilă și intuitivă. Scriind expresia momentului giroscopic:

$$\bar{M}_g = -\bar{M}_0 = J_{zz}\bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_1. \tag{4.98}$$

Vom observa că forțele ce alcătuiesc acest cuplu vor fi în planul Cyz acționînd în sensul rotației de la $\bar{\omega}_0$ la $\bar{\omega}_1$. Forțele acestea, numite și forțe giroscopice (fig. 4.7) reprezintă acțiunea giroscopului (a axei) asupra legăturilor (spre exemplu lagărele A și B). Înseamnă că lucrurile se petrec ca și cum axa mobilă Cz (axa de rotație proprie a giroscopului) ar avea tendința de a se suprapune pe drumul cel mai scurt peste axa fixă Cz_1 (axa de precesie) în sensul căreia este dirijată viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ impusă de legături. În felul acesta se obțin direcția și sensul forțelor giroscopice. Vom prezenta mai jos cîteva efecte giroscopice.

Un proiectil, la părăsirea unei guri de foc, are pe lîngă viteza liniară de lansare și o viteză unghiulară datorată ghinturilor țevii, ceea ce-l transformă într-un „cvasigiroscop" (proiectilul neavînd nici un punct fix).

În timpul mișcării sale pe traiectorie el este acționat (fig. 4.8) de forța de greutate $\bar{G}$ aplicată în centrul maselor C și de rezultanta $\bar{R}$ a forțelor de frecare cu aerul, care este un vector paralel cu tangenta în C la traiectoria acestui punct și care întîlnește axa proiectilului într-un punct A aflat între centrul maselor C și vîrful V al proiectilului. Dacă n-ar exista mișcarea de rotație a proiectilului (cu viteza $\bar{\omega}_0$ dirijată spre vîrful V) forța $\bar{R}$ ar „răsturna" proiectilul în jurul lui C, situație total nedorită. Aici intervine efectul giroscopic. Momentul rezultant față de C al celor două forțe (propriu-zis momentul forței $\bar{R}$) este un vector $\bar{M}_0$ perpendicular pe planul desenului cu sensul înspre noi. În concluzie axa proiectilului în loc să se rotească în planul

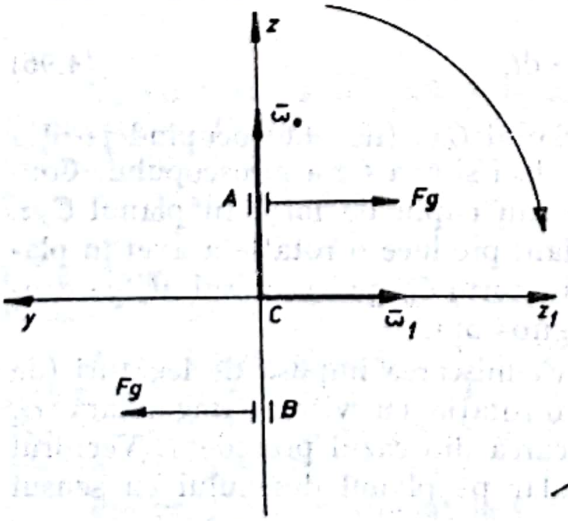


Fig. 4.7

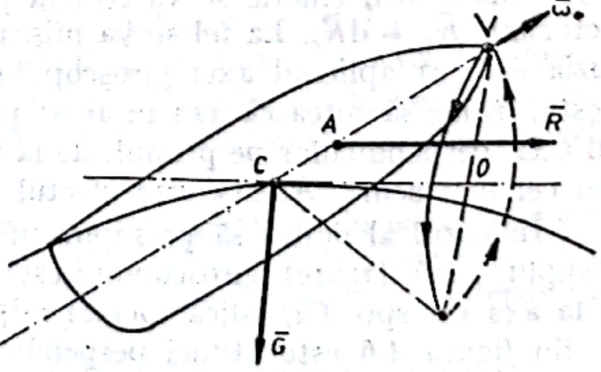


Fig. 4.8

Scanned with OKEN Scanner

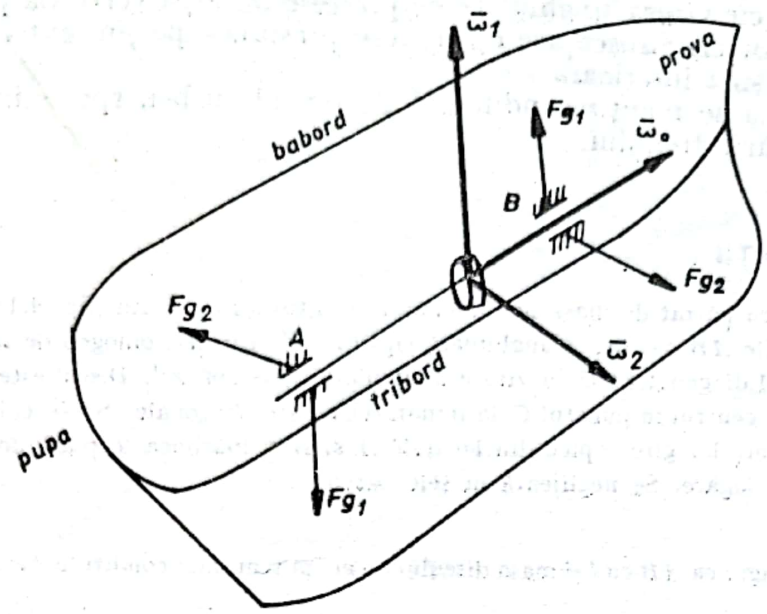


Fig. 4.9

desenului se va roti într-un interval de timp dt cu un unghi elementar $d\theta$ de la $\bar{\omega}_0$ spre $\bar{M}_c$ într-un plan perpendicular pe planul COV, O fiind proiecția lui V pe tangentă. Deci V va descrie un arc elementar pe direcția perpendiculară pe VO și pe tangenta CO.

În timp deci V va descrie față de tangentă un cerc, sau o curbă destul de apropiată de un cerc, iar în spațiu o spirală care înfășoară traiectoria. Aceasta face ca întotdeauna ținta să fie lovită cu vîrful proiectilului sub un unghi de incidență nu prea mare.

Vom considera acum turbina unei nave așezată pe axa longitudinală și care, datorită vitezei de rotație proprie $\bar{\omega}_0$ se consideră a fi un cvasigiroscop (fig. 4.9). Presupunînd $\bar{\omega}_0$ dirijat spre prova, la girația navei spre babord de exemplu cu viteza unghiulară de precesie $\bar{\omega}_1$, axul turbinei va apăsa lagărele A și B cu forțele giroscopice F_{g1} verticale (la schimbarea sensului de girație se schimbă și sensul acestor forțe). La tangajul navei (oscilația în jurul axei babord—tribord), spre exemplu cînd prova urcă, vectorul viteză unghiulară de precesie fiind $\bar{\omega}_2$ din figură, forțele giroscopice din lagăre sînt F_{g2} din planul orizontal. Evident că acestea sînt niște forțe variabile, alternînd ca sens cînd spre un bord cînd spre celălalt, odată cu schimbarea sensului lui $\bar{\omega}_2$. La ruliul navei (oscilația în jurul axei prova—pupa) nu apar efecte giroscopice decît dacă axa turbinei ar fi transversală).

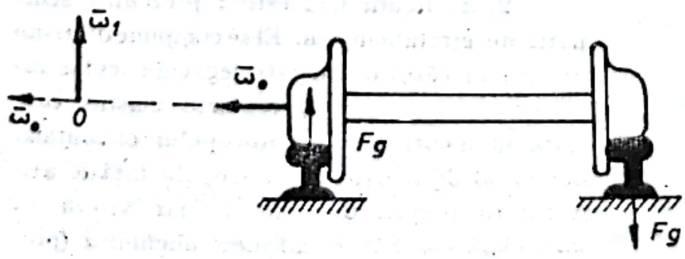


Fig. 4.10

Vom considera acum o pereche de roți ale unui tren aflat într-o curbă presupusă a fi un arc de cerc (fig. 4.10). Axa roților va trece mereu prin centrul O al acestui cerc. Avem deci de-a face cu un giroscop propriu-zis cu viteza unghiulară de rotație proprie $\bar{\omega}_0$ după

axa roților și cu viteza unghiulară de precesie $\bar{\omega}_1$ după verticala punctului O. În acest caz forțele giroscopice Fg măresc presiunea pe șina exterioară și scad presiunea pe șina interioară.

Afirmația se menține indiferent de sensul curbei, spre stînga sau spre dreapta mișcării trenului.

APLICAȚII

1. Un cadru pătrat de masă neglijabilă și de latură $a = 20$ cm (fig. 4.11) se rotește în jurul axei verticale AB cu viteza unghiulară $\omega_1 = 2\ s^{-1}$. Un disc omogen de rază $r = 10$ cm se rotește în jurul diagonalei OD cu viteza unghiulară $\omega_0 = 300\ s^{-1}$. Discul este perpendicular pe axa OD și are centrul în punctul C, la jumătatea acestei diagonale. Să se calculeze raportul dintre mărimea forțelor giroscopice din lagărele A și B și mărimea forțelor statice de apăsare laterală în aceste lagăre. Se neglijează masele barelor.

Rezolvare:

Notînd lungimea AB cu l și masa discului cu m, putem scrie condițiile de echilibru static sub forma:

$$\begin{cases} R_B - H_A = 0 \\ V_A - mg = 0 \\ mg \cdot \dfrac{a}{2} - R_B \cdot l = 0 \end{cases}$$

din care rezultă apăsările laterale statice:

$$F_S = H_A = R_B = \frac{mg\,a}{2l}. \tag{1}$$

Deoarece $\omega_0 \gg \omega_1$ condiția (4.74) este satisfăcută și putem aplica la calculul momentului giroscopic formula simplificată (4.78) din care rezultă:

$$M_g = J_{zz}\omega_0 \cdot \omega_1 \cdot \sin\theta = \frac{mr^2}{2} \cdot \omega_0 \cdot \omega_1 \sin 45^\circ = \frac{m\,r^2}{2\sqrt{2}}\omega_0\omega_1.$$

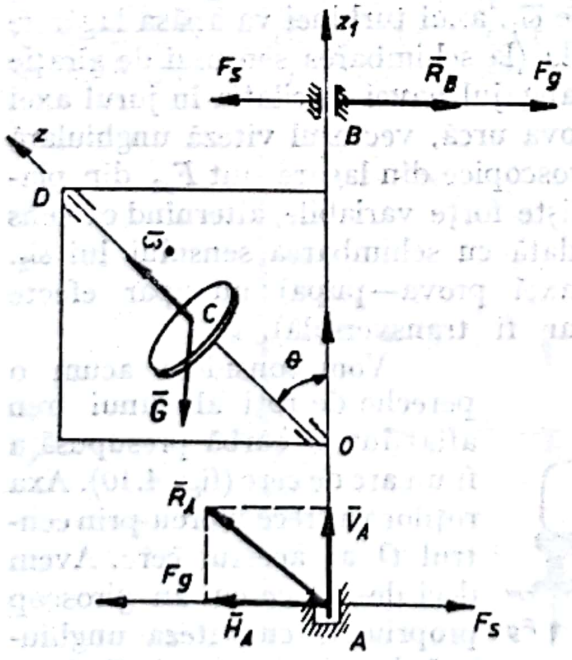


Fig. 4.11

Forțele giroscopice, formînd un cuplu de braț egal cu l, se calculează deci cu formula:

$$F_g = \frac{M_g}{l} = \frac{mr^2}{2\sqrt{2}l}\omega_0\omega_1. \tag{2}$$

Împărțind relația (2) la (1) rezultă lucrînd în C.G.S.:

$$\frac{F_g}{F_s} = \frac{r^2\omega_0\omega_1}{\sqrt{2}\,ag} = \frac{10^2 \cdot 300 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 981} = 2{,}16. \tag{3}$$

2. În figura 4.12 este reprezentat schematic un girotahometru. El se compune dintr-un giroscop al cărui cadru este legat de cutia instrumentului prin două resoarte elastice care caută să mențină axa giroscopului orizontală. Momentul de inerție al giroscopului față de axa de rotație proprie Cz este J, iar viteza sa unghiulară ω_0. Să se calculeze unghiul α (presupus mic) cu care se rotește în planul vertical

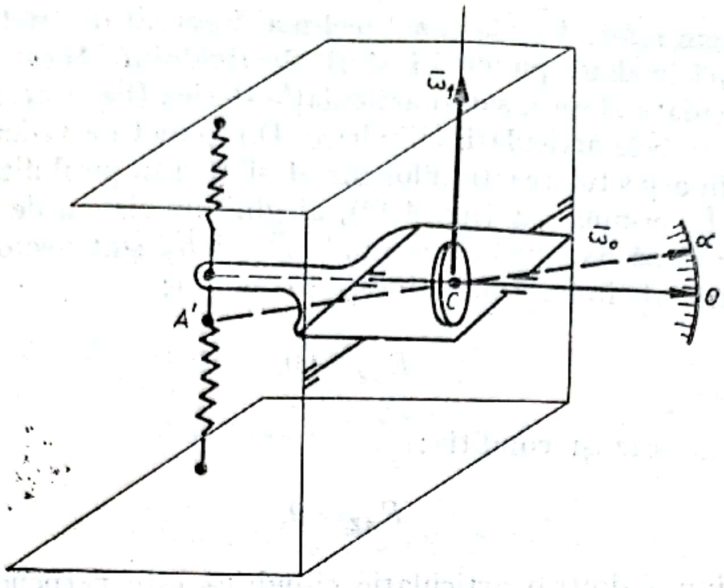


Fig. 4.12

axa giroscopului (și acul indicator) dacă instrumentul este instalat pe o platformă care se rotește în jurul verticalei cu o viteză unghiulară ω_1. Se mai cunosc: constantele elastice ale resoartelor egale cu c și distanța CA egală cu a.

Rezolvare:

Cînd cutia instrumentului este în repaus ($\omega_1 = 0$) acul indicator se află la „zero". La rotația cutiei cu viteza unghiulară ω_1, datorită relației $\theta = 90°$ condiția (4.74) este îndeplinită și putem calcula momentul giroscopic cu formula (4.78):

$$M_g = J_{zz}\omega_0 \cdot \omega_1 \cdot \sin 90° = J\,\omega_0\,\omega_1. \qquad (1)$$

Acestui moment i se opune momentul forțelor elastice din resoarte, care iau naștere la rotația axului giroscopului cu unghiul mic α și deci la deplasarea punctului A pînă în A' pe distanța:

$$AA' \approx CA \cdot \alpha = a \cdot \alpha.$$

La această deplasare în fiecare resort ia naștere cîte o forță elastică:

$$F_e = c \cdot AA' = c \cdot a \cdot \alpha,$$

îndreptată în sus. Momentul acestor două forțe față de punctul C este:

$$M_E = 2\,F_e \cdot CA = 2\,ca^2\alpha. \qquad (2)$$

Acul indicator se stabilizează în poziția în care momentul giroscopic (acțiunea giroscopului asupra legăturilor) este echilibrat de către momentul forțelor elastice (reacțiunea legăturilor asupra giroscopului). Din relația $M_g = M_e$ rezultă:

$$\alpha = \frac{J\omega_0}{2\,ca^2} \cdot \omega_1 = C_1 \cdot \omega_1,$$

C_1 fiind deci o constantă a aparatului.

4.3. RIGIDUL CU O AXĂ FIXĂ

Un rigid are o axă fixă dacă o dreaptă a sa coincide mereu cu o dreaptă fixă din spațiu. Acest tip de legătură se poate realiza în mai multe feluri, introducînd legături în două sau mai multe puncte ale axei fixe. În cele ce

Scanned with OKEN Scanner

urmează ne vom referi doar la cazul (cel mai frecvent dealtfel) în care introducem legături în două puncte A și B ale rigidului. Aceste legături pot fi sau două articulații sferice, sau o articulație sferică (fie A acest punct) și una cilindrică, fie ambele articulații cilindrice. Din punct de vedere mecanic diferența constă în aspectul reacțiunilor din A și B și în posibilitățile de mișcare ale rigidului. În primul caz (fig. 4.13), alegînd un sistem de axe cu originea în A și cu Az după axa fixă, reacțiunile $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_B$ sînt vectori arbitrari. În al doilea caz trebuie impusă de la început condiția:

$$R_{BZ} = 0, \tag{4.99}$$

iar în al treilea caz și condiția:

$$R_{AZ} = 0, \tag{4.100}$$

întrucît reacțiunea dintr-o articulație cilindrică este perpendiculară pe axa legăturii. Putem deci privi cazurile al doilea și al treilea ca niște cazuri particulare ale primului.

Din punct de vedere al posibilităților de mișcare, în primele două cazuri singura mișcare posibilă a rigidului este o rotație cu o viteză unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei fixe, pe cînd în al treilea caz rigidul mai are și posibilitatea unei translații în lungul axei fixe cu o anumită viteză $\bar{v}_A$. Combinația celor două mișcări de mai sus se numește mișcare de rototranslație.

4.3.1. **Echilibrul rigidului cu axă fixă.** Fie un rigid cu axa fixă AB (fig. 4.14), distanța $AB = l$ fiind cunoscută. Alegînd un sistem de axe solidare cu rigidul $Axyz$ cu Az după axa fixă, vom presupune cunoscute forțele $\bar{F}_i(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$ care acționează în punctele cunoscute $A_i(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, ..., n)$. Rigidul fiind în echilibru se cer reacțiunile $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_B$ și condiția (sau condițiile) de echilibru.

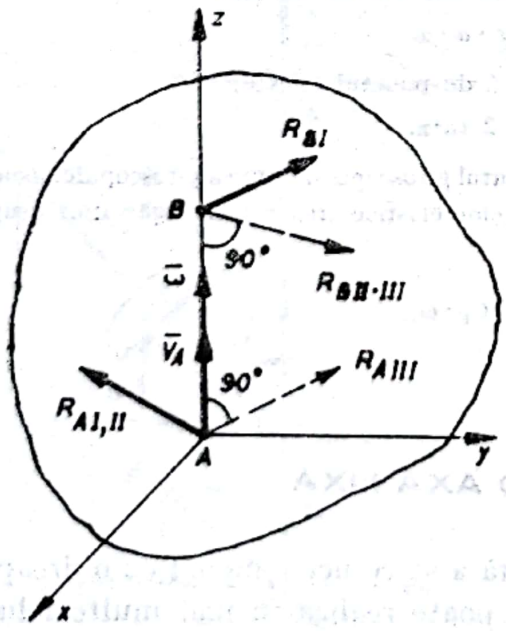


Fig. 4.13

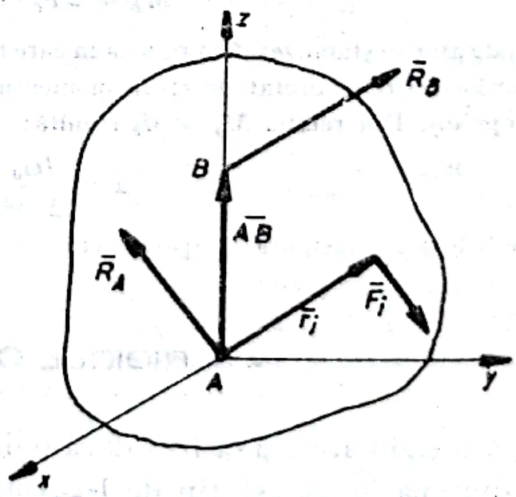


Fig. 4.14

Pentru aceasta vom scrie ecuațiile de echilibru (4.8) și (4.9) pentru rigidul devenit liber după înlocuirea legăturilor din A și din B cu reacțiunile $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_B$, ecuații care se scriu sub forma:

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \sum_i^n \bar{F}_i = 0; \tag{4.101}$$

$$\overline{AB} \times \bar{R}_B + \sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0. \tag{4.102}$$

Proiecțiile pe axe ale acestor ecuații sînt:

$$R_{Ax} + R_{Bx} + \sum_i^n F_{ix} = 0; \tag{4.103}$$

$$R_{Ay} + R_{By} + \sum_i^n F_{iy} = 0; \tag{4.104}$$

$$R_{Az} + R_{Bz} + \sum_i^n F_{iz} = 0; \tag{4.105}$$

$$-lR_{By} + \sum_i^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0; \tag{4.106}$$

$$lR_{Bx} + \sum_i^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0; \tag{4.107}$$

$$\sum_i^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0, \tag{4.108}$$

din care rezultă:

$$R_{Bx} = -\frac{1}{l} \sum_i^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}); \tag{4.109}$$

$$R_{By} = \frac{1}{l} \sum_i^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}); \tag{4.110}$$

$$R_{Ax} = -\sum_i^n F_{ix} + \frac{1}{l} \sum_i^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}); \tag{4.111}$$

$$R_{Ay} = -\sum_i^n F_{iy} - \frac{1}{l} \sum_i^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}); \tag{4.112}$$

$$R_{Az} + R_{Bz} = -\sum_i^n F_{iz}; \tag{4.113}$$

$$\sum_i^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \tag{4.114}$$

În cazul cînd în A și B avem articulații sferice nu se poate determina decît suma $R_{Az} + R_{Bz}$ din (4.113), reacțiunile rămînînd nedeterminate, iar rigidul numindu-se în acest caz static nedeterminat. Relația (4.114) reprezintă condiția de echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

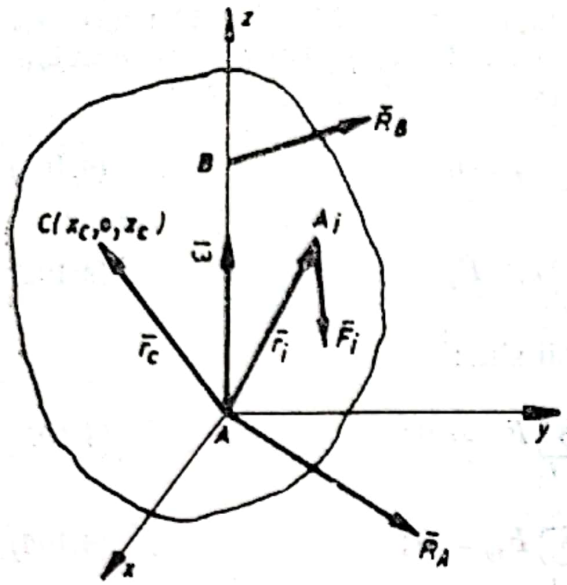


Fig. 4.15

Dacă într-un punct avem o articulaţie sferică (A), iar în celălalt cilindrică (B), datorită condiţiei (4.99) rezultă în mod unic reacţiunile $\bar{R}_A$ şi $\bar{R}_B$ din relaţiile (4.109) —(4.113), iar rigidul se numeşte în acest caz static determinat. Condiţia de echilibru va fi tot (4.114).

În cazul rigidului cu două articulaţii cilindrice, datorită condiţiilor (4.99) şi (4.100) se vede că reacţiunile $\bar{R}_A$ şi $\bar{R}_B$ rezultă în mod unic din relaţiile (4.109) — (4.112) rigidul fiind în acest caz tot static determinat, însă condiţiile de echilibru sînt două la număr şi anume relaţia (4.114) şi relaţia (4.113) care acum devine:

$$\sum_i^n F_{iz} = 0. \qquad (4.113')$$

4.3.2. **Mişcarea rigidului cu axă fixă.** În studiul mişcării rigidului cu o axă fixă ne vom opri la început asupra situaţiei cînd rigidul are numai posibilitatea de rotaţie în jurul axei fixe, deci fie cazul unui rigid cu două articulaţii sferice, fie cazul unui rigid cu o articulaţie sferică (A) şi una cilindrică (B), (figura 4.15).

Vom presupune cunoscute forţele exterioare ce acţionează rigidul şi punctele lor de aplicaţie, distanţa $AB = l$, masa m a rigidului, momentele de inerţie ale rigidului faţă de axele sistemului $Axyz$ (ales cu axa Az după axa fixă AB şi cu axa Ax astfel încît planul Axz să conţină mereu centrul maselor C), poziţia centrului maselor C şi viteza unghiulară iniţială $\bar{\omega}_0$ a rigidului.

Se cer reacţiunile $\bar{R}_A$ şi $\bar{R}_B$ şi mişcarea rigidului determinată de funcţia $\omega(t)$.

Scriind ecuaţiile de mişcare (4.1) şi (4.4) faţă de punctul fix A, după transformarea rigidului în rigid liber prin înlocuirea legăturilor cu reacţiunile $\bar{R}_A$ şi $\bar{R}_B$, obţinem relaţiile:

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \sum_i^n \bar{F}_i = m\bar{a}_c = m[\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c)]; \qquad (4.115)$$

$$\overline{AB} \times \bar{R}_B + \sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \dot{\bar{K}}_A = \frac{d\bar{K}_A}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_A. \qquad (4.116)$$

Vom scrie acum expresiile analitice ale vectorilor ce intervin în ecuaţiile de mai sus:

$$\begin{cases} \bar{R}_A(R_{Ax},\ R_{Ay},\ R_{Az}) & \bar{R}_B(R_{Bx},\ R_{By},\ R_{Bz}) \\ \bar{F}_i(F_{ix},\ F_{iy},\ F_{iz}) & \bar{r}_i(x_i,\ y_i,\ z_i) \\ \overline{AB}(0,\ 0,\ l) & \bar{r}_c(x_c,\ 0,\ z_c). \end{cases} \qquad (4.117)$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă atunci:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_c = \dot{\omega} x_c \bar{j} \\ \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) = (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_c)\,\bar{\omega} - \omega^2 \bar{r}_c = \omega^2 z_c \bar{k} - \omega^2 x_c \bar{i} - \omega^2 z_c \bar{k} = -\omega^2 x_c \bar{i} \\ \dfrac{d\bar{K}_A}{dt} = -J_{xz}\dot{\omega}\bar{i} - J_{yz}\dot{\omega}\bar{j} + J_{zz}\dot{\omega}\bar{k} \\ \bar{\omega} \times \bar{K}_A = J_{yz}\omega^2 \bar{i} - J_{xz}\omega^2 \bar{j} \\ \overline{AB} \times \bar{R}_B = -lR_{By}\bar{i} + lR_{Bx}\bar{j}. \end{cases} \tag{4.118}$$

Cu ajutorul relaţiilor (4.117) şi (4.118) proiecţiile pe axe ale ecuaţiilor (4.115) şi (4.116) se scriu:

$$R_{Ax} + R_{Bx} + \sum_i^n F_{ix} = -m\omega^2 x_c; \tag{4.119}$$

$$R_{Ay} + R_{By} + \sum_i^n F_{iy} = m\dot{\omega} x_c; \tag{4.120}$$

$$R_{Az} + R_{Bz} + \sum_i^n F_{iz} = 0; \tag{4.121}$$

$$-lR_{By} + \sum_i^n (y_i F_{iz} - z_i F_{ix}) = -J_{xz}\dot{\omega} + J_{yz}\omega^2; \tag{4.122}$$

$$lR_{Bx} + \sum_i^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = -J_{yz}\dot{\omega} - J_{xz}\omega^2; \tag{4.123}$$

$$\sum_i^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = J_{zz}\dot{\omega}. \tag{4.124}$$

Din relaţia (4.124), numită şi ecuaţia de mişcare, rezultă acceleraţia unghiulară:

$$\dot{\omega} = \varepsilon = \frac{M_{Az}}{J_{zz}}. \tag{4.125}$$

Cu ajutorul condiţiei iniţiale:

$$\omega(0) = \omega_0 \tag{4.126}$$

rezultă:

$$\omega = \omega_0 + \int \varepsilon \, dt. \tag{4.127}$$

Dacă M_{Az} e constant rezultă:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{4.128}$$

Odată determinată şi viteza unghiulară ω, din relaţiile (4.123) şi (4.122) rezultă R_{Bz} şi R_{By}, apoi din (4.119) şi (4.120) rezultă R_{Ax} şi R_{Ay}. Relaţia rămasă, (4.121), ne dă doar suma $R_{Az} + R_{Bz}$. Înseamnă că rigidul cu două arti-

Scanned with OKEN Scanner

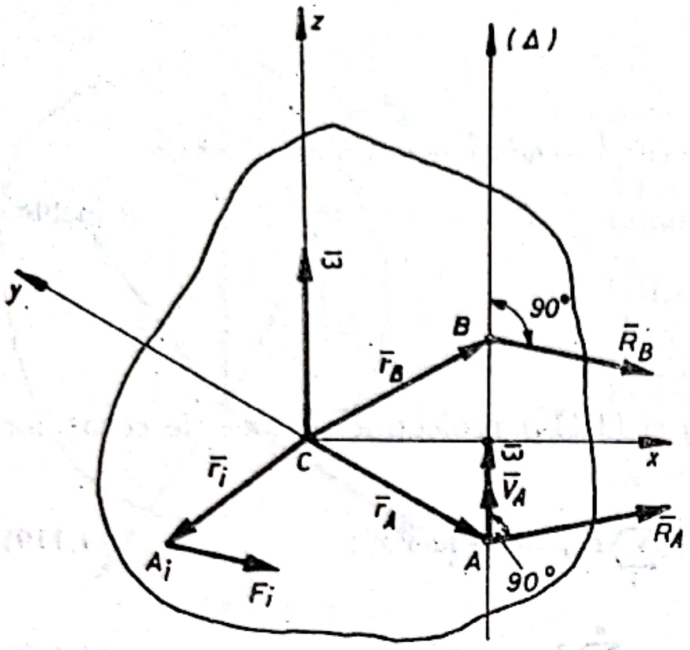


Fig. 4.16

culaţii sferice nu are reacţiunile unic determinate, pe cînd rigidul cu o articulaţie sferică şi una cilindrică ($R_{Bz} = 0$) are reacţiunile unic determinate, în ambele cazuri însă mişcarea este perfect determinată prin ecuaţia (4. 125).

Vom considera acum cazul rigidului cu două articulaţii cilindrice. În acest caz rigidul nu mai are nici un punct fix şi în general nu are nici puncte în mişcare rectilinie uniformă. În acest caz trebuie să aplicăm teorema momentului cinetic faţă de centrul maselor C şi în consecinţă vom alege un sistem de axe $Cxyz$ (fig. 4.16) cu originea în C, cu axa Cz paralelă cu axa fixă AB şi cu axa Cx intersectînd această axă fixă. Se presupun cunoscute: forţele exterioare ce acţionează rigidul şi punctele lor de aplicaţie, poziţia punctelor A şi B faţă de centrul maselor C, masa rigidului şi momentele sale de inerţie faţă de axele sistemului $Cxyz$, viteza unghiulară iniţială ω_0 a rigidului şi viteza iniţială v_0 a punctului A. Se caută reacţiunile din A şi din B şi mişcarea rigidului prin funcţiile $\bar{\omega}(t)$ şi $\bar{v}_A(t)$.

Ecuaţiile de mişcare (4.1) şi (4.2) se scriu în acest caz:

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \sum_i^n \bar{F}_i = m\bar{a}_c = m[\dot{\bar{v}}_A - \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_A - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_A)]; \quad (4.129)$$

$$\bar{r}_A \times \bar{R}_A + \bar{r}_B \times \bar{R}_B + \sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \dot{\bar{K}}_c = \frac{d\bar{K}_c}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_c. \quad (4.130)$$

Trecînd peste etapele de calcul vom scrie ecuaţiile de proiecţie pe axe ale acestor relaţii:

$$R_{Ax} + R_{Bx} + \sum_i^n F_{ix} = m\omega^2 x_A; \quad (4.131)$$

$$R_{Ay} + R_{By} + \sum_i^n F_{iy} = -m\dot{\omega} x_A; \quad (4.132)$$

$$\sum_i^n F_{iz} = m\dot{v}_A; \quad (4.133)$$

$$-z_A R_{Ay} - z_B R_{By} + \sum_i^n M_{ix} = -J_{xz}\dot{\omega} + J_{yz}\omega^2; \quad (4.134)$$

$$z_A R_{Ax} + z_B R_{Bx} + \sum_i^n M_{iy} = -J_{yz}\dot{\omega} - J_{xz}\omega^2; \quad (4.135)$$

$$x_A(R_{Ay} + R_{By}) + \sum_i^n M_{iz} = J_{zz}\dot{\omega}. \quad (4.136)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţiile (4.132) şi (4.136) rezultă:

$$\dot{\omega} = \varepsilon = \frac{\sum_i^n M_{tz} - x_A \sum_i^n F_{ty}}{J_{zz} + mx_A^2} = \frac{M_\Delta}{J_\Delta}, \tag{4.137}$$

în care M_Δ reprezintă proiecţia pe axa (Δ) a momentului rezultant faţă de A, iar J_Δ momentul de inerţie al rigidului faţă de această axă.

Ecuaţia (4.137) este absolut similară ecuaţiei (4.125).

Din relaţia (4.133) rezultă:

$$\dot{v}_A = a_A = \frac{1}{m}\sum_i^n F_{tz} = \frac{R_\Delta}{m}, \tag{4.138}$$

R_Δ fiind proiecţia pe (Δ) a rezultantei forţelor.

Cu ajutorul condiţiilor iniţiale:

$$\begin{cases} \omega(0) = \omega_0, \\ v_A(0) = v_0 \end{cases} \tag{4.139}$$

rezultă

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \int \varepsilon \cdot dt \\ v_A(t) = v_0 + \int a_A \cdot dt, \end{cases} \tag{4.140}$$

care determină mişcarea rigidului. Aceste funcţii odată determinate, din relaţiile (4.131), (4.132), (4.134) şi (4.135) se deduc proiecţiile R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx} şi R_{By}, care rezultă în mod unic.

4.3.3. **Noţiuni de echilibrare statică şi dinamică.** Se spune că un rigid este echilibrat static dacă centrul său de masă se află pe axa de rotaţie. Se spune că rigidul este echilibrat dinamic dacă pe lîngă condiţia anterioară mai avem îndeplinite şi condiţiile:

$$J_{xz} = J_{yz} = 0, \tag{4.141}$$

Az fiind axa fixă. Relaţiile acestea ne arată că axa fixă (de rotaţie) a rigidului este o axă principală de inerţie. Să vedem ce se realizează prin cele două tipuri de echilibrări.

Fie un rigid static echilibrat, cu axa fixă verticală şi acţionat doar de propria-i greutate $\bar{G}(0, 0, -G)$ aplicată în centrul maselor $C(0, 0, Z_c)$. Din relaţiile (4.103), (4.104), (4.106) şi (4.107) rezultă:

$$R_{Ax} = R_{Ay} = R_{Bx} = R_{By} = 0, \tag{4.142}$$

proiecţii care n-ar mai fi nule dacă C nu s-ar afla pe axă. Deci pentru cazul rigidului de mai sus static echilibrat şi aflat în repaus ($\omega = 0$) reacţiunile din punctele fixe nu au componente perpendiculare pe axa de rotaţie.

Scanned with OKEN Scanner

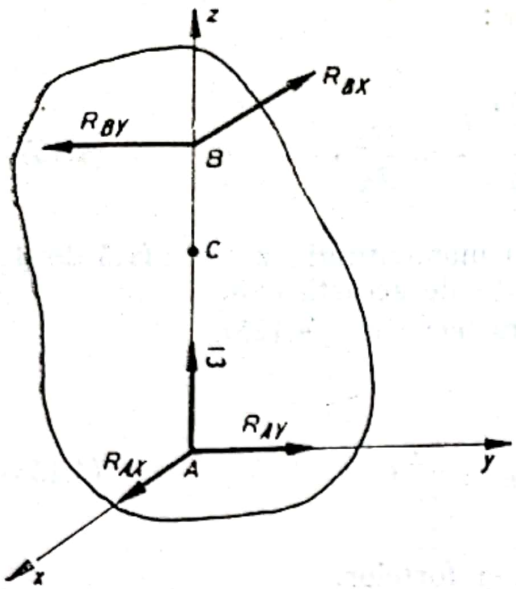


Fig. 4.17

Dacă rigidul echilibrat static se mişcă ($\omega \neq 0$), din relaţiile (4.122) (4.123) şi (4.124) rezultă:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = 0 \\ R_{Bx} = -\dfrac{J_{xz}\omega^2}{l} \neq 0 \\ R_{By} = -\dfrac{J_{yz}\omega^2}{l} \neq 0 \end{cases} \tag{4.143}$$

şi din relaţiile (4.119) şi (4.120) rezultă:

$$\begin{cases} R_{Ax} = -R_{Bx} \neq 0; \\ R_{Ay} = -R_{By} \neq 0. \end{cases} \tag{4.143'}$$

Apar deci nişte cupluri de forţe de legătură (fig. 4.17) perpendiculare pe axa de rotaţie şi care se rotesc cu o viteză unghiulară egală cu aceea a rigidului. Din relaţiile (4.143) deducem faptul că aceste cupluri se anulează indiferent de modulul vitezei unghiulare dacă avem îndeplinite şi condiţiile (4.141), deci dacă axa de rotaţie este şi axă principală de inerţie a rigidului. Dacă am avea însă îndeplinită numa această condiţie, fără a avea şi centrul maselor C situat pe axă, din relaţiile (4.119)—(4.124) deducem:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = 0 \\ R_{Ay} = R_{By} = 0 \\ R_{Ax} = mx_c\left(\dfrac{g}{l} - \omega^2\right) \neq 0 \left(\text{pt. } \omega \neq \sqrt{\dfrac{g}{l}}\right) \\ R_{Bx} = -mx_c\dfrac{g}{l} \neq 0. \end{cases} \tag{4.144}$$

Deci în acest caz apar în punctele fixe A şi B reacţiuni normale la axa de rotaţie situate în planul determinat de această axă şi centrul maselor C (fig. 4.18). Deci condiţia necesară şi suficientă pentru ca reacţiunile din punctele fixe ale unui rigid cu axă fixă să nu conţină componente normale la axa de rotaţie este ca rigidul să fie dinamic echilibrat. Echilibrarea dinamică a arborilor diferitelor maşini şi a pieselor lor aflate în mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe este o operaţie necesară, ea ducînd la micşorarea substanţială a uzurii lagărelor. Ca exemple de asemenea organe de maşini la care echilibrarea dinamică este de o importanţă covîrşitoare avem: arborii cotiţi ai automobilelor, roţile motoare ale locomotivelor (de care sînt ataşate bielele), manivela motorului stelat de avion etc.

4.3.4. **Pendulul fizic. Teorema lui Huygens.** Pendulul fizic este un rigid cu axa fixă orizontală, supus doar acţiunii propriei greutăţi. Fie un astfel de rigid (fig. 4.19) căruia îi vom ataşa solidar un sistem de axe $Oxyz$, cu Oz după axa fixă orizontală şi cu Ox trecînd prin centrul maselor C. Notăm

Scanned with OKEN Scanner

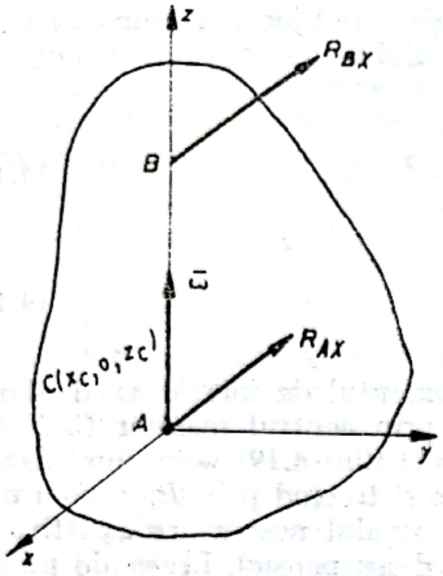


Fig. 4.18

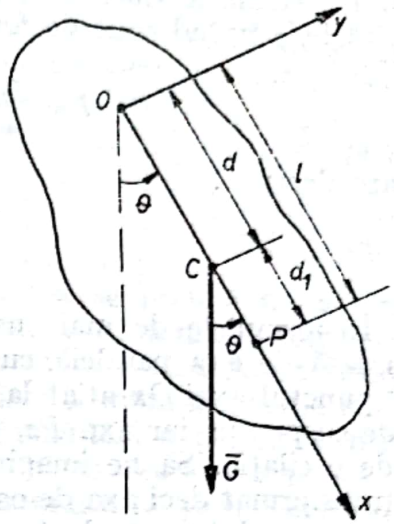


Fig. 4.19

cu θ unghiul orientat făcut de axa Ox cu verticala descendentă ce trece prin O și cu d distanța OC. Cu aceste notații ecuația de mișcare (4.124) se scrie:

$$-Gd \sin \theta = J_{oz}\ddot{\theta}, \tag{4.145}$$

în care J_{oz} este momentul de inerție axial al rigidului față de axa Oz, iar $\ddot{\theta}$ este accelerația unghiulară a mișcării. Relația (4.145) se mai scrie:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \tag{4.146}$$

în care am notat:

$$l = \frac{J_{oz}}{md}. \tag{4.147}$$

Observînd că ecuația (4.146) coincide perfect cu ecuația de mișcare a pendulului matematic (paragraful 3.3.5), vom spune că l este lungimea pendulului matematic sincron cu pendulul fizic dat. În consecință toate concluziile privind mișcarea pendulului matematic sincron se aplică și pendulului fizic dat. Spre exemplu oscilațiile cu amplitudine mai mare a pendulului fizic nu sînt izocrone (nu au perioada independentă de amplitudine), pe cînd oscilațiile cu amplitudine mică (sub 5° în practică) ale pendulului fizic se pot considera izocrone (perioada lor e independentă de amplitudine), aceste oscilații făcîndu-se după legea:

$$\theta = A \sin (\omega t + \varphi), \tag{4.148}$$

în care:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{4.149}$$

Deci, ținînd cont și de relația (4.147) perioada micilor oscilații (izocrone) ale pendulului fizic se scrie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{oz}}{mgd}}. \tag{4.150}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a studia mai în amănunt rolul pe care-l joacă lungimea l a pendulului matematic sincron în mișcarea pendulului fizic vom transforma relația (4.147) ținînd cont de formulele lui *Steiner*:

$$l = \frac{J_{0z}}{md} = \frac{J_{cz} + md^2}{md} = d + d_1, \tag{4.151}$$

în care deci:

$$d_1 = \frac{J_{cz}}{md}. \tag{4.152}$$

În formulele de mai sus J_{cz} este momentul de inerție axial al rigidului față de axa paralelă cu Oz ce trece prin centrul maselor C. Notînd cu P punctul axei Ox aflat la distanța l de O (fig. 4.19) vom numi axa Oz axă de suspensie, iar axa Pz, paralelă cu Oz și trecînd prin P, o vom numi axă de oscilație. Să ne imaginăm acum că rigidul nostru are axa fixă Pz (am transformat deci axa de oscilație în axă de suspensie). Legea de mișcare a acestui pendul va fi de forma (4.146), adică:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l'} \sin \theta = 0, \tag{4.153}$$

în care lungimea pendulului matematic sincron este:

$$l' = \frac{J_{pz}}{md_1}. \tag{4.154}$$

Cu ajutorul relațiilor lui *Steiner* și al relațiilor (4.151) și (4.152) putem scrie:

$$l' = \frac{J_{pz}}{md_1} = \frac{J_{cz} + md_1^2}{md_1} = d_1 + \frac{J_{cz}}{md_1} = d_1 + d = l, \tag{4.155}$$

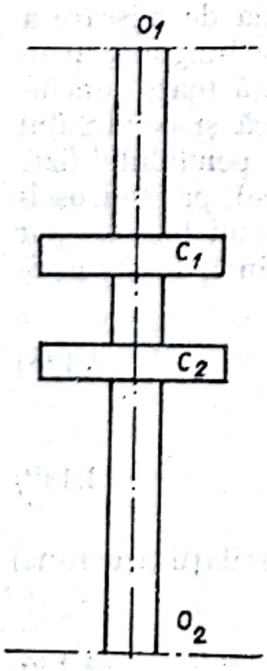


Fig. 4.20

ceea ce ne arată faptul că fosta axă de suspensie Oz devine acum axă de oscilație. Relația:

$$l = l' \tag{4.156}$$

exprimă sintetic *teorema lui Huygens* care afirmă faptul că axa de suspensie și axa de oscilație la un pendul fizic sînt interschimbabile, sau altfel spus, prin transformarea axei de oscilație în axă de suspensie se obține un nou pendul fizic cu o mișcare identică (izocron) cu primul ($T = T'$).

4.3.5. **Tipuri de pendule fizice. pendulul lui Kater, pendulul lui Mach și pendulul inelar.** *Pendulul lui Kater* este compus dintr-o tijă ce poate oscila în jurul axelor orizontale ce trec prin capetele ei O_1 și O_2. Pe tijă pot fi fixate în diferite poziții două corpuri C_1 și C_2 de aceeași formă, dar de mase în general diferite (fig. 4.20). Cu acest pendul putem măsura accelerația gravitației g procedînd în două moduri. Primul mod de lucru este de a găsi prin încercări două poziții ale corpurilor C_1 și C_2, nesime-

Scanned with OKEN Scanner

trice față de mijlocul tijei O_1O_2, astfel încît micile oscilații în jurul axelor O_1 și O_2 să aibă aceeași perioadă $T_1 = T_2 = T$.

În acest caz conform teoremei lui *Huygens*, aceste axe sînt cele două axe interschimbabile: axa de suspensie și axa de oscilație, iar distanța dintre ele devine lungimea pendulului matematic sincron:

$$l = O_1O_2, \tag{4.157}$$

și din relația (4.150) rezultă:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \tag{4.158}$$

Acest procedeu este însă anevoios. De aceea se preferă un al doilea procedeu care elimină încercările de mai sus (care pot lua mult timp), complicînd puțin formula de calcul a accelerației gravitaționale. Acest al doilea procedeu constă în așezarea corpurilor C_1 și C_2 într-o anumită poziție nesimetrică față de mijlocul tijei, determinarea experimentală a poziției centrului de masă C prin distanțele d_1 și d_2 la O_1 și O_2 și măsurarea apoi a perioadelor T_1 și T_2 ($T_1 \neq T_2$) ale micilor oscilații ale pendulului în jurul capetelor O_1 și O_2. Din relațiile (4.150) și (4.151) rezultă acum:

$$\begin{aligned} T_1^2 &= \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{J_{O_1z}}{md_1} = \frac{4\pi^2}{g}\left(d_1 + \frac{J_{cz}}{md_1}\right); \\ T_2^2 &= \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{J_{O_2z}}{md_2} = \frac{4\pi^2}{g}\left(d_2 + \frac{J_{cz}}{md_2}\right). \end{aligned} \tag{4.159}$$

Eliminînd raportul J_{cz}/m între aceste două relații obținem:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1T_1^2 - d_2T_2^2}. \tag{4.160}$$

În cazul $T_1 = T_2$, $(d_1 + d_2 = l)$, relația (4.160) se transformă în relația (4.158).

Pendulul lui Mach este un rigid a cărui axă fixă este înclinată față de orizontală cu un unghi α reglabil după voie, rigidul fiind supus numai acțiunii greutății proprii (fig. 4.21). Vom atașa solidar rigidului un sistem de axe cu

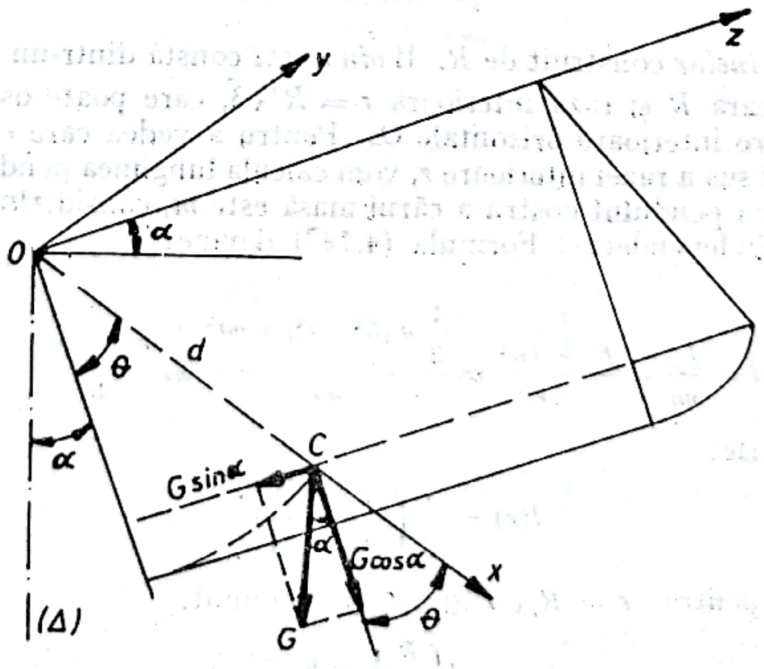


Fig. 4.21

Oz după axa fixă și cu Ox trecînd prin centrul maselor C. Notînd cu θ unghiul orientat făcut de planul Oxz cu planul vertical ce conține axa Oz, distanța OC fiind $OC = d$, aplicarea ecuației de mișcare (4.124) conduce la:

$$-Gd\cos\alpha\sin\theta = J_{oz}\ddot{\theta}, \tag{4.161}$$

deoarece proiecțiile forței de greutate pe axele sistemului $Oxyz$ (fig. 4.21) sînt:

$$\begin{cases} G_x = G\cos\alpha\cos\theta \\ G_y = -G\cos\alpha\sin\theta \\ G_z = -G\sin\alpha. \end{cases}$$

Cu ajutorul notației (4.147) ecuația (4.161) se scrie sub forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g\cos\alpha}{l}\sin\theta = 0, \tag{4.162}$$

ecuație absolut similară ecuației (4.147) cu singura deosebire că în locul constantei g apare aici constanta $g\cos\alpha$. În consecință micile oscilații (izocrone) ale pendulului lui *Mach* vor avea perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_{oz}}{mgd\cos\alpha}}. \tag{4.163}$$

Notînd prin T_0 perioada micilor oscilații cînd axa Oz este orizontală ($\alpha = 0$):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{4.164}$$

putem scrie relația verificabilă experimental:

$$\frac{T_0^2}{T^2} = \cos\alpha. \tag{4.165}$$

Pendulul inelar construit de *R. Woinaroski* constă dintr-un tub metalic, cu raza exterioară R și raza interioară $r = R/\sqrt{3}$, care poate oscila în jurul unei generatoare interioare orizontale Oz. Pentru a vedea care este rațiunea alegerii de mai sus a razei interioare r, vom calcula lungimea pendulului matematic sincron cu pendulul nostru a cărui masă este m, considerînd la început razele R și r independente. Formula (4.147) devine:

$$l = \frac{J_{oz}}{mr} = \frac{J_{cz} + mr^2}{mr} = \frac{\frac{1}{2}m(R^2 + r^2) + mr^2}{mr} = \frac{R^2 + 3r^2}{2r}.$$

Deci putem scrie:

$$l(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r} + 3r\right), \tag{4.166}$$

funcție care pentru $r = R/\sqrt{3}$ își atinge minimul:

$$l_{min} = l\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = R\sqrt{3}. \tag{4.167}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin aceasta perioada micilor oscilaţii ale pendulului are valoarea minimă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{g}}. \tag{4.168}$$

Această valoare extremală s-a ales pentru ca eventualele erori de construcţie ale aparatului să influenţeze cît mai puţin rezultatele experimentale. Acceleraţia gravitaţională măsurată cu ajutorul acestui pendul are valoarea:

$$g = \frac{4\sqrt{3}\pi^2 R}{T^2}. \tag{4.169}$$

APLICAŢII

1. O bilă A (fig. 4.22) este scufundată într-un vas cu lichid şi e fixată la extremitatea unei bare AB de lungime l. Bara se roteşte în planul orizontal, acţionată fiind de axul vertical O_1O_2 cu care este solidară. Dacă viteza unghiulară iniţială este ω_0 şi dacă forţa de rezistenţă a lichidului ce se aplică bilei este $R = \alpha m\omega$, în care ω este viteza unghiulară momentană, m masa bilei şi α o constantă, să se calculeze: timpul la care viteza unghiulară se înjumătăţeşte şi numărul de rotaţii pe care le efectuează bila în acest timp. Se neglijează masele barelor.

Rezolvare:

Relaţia (4.125) se scrie:

$$\dot{\omega} = \frac{-R \cdot l}{J_{zz}} = \frac{-\alpha m\omega l}{ml^2} = \frac{-\alpha\omega}{l},$$

de unde rezultă:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{l}\,dt \Rightarrow \ln\frac{\omega}{C_1} = -\frac{\alpha}{l}t \Rightarrow \omega = C_1 e^{-\frac{\alpha}{l}t}.$$

Aplicînd acestei relaţii condiţia iniţială:

$$\omega(0) = \omega_0,$$

rezultă:

$$C_1 = \omega_0 \text{ şi deci:}$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t}. \tag{1}$$

Din relaţia:

$$\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t_1}$$

deducem:

$$t_1 = \frac{l}{\alpha}\ln 2. \tag{2}$$

Integrînd relaţia (1) obţinem:

$$\theta = \int \omega \cdot dt = \int \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t} \cdot dt = -\frac{l}{\alpha}\omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t} + C_2.$$

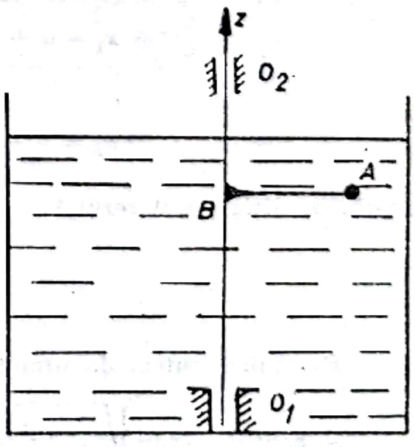


Fig. 4.22

Scanned with OKEN Scanner

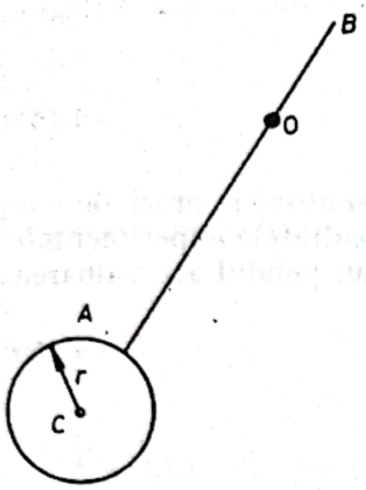


Fig. 4.23

Aplicînd acestei relații condiția inițială $\theta(0)=0$ obținem:

$$C_2 = \frac{I}{\alpha}\omega_0,$$

și deci:

$$\theta = \frac{I}{\alpha}\omega_0\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{I}t}\right). \tag{3}$$

Numărul de rotații efectuate de bilă în timpul t_1 îl obținem înlocuind valoarea t_1 din relația (2) în relația (3) și împărțind apoi unghiul total rezultat la 2π:

$$n_1 = \frac{\theta(t_1)}{2\pi} = \frac{\frac{I\omega_0}{2\alpha}}{2\pi} = \frac{I\omega_0}{4\pi\alpha}\ \text{rot.} \tag{4}$$

2. Un pendul este compus dintr-o bară AB de masă neglijabilă și un disc omogen de masă m și rază r (fig. 4.23). Să se determine prin ce punct al barei trebuie să treacă axa de suspensie pentru ca perioada oscilațiilor pendulului să fie T. Aceeași întrebare în cazul în care discul este înlocuit cu o sferă omogenă de masă m și rază r.

Rezolvare:

Notăm distanța necunoscută:

$$OC = x.$$

Relația (4.150) se scrie în acest caz:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{oz}}{mg\cdot x}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_{cz}+mx^2}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2+mx^2}{mgx}},$$

din care rezultă succesiv:

$$x^2 - \frac{T^2}{4\pi^2}g\,x + \frac{r^2}{2} = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{T^2 g}{8\pi^2} \pm \sqrt{\frac{T^4 g^2}{64\pi^4} - \frac{r^2}{2}} = a \pm \sqrt{b}. \tag{1}$$

Din condiția $x \geqslant r$ rezultă:

$$x_1 = a + \sqrt{b} \geqslant r \text{ pentru } T \geqslant 2\pi\sqrt{1{,}5\frac{r}{g}};$$

$$x_2 = a - \sqrt{b} \geqslant r \text{ pentru } T \leqslant 2\pi\sqrt{1{,}5\frac{r}{g}};$$

iar din condiția $b \geqslant 0$ rezultă:

$$T \geqslant 2\pi\sqrt{\sqrt{2}\frac{r}{g}}. \tag{2}$$

Rezumînd putem da următoarea schemă:

– pentru $T < 2\pi\sqrt{\sqrt{2}\frac{r}{g}}$ problema imposibilă;

Scanned with OKEN Scanner

– pentru $2\pi\sqrt{\sqrt{2}\frac{r}{g}} \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{1{,}5\frac{r}{g}}$; $x = a - \sqrt{b}$;

– pentru $2\pi\sqrt{1{,}5\frac{r}{g}} \leqslant T$; $x = a + \sqrt{b}$,

în care:

$$a = \frac{gT^2}{8\pi^2}; b = \frac{g^2T^4}{64\pi^2} - \frac{r^2}{2}.$$

Lăsăm pe seama cititorului să verifice faptul că la înlocuirea discului cu o sferă problema admite soluția unică:

$$x_1 = \frac{gT^2}{8\pi^2} + \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{2r^2}{5}},$$

cu condiția:

$$T \geqslant 2\pi\sqrt{1{,}4 \cdot \frac{r}{g}}.$$

3. O placă dreptunghiulară omogenă (fig. 4.24) de masă m este rotită în jurul laturii verticale AB cu viteza unghiulară ω. Cunoscînd perioada T_1 a oscilațiilor plăcii în jurul laturii AB devenită orizontală și perioada T_2 a oscilațiilor plăcii în jurul laturii AD devenită orizontală să se calculeze variația forțelor de apăsare laterală asupra lagărelor A și B în funcție de parametrul ω și constantele m, T_1 și T_2.

Perioadele T_1 și T_2 calculate cu relația (4.150) sînt:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Az}}{mg\,x_c}};$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Ax}}{mg\,z_c}}.$$

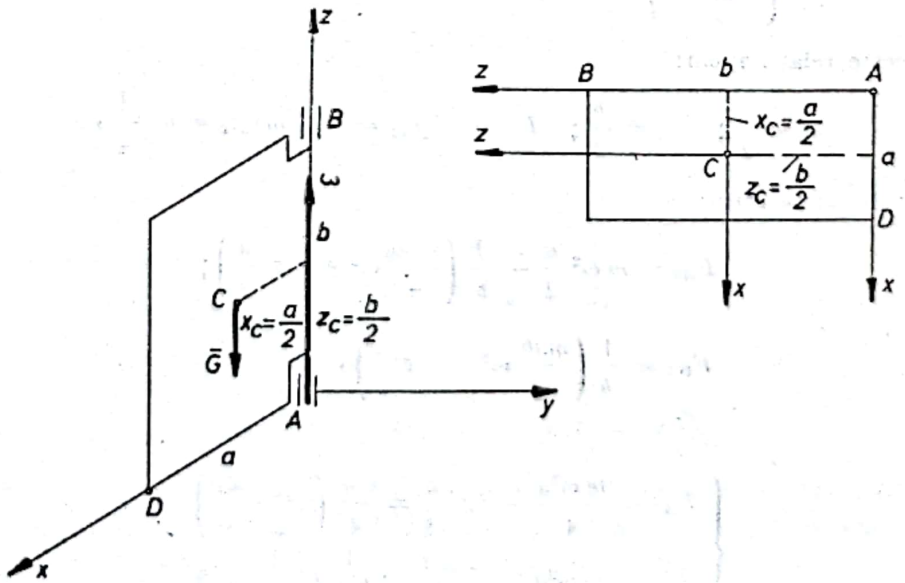


Fig. 4.24

Notînd cu a și b dimensiunile plăcii putem scrie:

$$x_c = \frac{a}{2}\,;\; z_c = \frac{b}{2}\,;$$

$$J_{Az} = J_{cz} + mx_c^2 = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}\,;$$

$$J_{Ax} = J_{cx} + mz_c^2 = \frac{mb^2}{12} + \frac{mb^2}{4} = \frac{mb^2}{3}\,,$$

și deci avem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_1^2}{4\pi^2} &= \frac{ma^2 \cdot 2}{3\,mga} \Rightarrow a = \frac{3gT_1^2}{8\pi^2} \\ \frac{T_2^2}{4\pi^2} &= \frac{mb^2 \cdot 2}{3 \cdot mgb} \Rightarrow b = \frac{3gT_2^2}{8\pi^2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Deoarece singura forță exterioară este greutatea $\bar{G}(0, 0, -mg)$ aplicată în punctul $C(x_c, 0, z_c)$, din relațiile (4.119) — (4.124) deducem:

$$\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \text{const.}$$

$$R_{Bx} = \frac{1}{l}\,(-J_{xz}\omega^2 - x_c mg)\,;$$

$$R_{By} = R_{Ay} = 0\,;$$

$$R_{Ax} = -\,m\,\omega^2 x_c + \frac{1}{l}\,(J_{xz}\omega^2 + x_c mg).$$

Forțele de apăsare în lagăre fiind acțiunile plăcii asupra lagărelor (care reacționează asupra plăcii cu reacțiunile de mai sus) deducem imediat că aceste apăsări se scriu sub forma:

$$\left\{\begin{aligned} F_{Ax} &= -\,R_{Ax} = m\,\omega^2\,x_c - \frac{1}{l}\,(J_{xz}\omega^2 + mgx_c). \\ F_{Bx} &= \frac{1}{l}\,(J_{xz}\,\omega^2 + mgx_c). \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

În aceste relații avem:

$$x_c = \frac{a}{2}\,; \quad z_c = \frac{b}{2}\,; \quad l = b\,; \quad J_{xz} = 0 + mx_c z_c = m\,\frac{ab}{4}\,,$$

și deci relațiile (2) se scriu:

$$F_{Ax} = m\,\omega^2\,\frac{a}{2} - \frac{1}{b}\left(\frac{mab}{4}\,\omega^2 + mg\,\frac{a}{2}\right);$$

$$F_{Bx} = \frac{1}{b}\left(\frac{mab}{4}\,\omega^2 + mg\,\frac{a}{2}\right),$$

sau:

$$\left\{\begin{aligned} F_{Ax} &= \frac{m\,\omega^2 a}{4} - mg\,\frac{a}{2b} = \frac{ma}{4}\left(\omega^2 - \frac{2g}{b}\right) \\ F_{Bx} &= \frac{m\,\omega^2 a}{4} + mg\,\frac{a}{2b} = \frac{ma}{4}\left(\omega^2 + \frac{2g}{b}\right). \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind (1) în (3) obținem:

$$\begin{cases} F_{Ax} = \dfrac{3mgT_1^2}{32\pi^2}\left(\omega^2 - \dfrac{16\pi^2}{3T_2^2}\right) \\ F_{Bx} = \dfrac{3mgT_2^2}{32\pi^2}\left(\omega^2 - \dfrac{16\pi^2}{3T_1^2}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Se observă că forța din B crește parabolic cu ω de la valoarea forței statice $F_s = mg\,\dfrac{a}{2b}$ având mereu sensul înspre placă, pe cînd forța din A scade parabolic de la valoarea forței statice de mai sus (îndreptată însă în sens contrar plăcii) pînă la zero $\left(\text{cînd } \omega = \sqrt{\dfrac{2g}{b}}\right)$, schimbînd apoi de sens și crescînd tot parabolic.

4.4. RIGIDUL CE POATE EXECUTA O MIȘCARE PLANĂ

Spunem că un rigid execută o mișcare plan-paralelă, sau mai pe scurt o mișcare plană, dacă tot timpul mișcării sale rigidul are trei puncte necoliniare situate într-un plan fix din spațiu, sau, cu alte cuvinte, dacă o secțiune plană a rigidului rămîne tot timpul într-un plan fix din spațiu.

4.4.1. **Ecuațiile de echilibru ale rigidului ce poate executa o mișcare plană.** Vom pleca de la afirmația generală, valabilă pentru echilibrul oricărui rigid, că axa centrală a sistemului de forțe exterioare și axa centrală a sistemului de forțe de legătură trebuie să coincidă. Într-adevăr, reducînd sistemul forțelor exterioare într-un punct O al axei sale centrale obținem torsorul:

$$\begin{cases} \bar{R}_E \\ \bar{M}_{OE} = \lambda \bar{R}_E. \end{cases} \tag{4.170}$$

Reducînd și sistemul forțelor de legătură în punctul O vom obține torsorul:

$$\begin{cases} \bar{R}_L \\ \bar{M}_{OL}. \end{cases} \tag{4.171}$$

Ecuațiile de echilibru (4.8) și (4.9) se scriu în acest caz sub forma:

$$\begin{cases} \bar{R}_E + \bar{R}_L = 0 & (4.172) \\ \bar{M}_{OE} + \bar{M}_{OL} = 0, & (4.173) \end{cases}$$

relații care împreună cu (4.170) conduc la:

$$\bar{M}_{OL} = -\bar{M}_{OE} = -\lambda \bar{R}_E = \lambda \bar{R}_L. \tag{4.174}$$

Din (4.174) rezultă că punctul O este situat și pe axa centrală a sistemului de forțe de legătură, iar din (4.172) rezultă că axele centrale ale celor două sisteme de forțe sînt paralele. În consecință ele coincid.

Vom considera acum un rigid care are n puncte necoliniare ale sale ($n \geq 3$) legate într-un plan fix din spațiu (P). Vom pune în aceste puncte A_i

Scanned with OKEN Scanner

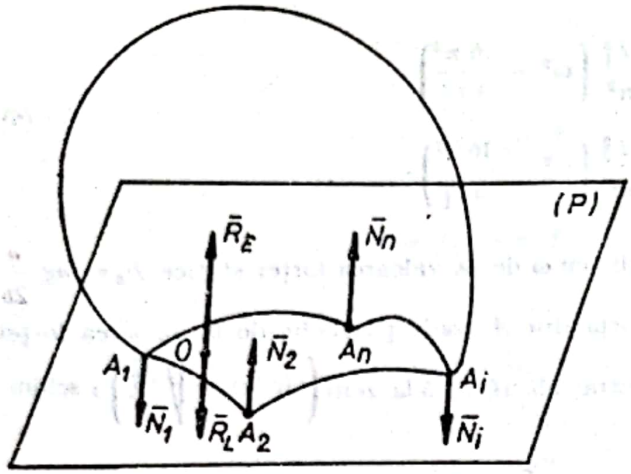


Fig. 4.25

forțele de legătură $\bar{N}_i$ normale la planul fix (fig. 4.25).

Axa centrală a acestui sistem de forțe paralele fiind perpendiculară pe planul fix conform relațiilor (1.106), iar torsorul minim fiind compus doar din rezultantă conform relației (1.105), rezultă că pentru a fi în echilibru, rigidul de mai sus trebuie să fie acționat de un sistem de forțe exterioare reductibil la o rezultantă unică normală la planul fix. Notînd cu O punctul în care această rezultantă (și deci axele centrale ale celor două sisteme) înțeapă planul fix, putem afirma că în cazul legăturii bilaterale a punctelor A_i pe planul (P), forțele $\bar{N}_i$ avînd sensuri arbitrare, punctul O poate fi situat oriunde în planul (P), pe cînd în cazul legăturii unilaterale identice a punctelor A_i pe acest plan, forțele $\bar{N}_i$ avînd toate același sens, punctul O este situat în interiorul poligonului convex ce conține toate punctele de susținere. Acest poligon poartă numele de poligon de susținere al rigidului. Deci pentru ca un rigid sprijinit pe un plan fix să fie în echilibru trebuie ca forțele exterioare ce-l acționează să se reducă la o rezultantă unică, normală la planul fix, care să înțepe acest plan într-un punct interior poligonului de susținere.

Această afirmație se poate demonstra foarte ușor aplicînd prima relație de la (1.106) scrisă sub forma:

$$x = \frac{\sum_i N_i \cdot x_i}{\sum_i N_i}, \tag{4.175}$$

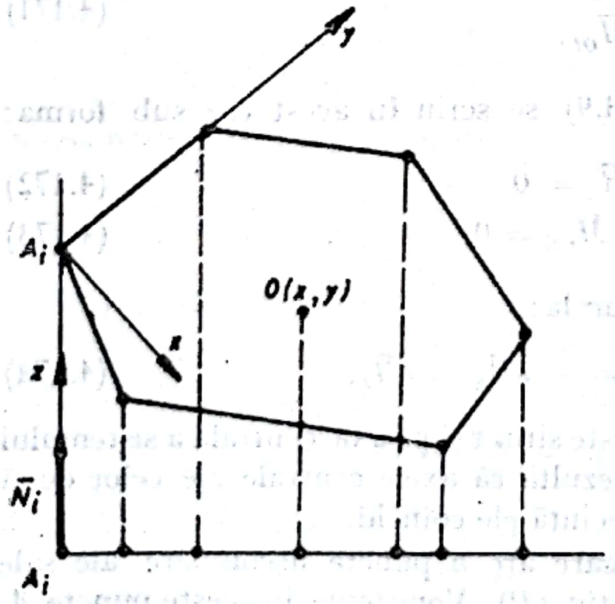


Fig. 4.26

alegînd succesiv sistemul de axe $A_i\,xyz$ (fig. 4.26) cu axa A_iy după fiecare latură a poligonului de susținere, cu axa A_ix spre acest poligon și cu axa A_iz în sensul vectorilor $\bar{N}_i$. Cu aceasta toți termenii sumelor din (4.175) devin pozitivi și în consecință, abscisa x alui O fiind mereu pozitivă la suprapunerea axei A_iy peste toate laturile, rezultă că O este în interiorul poligonului convex considerat.

Oricare ar fi acum tipul legăturilor punctelor A_i pe planul fix, pentru determinarea reacțiunilor $\bar{N}_i$ vom proiecta ecuațiile de echilibru (4.172) și (4.173) pe axele unui

Scanned with OKEN Scanner

sistem $Oxyz$ cu planul Oxy în planul fix, obținînd următoarele trei relații scalare:

$$\begin{cases} R_{Ez} + \sum_i^n N_{iz} = 0 \\ M_{OEx} + \sum_i^n y_i N_{iz} = 0 \\ M_{OEy} - \sum_i^n x_i N_{iz} = 0, \end{cases} \tag{4.176}$$

în care x_i, y_i, sînt coordonatele punctelor A_i. Reamintim condițiile impuse sistemului de forțe exterioare:

$$R_{Ex} = R_{Ey} = M_{OEz} = 0. \tag{4.177}$$

Reacțiunile $\bar{N}_i(0, 0, N_{iz})$ rezultă în mod unic din relațiile (4.176) dacă numărul punctelor de legătură este $n = 3$, (sau, impunînd condiții suplimentare forțelor exterioare, și în cazul $n = 2$ sau $n = 1$) caz în care spunem că rigidul este static determinat. În cazul $n > 3$, numărul necunoscutelor fiind mai mare decît numărul ecuațiilor, reacțiunile $\bar{N}_i$ nu mai rezultă în mod unic din aceste condiții și rigidul se numește static nedeterminat.

4.4.2. **Ecuațiile de mișcare ale rigidului aflat într-o mișcare plană.** Fie un rigid care are n puncte ale sale legate într-un plan fix (P) din spațiu (fig. 4.27) în care vom lua axele O_1x_1 și O_1y_1 ale unui sistem de referință fix $O_1x_1y_1z_1$. Centrul maselor C va fi obligat în consecință să rămînă într-un plan fix (Q) paralel cu (P), iar mișcarea rigidului se va compune dintr-o mișcare a lui C cu viteza $\bar{v}_c$ în planul (Q) și o rotație a rigidului cu viteza

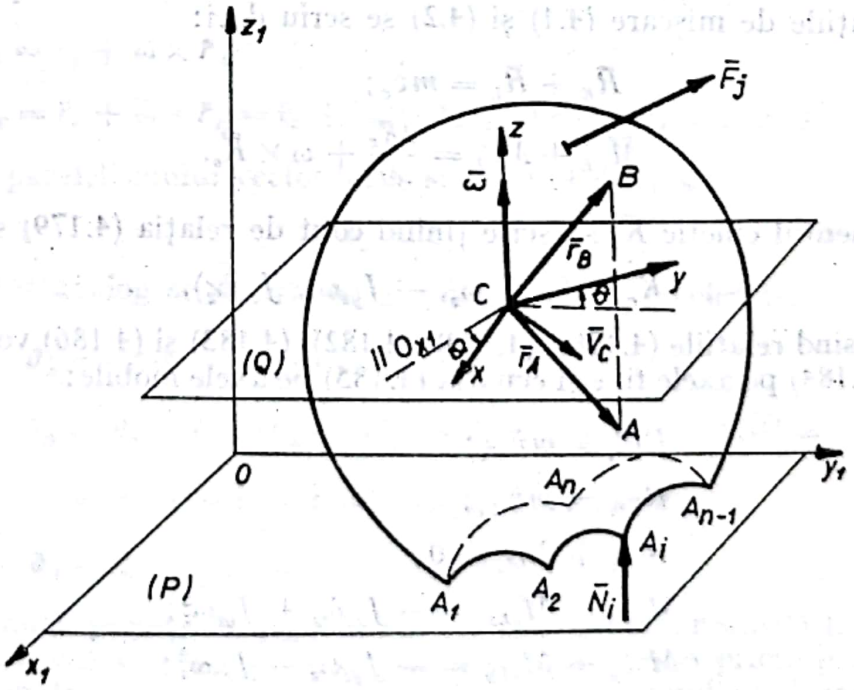


Fig. 4.27

unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul normalei în C la planul (Q). Aceasta se poate demonstra și analitic în forma următoare:

$$z_{1c} = \text{const.},$$

$$\bar{v}_c = \dot{\bar{r}}_{1c} = \dot{x}_{1c}\bar{i}_1 + \dot{y}_{1c}\bar{j}_1 = v_{cx_1}\bar{i}_1 + v_{cy_1}\bar{j}_1. \tag{4.178}$$

Considerînd sistemul $Cxyz$ atașat solidar rigidului, cu planul Cxy în planul fix (Q), putem scrie:

$$\bar{i} = \cos\theta\bar{i}_1 + \sin\theta\bar{j}_1;$$
$$\bar{j} = -\sin\theta\bar{i}_1 + \cos\theta\bar{j}_1;$$
$$\bar{k} = \bar{k}_1;$$

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = 0 & (\dot{\bar{j}} \perp \bar{k}) \\ \omega_y = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = 0 & (\dot{\bar{k}} = 0) \\ \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \dot{\theta}\sin^2\theta + \dot{\theta}\cos^2\theta = \dot{\theta}. \end{cases} \tag{4.179}$$

Reducînd sistemul forțelor exterioare $\bar{F}_i$ și sistemul forțelor de legătură $\bar{N}_i$ în centrul maselor C obținem torsorul:

$$\bar{R} = \bar{R}_E + \bar{R}_L; \tag{4.180}$$
$$\bar{M}_c = \bar{M}_{cE} + \bar{M}_{cL}, \tag{4.181}$$

în care avem condițiile:

$$\bar{R}_L(0,\ 0,\ R_{Lz_1}); \tag{4.182}$$
$$\bar{M}_{CL}(M_{CLx},\ M_{CLy},\ 0), \tag{4.183}$$

forțele de legătură $\bar{N}_i$ fiind toate paralele cu O_1z_1.

Ecuațiile de mișcare (4.1) și (4.2) se scriu deci:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = m\dot{\bar{v}}_c; \tag{4.184}$$

$$\bar{M}_{CE} + \bar{M}_{CL} = \frac{d\bar{K}_c}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_c. \tag{4.185}$$

Momentul cinetic $\bar{K}_c$ se scrie ținînd cont de relația (4.179) sub forma:

$$\bar{K}_c = (-J_{xz}\omega_z,\ -J_{yz}\omega_z,\ J_{zz}\omega_z). \tag{4.186}$$

Folosind relațiile (4.178), (4.179), (4.182), (4.183) și (4.186) vom proiecta ecuația (4.184) pe axele fixe și ecuația (4.185) pe axele mobile:

$$R_{Ex_1} = m\dot{v}_{cx_1}; \tag{4.187}$$
$$R_{Ey_1} = m\dot{v}_{cy_1}; \tag{4.188}$$
$$R_{Ez_1} + R_{Lz_1} = 0; \tag{4.189}$$
$$M_{cEx} + M_{cLx} = -J_{xz}\dot{\omega}_z + J_{yz}\omega_z^2; \tag{4.190}$$
$$M_{cEy} + M_{cLy} = -J_{yz}\dot{\omega}_z - J_{xz}\omega_z^2; \tag{4.191}$$
$$M_{cEz} = J_{zz}\dot{\omega}_z. \tag{4.192}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile (4.187) (4.188) şi (4.192) cu ajutorul condiţiilor iniţiale dau vectorii:

$$\bar{v}_c(v_{cx_1},\ v_{cy1},\ 0); \tag{4.193}$$

$$\bar{\omega}(0,\ 0,\ \omega_z), \tag{4.194}$$

care determină mişcarea rigidului. Relaţiile (4.189), (4.190) şi (4.191) rămîn pentru determinarea forţelor de legătură, operaţie care nu se poate face în mod unic dacă $n > 3$, deci pentru un rigid static nedeterminat pe care-l vom numi acum, şi dinamic nedeterminat. Din contră, în cazul $n = 3$ determinarea reacţiunilor se poate face în mod unic şi rigidul se va numi nu numai static, ci şi dinamic determinat. Tot din relaţiile (4.187)—(4.192) deducem faptul că relaţiile de echilibru $\bar{R} = 0$ şi $\bar{M}_c = 0$ implică în general relaţiile:

$$\begin{cases} v_{cx_1} = \text{const.} \\ v_{cy_1} = \text{const.} \\ \omega_z = 0, \end{cases} \tag{4.195}$$

singura excepţie fiind cazul în care $J_{xz} = J_{yz} = 0$ cînd putem avea şi:

$$\omega_z = \text{const.} \neq 0. \tag{4.196}$$

Deci starea de echilibru a unui rigid ce poate executa o mişcare plană reprezintă în general fie repausul rigidului fie o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă a acestuia, singura excepţie fiind cazul cînd axa Cz (normală la planul fix) este axă principală de inerţie a rigidului, caz în care acesta poate avea şi o mişcare de rotaţie uniformă în jurul acestei axe.

4.4.3. **Proprietăţi ale distribuţiilor de viteze şi acceleraţii la mişcarea plană a rigidului.** Fie două puncte A şi B (fig. 4.27) aflate pe o aceeaşi normală la planul fix. Notînd cu $\bar{r}_A$ şi $\bar{r}_B$ vectorii lor de poziţie faţă de C, vitezele celor două puncte se vor scrie:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{r}_A; \tag{4.197}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{r}_B = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times (\bar{r}_A + \overline{AB}) = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}, \tag{4.198}$$

şi datorită paralelismului vectorilor $\bar{\omega}$ şi $\overline{AB}$ putem scrie:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B. \tag{4.199}$$

Absolut analog se determină şi relaţia dintre acceleraţii:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_c + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_A); \tag{4.200}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_c + \bar{\omega} \times (\bar{r}_A + \overline{AB}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}_A + \overline{AB})] =$$

$$= \bar{a}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) = \bar{a}_A;$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B. \tag{4.201}$$

Deci două puncte ale rigidului aflate pe o aceeaşi normală la planul fix au aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie. Datorită acestei prime proprietăţi a distribuţiilor de viteze şi acceleraţii este suficient să studiem doar vitezele şi

Scanned with OKEN Scanner

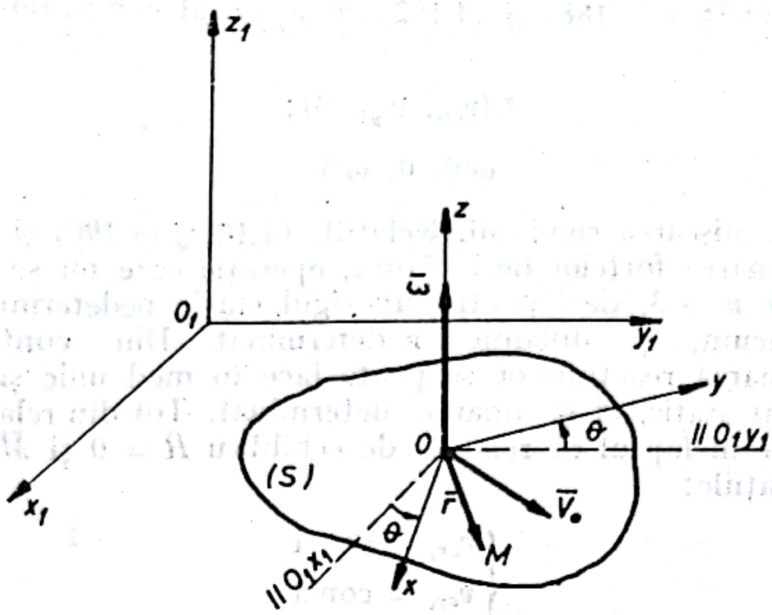


Fig. 4.28

acceleraţiile punctelor unei secţiuni plane a rigidului paralelă cu planul fix, orice punct al rigidului avînd aceeaşi viteză şi acceleraţie cu proiecţia lui pe această secţiune.

Fie (S) secţiunea plană a rigidului a cărei mişcare o studiem. În planul fix în care se mişcă această secţiune vom lua axele O_1x_1 şi O_1y_1 ale unui sistem de referinţă fix (fig. 4.28) şi vom ataşa solidar secţiunii un sistem de referinţă mobil $Oxyz$ cu originea O într-un punct al secţiunii a cărei mişcare o cunoaştem şi cu axa Oz paralelă cu O_1z_1. Mişcarea secţiunii este determinată prin cunoaşterea vitezei $\bar{v}_0$ şi a vitezei unghiulare $\bar{\omega}$:

$$\bar{v}_0(v_{0x},\ v_{0y},\ 0), \tag{4.202}$$

sau:

$$\bar{v}_0(v_{0x_1},\ v_{0y_1},\ 0), \tag{4.203}$$

şi:

$$\bar{\omega}(0,\ 0,\ \omega_z), \tag{4.204}$$

în care:

$$v_{0x_1} = \dot{x}_0 \qquad v_{0y_1} = \dot{y}_0; \tag{4.205}$$

$$\begin{cases} v_{0x_1} = v_{0x}\cos\theta - v_{0y}\sin\theta \\ v_{0y_1} = v_{0x}\sin\theta + v_{0y}\cos\theta \end{cases} \tag{4.206}$$

$$\omega_z = \omega_{z_1} = \dot{\theta}. \tag{4.207}$$

Viteza unui punct M se scrie:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (\bar{r} = \overline{OM}). \tag{4.208}$$

Vom arăta cum că la orice moment t există un punct I al planului mobil Oxy care are viteza momentană nulă (se află în repaus).

Considerînd $M \equiv I$ în relaţia(4.208) vom avea:

$$\bar{v}_I = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = 0 \quad (\bar{r} = \overline{OI}). \tag{4.209}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proiectînd relaţia (4.209) pe axele sistemului mobil şi apoi pe axele sistemului fix se obţin respectiv relaţiile:

$$\begin{cases} v_{ox} - \dot{\theta} y_I = 0 \\ v_{oy} + \dot{\theta} x_I = 0 \end{cases} \tag{4.210}$$

$$\begin{cases} v_{0x_1} - \dot{\theta} r_{y_1} = 0 \\ v_{0y_1} + \dot{\theta} r_{x_1} = 0. \end{cases} \tag{4.211}$$

Cu ajutorul relaţiilor (4.206), (4.210) şi (4.211) putem scrie coordonatele lui I în cele două sisteme:

$$\begin{cases} x_I = -\dfrac{v_{oy}}{\dot{\theta}} \\ y_I = \dfrac{v_{ox}}{\dot{\theta}} \end{cases} \tag{4.212}$$

$$\begin{cases} x_{1I} = x_0 - \dfrac{v_{oy_1}}{\dot{\theta}} = x_0 + x_I \cos\theta - y_I \sin\theta \\ y_{1I} = y_0 + \dfrac{v_{ox_1}}{\dot{\theta}} = y_0 + x_I \sin\theta + y_I \cos\theta. \end{cases} \tag{4.213}$$

Se observă că partea a doua a relaţiilor (4.213) reprezintă formulele geometrice de transformare a coordonatelor la rotaţia şi translaţia axelor.

Punctul I de viteză momentană nulă se numeşte *centru instantaneu de rotaţie*. Relaţiile (4.212) şi (4.213) sînt ecuaţiile parametrice (parametrul fiind de exemplu timpul t) ale locului geometric al punctului I în sistemul mobil şi respectiv în sistemul fix. Primul loc geometric (în sistemul mobil) este o curbă mobilă (4.212) numită *centroidă mobilă sau rostogolitoare*. Al doilea loc geometric (în sistemul fix) este o curbă fixă (4.213) numită *centroidă fixă sau bază*. Se poate arăta uşor că rostogolitoarea se rostogoleşte peste bază fără alunecare, punctul de tangenţă al celor două curbe fiind centrul instantaneu de rotaţie I.

Viteza punctului M:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OM}, \tag{4.214}$$

se poate scrie folosind relaţia:

$$0 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OI} \tag{4.215}$$

pe care o scădem din (4.214), sub forma:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \overline{IM}. \tag{4.216}$$

Relaţia aceasta ne arată că din punctul de vedere al distribuţiei de viteze lucrurile se petrec ca şi cum secţiunea (S) s-ar afla la fiecare moment într-o mişcare de rotaţie (infinitezimală) în jurul centrului instantaneu de rotaţie I. Vitezele a două puncte A şi B, deducem din (4.216) sînt proporţional

Scanned with OKEN Scanner

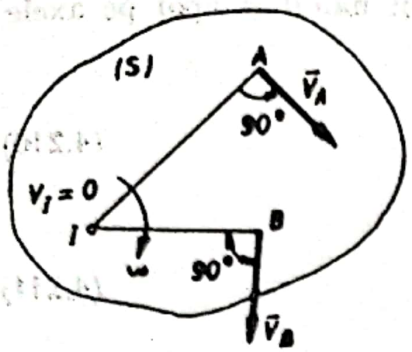


Fig. 4.29

cu razele IA și IB (fig. 4.29) și perpendiculare pe acestea:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega \cdot IA}{\omega \cdot IB} = \frac{IA}{IB}; \tag{4.217}$$

$$\bar{v}_A \perp \overline{IA}; \quad \bar{v}_B \perp \overline{IB}. \tag{4.218}$$

Din aceste relații deducem o metodă grafică extrem de simplă pentru determinarea centrului instantaneu de rotație.

Dacă se cunosc vitezele momentane a două puncte A și B ale secțiunii:

1) dacă aceste viteze nu sînt paralele centrul instantaneu de rotație se află la intersecția perpendicularelor ridicate în A și B pe vitezele respective;

2) dacă aceste viteze sînt paralele atunci cu siguranță dreapta AB este perpendiculară pe direcția comună a vitezelor și centrul instantaneu de rotație se găsește la intersecția dreptei AB cu dreapta care unește extremitățile vectorilor viteză.

Afirmația de la punctul 1) rezultă direct din figura 4.29. Prima afirmație de la punctul 2) se demonstrează astfel:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OA} = \lambda \bar{v}_B = \lambda(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OB}) =$$

$$= \lambda(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times \overline{AB})$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda)\, \bar{v}_A = \lambda \bar{\omega} \times \overline{AB} \Rightarrow \bar{v}_A \cdot \overline{AB} = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \overline{AB} \cdot (\omega \times \overline{AB})$$

$$\Rightarrow \bar{v}_A \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \bar{v}_A \Rightarrow \overline{AB} \perp \bar{v}_B.$$

Afirmația a doua de la punctul 2) rezultă imediat aplicînd relațiile (4.217) și (4.218) figurilor 4.30, *a* și *b*.

Considerînd acum toate punctele rigidului, nu numai cele ale secțiunii (S), vom spune că dreapta perpendiculară în I pe planul secțiunii (S) se numește *axă instantanee de rotație* a rigidului, locul ei geometric în sistemul fix este un cilindru curbiliniu numit *axoidă fixă*, iar locul ei geometric în sistemul mobil este un cilindru curbiliniu mobil numit *axoidă mobilă* care se rostogolește fără alunecare peste axoida fixă, generatoarea comună fiind axa instantanee de rotație.

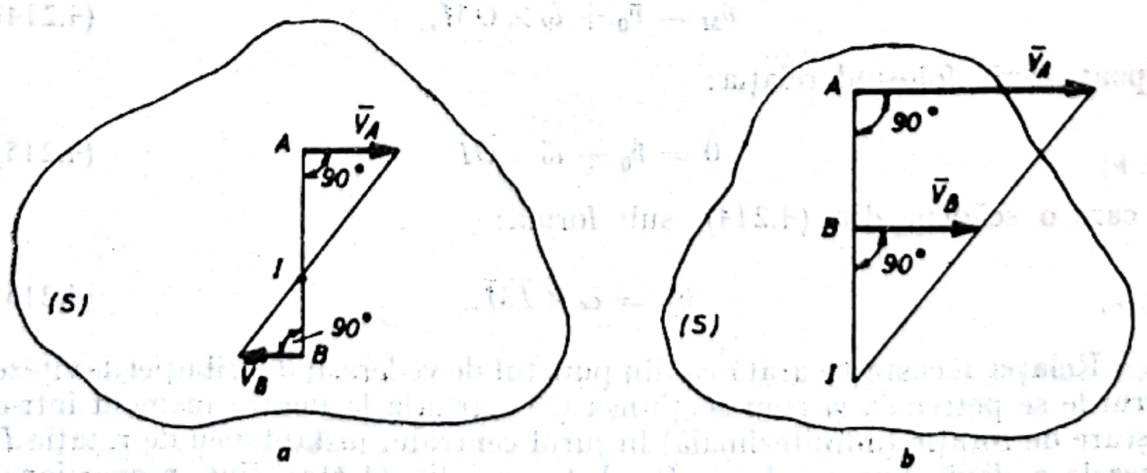


Fig. 4.30

Să revenim acum la secțiunea (S) și să găsim punctul (sau punctele ei) de accelerație nulă. Fie P un astfel de punct. Notînd:

$$\bar{r} = \overline{OP} \quad \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}, \tag{4.219}$$

putem scrie:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = 0 \tag{4.220}$$

sau:

$$\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r} = 0, \tag{4.221}$$

care proiectată pe axele mobile ne dă:

$$\begin{cases} a_{0x} - \varepsilon y_P - \omega^2 x_P = 0 \\ a_{0y} + \varepsilon x_P - \omega^2 y_P = 0, \end{cases} \tag{4.222}$$

din care rezultă:

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{a_{0x}\omega^2 - a_{0y}\varepsilon}{\omega^4 + \varepsilon^2} \\ y_P = \dfrac{a_{0y}\omega^2 + a_{0x}\varepsilon}{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{cases} \tag{4.223}$$

Punctul P de accelerație nulă poartă numele de pol al accelerațiilor. La un moment dat t cele două puncte P și I sînt în general diferite, după cum se poate vedea din compararea relațiilor (4.212) și (4.223).

Accelerația unui punct A se poate scrie:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} - \omega^2 \cdot \overline{OA}. \tag{4.224}$$

Scăzînd din aceasta relația:

$$0 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OP} - \omega^2 \cdot \overline{OP}, \tag{4.225}$$

obținem:

$$\bar{a}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{PA} - \omega^2 \cdot \overline{PA}. \tag{4.226}$$

Relația (4.226) arată că din punctul de vedere al distribuției de accelerații lucrurile se petrec ca și cum secțiunea (S) s-ar afla în fiecare moment într-o mișcare de rotație (infinitezimală) în jurul polului accelerațiilor P.

Cele două componente (normală și tangențială) ale accelerației lui A (fig. 4.31) la rotația în jurul lui P, au respectiv mărimile:

$$\begin{cases} a_{An} = \omega^2 \cdot PA \\ a_{At} = \varepsilon \cdot PA, \end{cases} \tag{4.227}$$

cu care unghiul (ascuțit) dintre accelerația $\bar{a}_A$ și dreapta AP se determină din relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{At}}{a_{An}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \tag{4.228}$$

Scanned with OKEN Scanner

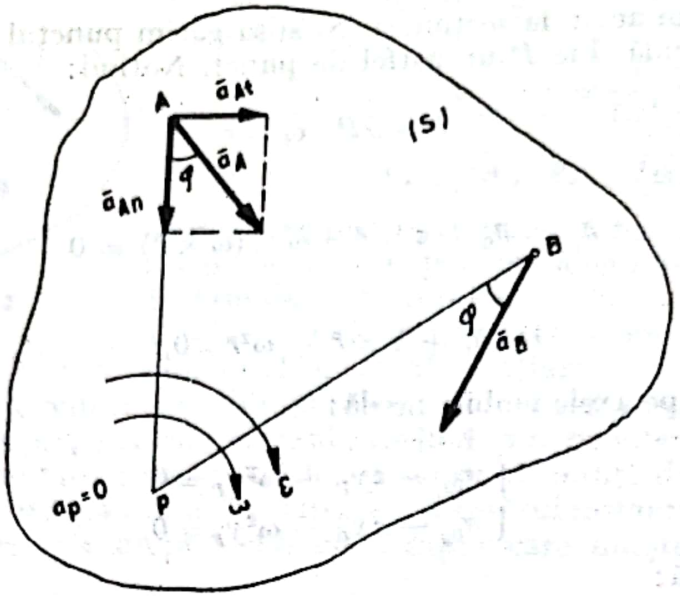


Fig. 4.31

iar acceleraţia lui A are mărimea:

$$a_A = PA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{4.229}$$

Relaţia (4.229) ne spune că acceleraţiile diferitelor puncte ale secţiunii (S) sînt proporţionale cu distanţele la polul acceleraţiilor:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{PA}{PB}. \tag{4.230}$$

Cu ajutorul relaţiei (4.228) avem o metodă simplă de determinare grafică a acestui pol. Cunoscînd acceleraţiile a două puncte A şi B ale secţiunii (S) şi viteza şi acceleraţia unghiulară a acesteia.

1) dacă acceleraţiile nu sînt paralele polul acceleraţiilor P se află la intersecţia dreptelor AP şi BP ce fac unghiul $\varphi = \text{arctg}\ (\varepsilon/\omega^2)$ cu acceleraţiile respective;

2) dacă acceleraţiile sînt paralele atunci cu siguranţă AB face unghiul φ de mai sus cu cele două acceleraţii, iar polul acceleraţiilor P se află la intersecţia dreptei AB cu dreapta care uneşte extremităţile vectorilor acceleraţiei (fig. 4.32).

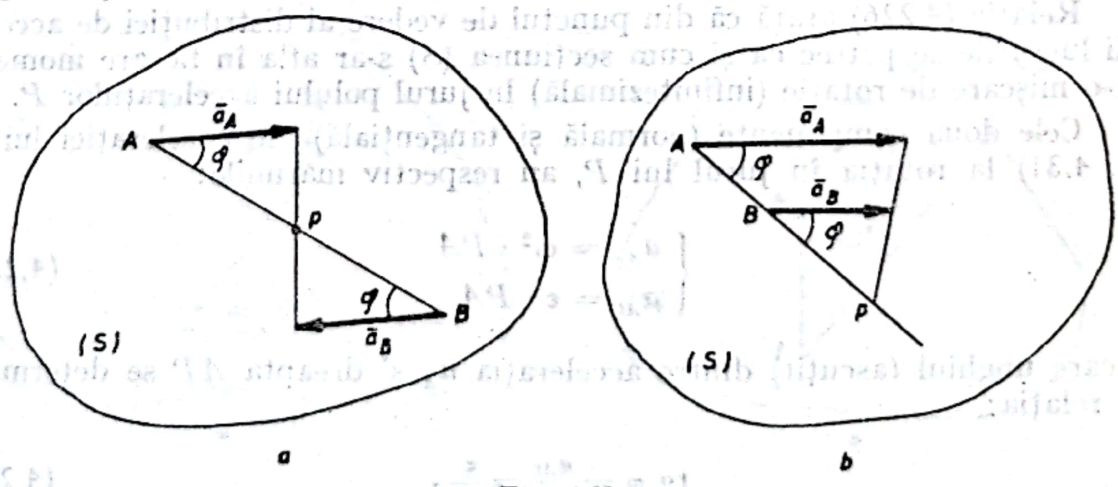


Fig. 4.32

Afirmația de la punctul 1) rezultă direct din figura 4.31. Prima afirmație de la punctul 2) se demonstrează astfel:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} - \omega^2 \cdot \overline{OA} = \lambda \bar{a}_B = \lambda(\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} -$$

$$- \omega^2 \cdot \overline{OB}) = \lambda(\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} - \omega^2 \cdot \overline{OA} + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} -$$

$$- \omega^2 \cdot \overline{AB}) \Rightarrow \bar{a}_A(1 - \lambda) = \lambda(\bar{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega^2 \cdot \overline{AB}) \Rightarrow \bar{a}_A =$$

$$= \mu(\bar{\varepsilon} \times AB - \omega^2 \cdot \overline{AB}).$$

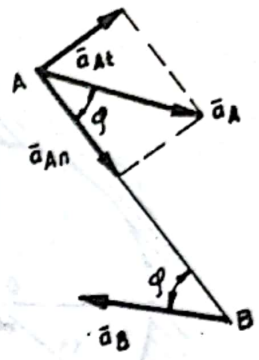


Fig. 4.33

Proiectînd această ultimă relație pe direcția $\overline{AB}$ și pe o direcție perpendiculară pe aceasta (fig. 4.33) obținem:

$$a_{At} = \mu \cdot \varepsilon \cdot AB;$$

$$a_{An} = \mu \cdot \omega^2 \cdot AB,$$

care prin împărțire dau:

$$\frac{a_{At}}{a_{An}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg} \varphi.$$

A doua afirmație de la punctul 2) rezultă aplicînd pentru figurile 4.32, *a* și *b* relația (4.230).

Aceste proprietăți ale distribuțiilor de viteze și accelerații la mișcarea plană constituie punctul de plecare a unei serii întregi de metode grafice și grafo-analitice de determinare a diferitelor viteze și accelerații la mișcarea lanțurilor cinematice plane, metode expuse pe larg în cursurile de teoria mecanismelor.

APLICAȚII

1. Un mecanism planetar este format din coroana dințată în interior de rază $r_1 = 24$ cm, manivela OC care se rotește cu viteza unghiulară $\omega = 5\ s^{-1}$ și roata dințată satelit de rază, $r_2 = 8$ cm, care se poate roti liber în jurul axului C. Să se determine modulul și direcția vitezelor punctelor A, B, D și E dacă $BE \perp AD$, de asemenea și viteza unghiulară ω (fig. 4.34,*a*).

Rezolvare:

Deoarece roata dințată satelit angrenează cu coroana dințată în punctul A, rezultă:

$$v_A = 0.$$

Cunoscînd viteza unghiulară ω a manivelei OC, putem determina viteza V_c a centrului C.

$$v_c = OC \cdot \omega = (r_1 - r_2)\omega;$$

$$v_c = 16 \cdot 5 = 80 \text{ cm/s}.$$

Centrul instantaneu de rotație I coincide cu punctul A (fig. 4.34, *b*.). Razele instantanee ale punctelor B, D și E sînt:

$$IB = IE = r\sqrt{2}.$$

$$ID = 2r.$$

Scanned with OKEN Scanner

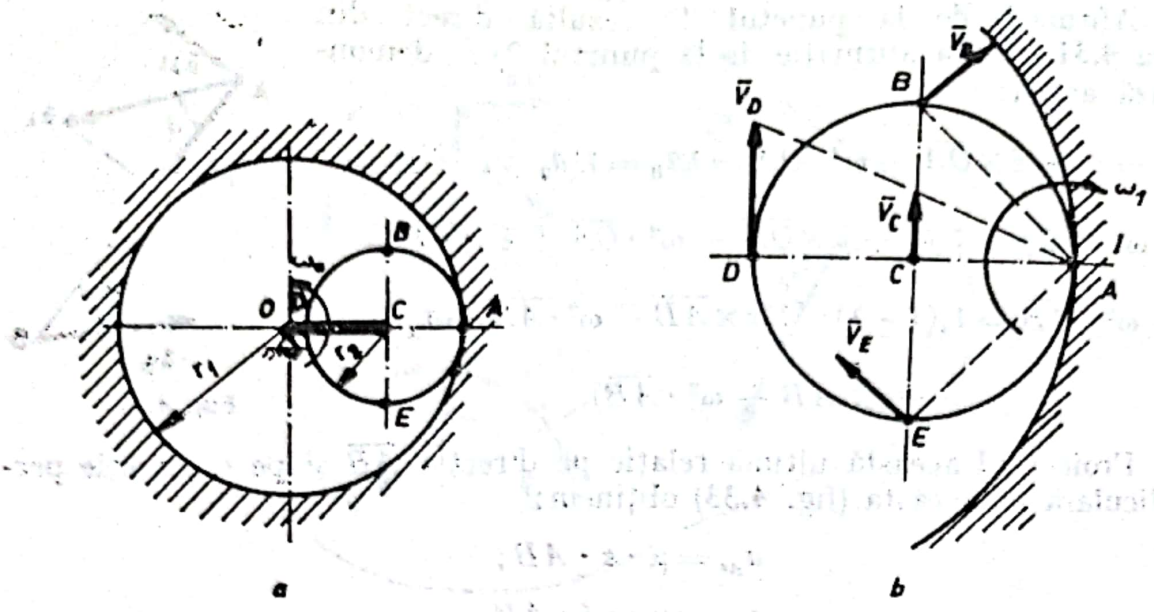


Fig. 4.34

Cunoscînd viteza centrului C al roții dințate satelit și razele instantanee ale punctelor B, D și E, putem determina vitezele respective:

$$v_B = v_c \frac{IB}{IC} = v_c \sqrt{2} = 113{,}12 \text{ cm/s};$$

$$v_D = v_c \frac{ID}{IC} = v_c \cdot 2 = 160 \text{ cm/s};$$

$$v_E = v_c \frac{IE}{IC} = v_c \sqrt{2} = 113{,}12 \text{ cm/s}.$$

Viteza unghiulară ω_1 se determină din relația:

$$v_c = IC \cdot \omega_1,$$

de unde:

$$\omega_1 = \frac{v_c}{IC} = \frac{v_c}{r_2} = \frac{80}{8} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

4.5. MIȘCAREA RELATIVĂ A RIGIDULUI

4.5.1. **Compunerea vitezelor și a accelerațiilor la mișcarea relativă a rigidului.** Fie un rigid căruia îi atașăm solidar un triedru $O_1x_1y_1z_1$ notat cu (T_1), figura 4.35. Fie un triedru mobil $O_2x_2y_2z_2$ notat cu (T_2). Mișcarea rigidului față de triedrul mobil (T_2) se numește mișcare relativă, mișcarea rigidului față de triedrul fix (T_3) se numește mișcare absolută, iar mișcarea rigidului imobilizat față de (T_2), tot față de triedrul fix (T_3) se numește mișcare de transport.

Problema pe care ne-o punem este de a determina viteza absolută și accelerația absolută a unui punct A al rigidului atunci cînd cunoaștem mișcarea relativă și cea de transport a acestuia. Mișcarea relativă a rigidului este determinată prin cunoașterea vitezei relative $\bar{v}_{12}$ a originii O_1 față de triedrul (T_2) și a vitezei unghiulare relative $\bar{\omega}_{12}$ la rotația triedrului (T_1) față de

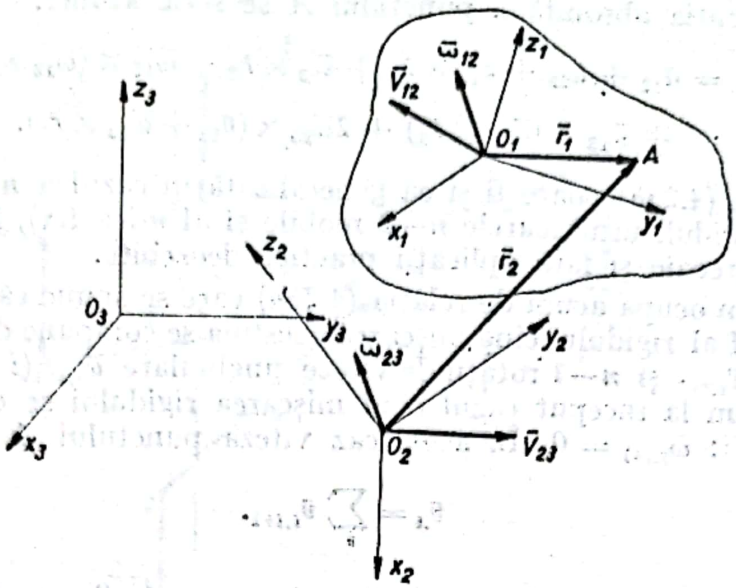


Fig. 4.35

(T_2). Mişcarea de transport este cunoscută atunci cînd se ştie mişcarea triedrului (T_2) faţă de (T_3), deci cînd se cunosc: viteza absolută $\bar{v}_{23}$ şi a originii O_2 faţă de triedrul (T_3) şi viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_{23}$ la rotaţia lui (T_2) faţă de (T_3).

Notînd cu $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ vectorii de poziţie ai lui A faţă de O_1 şi respectiv O_2, putem scrie viteza relativă şi cea de transport a lui A sub formele:

$$\bar{v}_{rA} = \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1; \tag{4.231}$$

$$\bar{v}_{tA} = \bar{v}_{23} + \bar{\omega}_{23} \times \bar{r}_2. \tag{4.232}$$

Viteza absolută a punctului A devine:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{12} + \bar{v}_{23} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{23} \times \bar{r}_2. \tag{4.233}$$

Generalizînd problema prin introducerea în locul lui (T_2) a $(n-2)$ triedre mobile $(T_2), (T_3), \ldots, (T_{n-1})$ şi în locul lui (T_3) un al n-lea triedru fix, fiecare triedru găsindu-se faţă de următorul într-o mişcare determinată de vectorii $\bar{v}_{i,i+1}$, $\bar{\omega}_{i,i+1}$, viteza absolută a lui A se scrie sub forma:

$$\bar{v}_A = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{v}_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_{i,i+1} \times \bar{r}_i, \tag{4.234}$$

vectorii $\bar{r}_i$ fiind vectorii de poziţie ai lui A faţă de originile O_i $(i = 1,2, \ldots, n-1)$.

Notînd cu $\bar{a}_{12}$ acceleraţia relativă a lui O_1 faţă de (T_2), cu $\bar{a}_{23}$ acceleraţia absolută a lui O_2 faţă de (T_3), cu $\bar{\varepsilon}_{12}$ acceleraţia unghiulară relativă la rotaţia lui (T_1) faţă de (T_2) şi cu $\bar{\varepsilon}_{23}$ acceleraţia unghiulară absolută la rotaţia lui (T_2) faţă de (T_3), putem scrie acceleraţia relativă, de transport şi Coriolis a punctului A sub formele:

$$\bar{a}_{rA} = \bar{a}_{12} + \bar{\varepsilon}_{12} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{12} \times (\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1); \tag{4.235}$$

$$\bar{a}_{tA} = \bar{a}_{23} + \bar{\varepsilon}_{23} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{23} \times (\bar{\omega}_{23} \times \bar{r}_2); \tag{4.236}$$

$$\bar{a}_{cA} = 2\bar{\omega}_{23} \times \bar{v}_{rA} = 2\bar{\omega}_{23} \times (\bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1). \tag{4.237}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acceleraţia absolută a punctului A se scrie atunci:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{23} + \bar{\varepsilon}_{12} \times \bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_{23} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{12} \times (\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1) + \\ + \bar{\omega}_{23} \times (\bar{\omega}_{23} \times \bar{r}_2) + 2\bar{\omega}_{23} \times (\bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1). \quad (4.238)$$

Relaţia (4.238) poate fi şi ea generalizată în cazul a n triedre (primul solidar cu rigidul, următoarele $n-2$ mobile şi al n-lea fix), însă relaţia este mult prea greoaie şi fără aplicaţii practice deosebite.

Ne vom ocupa acum de relaţia (4.234) care se spune că exprimă viteza unui punct A al rigidului cînd mişcarea acestuia se compune din $n-1$ translaţii de viteze $\bar{v}_{i,i+1}$ şi $n-1$ rotaţii de viteze unghiulare $\bar{\omega}_{i,i+1} (i = 1,2, .., n-1)$. Să considerăm la început cazul cînd mişcarea rigidului se compune numai din translaţii: $\bar{\omega}_{i,i+1} = 0$. În acest caz viteza punctului A se scrie:

$$\bar{v}_A = \sum_i \bar{v}_{i,i+1}. \quad (4.239)$$

Deci mişcarea rezultantă a mai multor translaţii este tot o translaţie.

Un al doilea caz posibil este cazul cînd mişcarea rigidului se compune numai din rotaţii: $\bar{v}_{i,i+1} = 0$. În acest caz viteza punctului A se scrie:

$$\bar{v}_A = \sum_i \bar{\omega}_{i,i+1} \times \bar{r}_i. \quad (4.240)$$

Vom considera două subcazuri. Primul este cazul compunerii unor rotaţii cu axe concurente. În acest caz toate originile O_i coincid şi deci vor coincide şi toţi vectorii de poziţie: $\bar{r}_i = \bar{r}$.

Relaţia (4.240) se scrie:

$$\bar{v}_A = (\sum_i \bar{\omega}_{i,i+1}) \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (4.241)$$

Deci mişcarea rezultantă a mai multor rotaţii cu axe concurente este tot o rotaţie a cărei viteză unghiulară este:

$$\bar{\omega} = \sum_i \bar{\omega}_{i,i+1}. \quad (4.242)$$

Al doilea subcaz pe care-l vom analiza este acela al compunerii unor rotaţii cu axe paralele. În acest caz relaţia (4.240) devine conform figurii 4.36

$$\bar{v}_A = \sum_i \bar{\omega}_{i,i+1} \times \bar{r}_i = \sum_i \overline{AO}_i \times \bar{\omega}_{i,i+1}. \quad (4.243)$$

Fie P un punct al axei centrale a sistemului de vectori paraleli $\bar{\omega}_{i,i+1}$. Se ştie că momentul rezultant faţă de P este nul, adică:

$$\sum_i \overline{PO}_i \times \bar{\omega}_{i,i+1} = 0. \quad (4.244)$$

Scăzînd relaţia (4.244) din (4.243) obţinem:

$$\bar{v}_A = \sum_i (\overline{AO}_i - \overline{PO}_i) \times \bar{\omega}_{i,i+1} = (\sum_i \bar{\omega}_{i,i+1}) \times \overline{PA} = \bar{\omega} \times \overline{PA}. \quad (4.245)$$

Scanned with OKEN Scanner

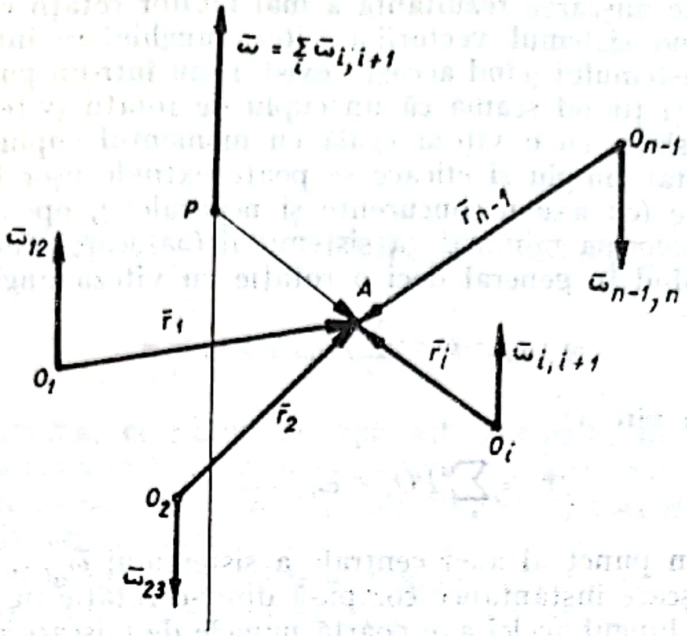


Fig. 4.36

Deci mișcarea rezultantă a mai multor mișcări de rotație cu axe paralele este în general tot o mișcare de rotație, în jurul axei centrale a vectorilor viteze unghiulare, cu o viteză unghiulară:

$$\bar{\omega} = \sum_i \bar{\omega}_{i,i+1}. \tag{4.246}$$

Singura excepție este cazul $\bar{\omega} = 0$, cînd sistemul vectorilor viteze unghiulare nu mai are axă centrală. În acest caz prima expresie din relația (4.243), reprezentînd momentul rezultant față de A al sistemului $\bar{\omega}_{i,i+1}$, este fie nulă, fie egală cu momentul:

$$\bar{M}_c = \overline{AB} \times \bar{\omega}, \tag{4.247}$$

al unui cuplu de rotații $(\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ aplicate în B și în A (fig. 4.37). În cazul cînd momentul rezultant față de punctul A:

$$\bar{M}_A = \sum_i \overline{AO}_i \times \bar{\omega}_{i,i+1} \tag{4.248}$$

este nul, el va rămîne nul în orice alt punct deoarece și rezultanta:

$$\bar{\omega} = \sum_i \bar{\omega}_{i,i+1} \tag{4.249}$$

este nulă. În acest caz viteza oricărui punct al rigidului va fi nulă și rigidul se află în repaus. În cazul cînd sistemul de vectori viteze unghiulare se reduce în A la un cuplu de moment (4.247) urmează că:

$$\bar{v}_A = \overline{AB} \times \bar{\omega} = \bar{\omega} \times \overline{BA}; \tag{4.250}$$

$$\bar{v}_B = \overline{BA} \times (-\bar{\omega}) = \bar{\omega} \times \overline{BA}; \tag{4.251}$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B, \tag{4.252}$$

și mișcarea rezultantă a unui cuplu de rotații este deci o translație cu o viteză egală cu momentul cuplului.

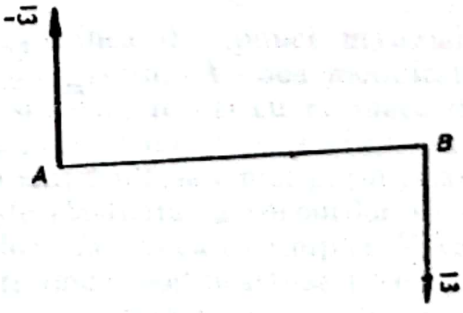


Fig. 4.37

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie mișcarea rezultantă a mai multor rotații cu axe paralele se obține reducînd sistemul vectorilor viteze unghiulare într-un punct al axei centrale a sistemului (cînd aceasta există) sau într-un punct A arbitrar (în caz contrar) și ținînd seama că un cuplu de rotații (viteze unghiulare) înseamnă o translație cu o viteză egală cu momentul cuplului.

Acest rezultat simplu și eficace se poate extinde ușor la compunerea rotațiilor oarecare (cu axe neconcurente și neparalele), operația făcîndu-se prin reducerea la forma minimală a sistemului (oarecare) de vectori viteze unghiulare, obținînd în general deci o rotație cu viteza unghiulară:

$$\bar{\omega} = \sum_i \bar{\omega}_{i,i+1} \tag{4.253}$$

și o translație cu viteza:

$$\bar{v} = \sum_i \overline{PO}_i \times \bar{\omega}_{i,i+1} = \lambda \bar{\omega}, \tag{4.254}$$

în care P este un punct al axei centrale a sistemului $\bar{\omega}_{i,i+1}$.

Această mișcare instantanee compusă dintr-o rotație în jurul unei axe și o translație în lungul acelei axe poartă numele de mișcare instantanee de șurub. Putem afirma deci că din punct de vedere al distribuției de viteze mișcarea unui rigid compusă din mai multe mișcări de rotație este echivalentă cu o succesiune de mișcări instantanee de șurub.

Aceeași afirmație este valabilă și pentru mișcarea generală a unui rigid față de un reper fix, la care distribuția de viteze este dată de relația:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OA}, \tag{4.255}$$

în care vom înlocui translația cu viteza $\bar{v}_0$ printr-un cuplu corespunzător de rotații: $(\bar{\omega}_1, -\bar{\omega}_1)$, găsindu-ne din nou în cazul compunerii unor rotații oarecare: $(\bar{\omega}, \bar{\omega}_1, -\bar{\omega}_1)$. Facem mențiunea că această proprietate poate fi demonstrată și plecînd direct de la (4.255) fără a utiliza mișcarea relativă.

Axa centrală a sistemului de vectori viteză unghiulară, adică axa mișcării instantanee de șurub, se obține înlocuind în oricare dintre ecuațiile axei centrale (1.80) sau (1.81) rezultanta cu $\bar{\omega}$ și momentul rezultant cu $\bar{v}_0$.

Avem deci axa instantanee a mișcării de șurub dată de ecuațiile:

$$\frac{v_{0x} - (y\omega_z - z\omega_y)}{\omega_x} = \frac{v_{0y} - (z\omega_x - x\omega_z)}{\omega_y} = \frac{v_{0z} - (x\omega_y - y\omega_x)}{\omega_z}, \tag{4.256}$$

sau:

$$\frac{x - \frac{1}{\omega^2}(\omega_y v_{0z} - \omega_z v_{0y})}{\omega_z} = \frac{y - \frac{1}{\omega^2}(\omega_z v_{0x} - \omega_x v_{0z})}{\omega_y} =$$

$$= \frac{z - \frac{1}{\omega^2}(\omega_x v_{0y} - \omega_y v_{0x})}{\omega_z}. \tag{4.257}$$

5. SISTEME DE PUNCTE ŞI RIGIDE

5.1. PRINCIPII GENERALE

5.1.1. **Mişcarea, echilibrul şi repausul sistemelor de puncte şi rigide.** În cele ce urmează vom înţelege prin parte a unui sistem de puncte sau rigide orice subsistem al sistemului dat (începînd cu cel mai simplu posibil: un punct, respectiv un rigid).

Vom spune acum că un sistem de puncte sau rigide este în echilibru, respectiv în repaus, dacă şi numai dacă orice parte a sa este în echilibru, respectiv în repaus. Acest adevăr poartă numele de *„principiu al echilibrului părţilor şi al întregului sistem"*. Vom mai spune acum că un sistem de puncte sau rigide este în mişcare dacă şi numai dacă cel puţin o parte a sa este în mişcare.

În concluzie, pentru a studia mişcarea, echilibrul sau repausul unui sistem de puncte sau rigide se izolează din sistem diferitele sale părţi (de cele mai multe ori fiecare punct şi fiecare rigid al sistemului) şi se scriu ecuaţiile de mişcare, echilibru sau repaus pentru fiecare subsistem astfel obţinut.

În studiul unui sistem sau subsistem de puncte sau rigide se poate ivi situaţia în care din anumite motive putem afirma că aceste puncte sau rigide se află în repaus relativ unele faţă de altele. În aceste condiţii (cînd toate vitezele relative ale punctelor sistemului sînt nule) sistemul nostru se comportă ca un rigid (la care de asemenea toate vitezele relative între punctele sale sînt nule). În consecinţă un sistem (sau subsistem) în cadrul căruia toate vitezele relative sînt nule poate fi tratat ca un rigid, aplicîndu-i-se deci ecuaţiile de mişcare, echilibru sau repaus ale rigidului. Această afirmaţie poartă numele de *„principiu al solidificării"*.

5.1.2. **Frecări la contactul între corpuri: frecarea de alunecare, de rostogolire şi de pivotare.** În acest paragraf vom prezenta două modificări pe care le-a făcut Mecanica pentru a-şi apropia cît mai mult „modelele" sale de realitatea obiectivă. Este vorba de „modelele" rigid şi punct material, pe care Mecanica teoretică le defineşte astfel: rigidul este un corp material nedeformabil şi cu dimensiuni finite, iar punctul material este un punct geometric (deci fără dimensiuni), dar cu masă finită.

Prima modificare este renunţarea la noţiunea de „punct material" deoarece în realitate nu există corpuri fără dimensiuni. A doua modificare constă în renunţarea la noţiunea de „rigid" şi înlocuirea ei cu noţiunea de „corp deformabil" deoarece practica demonstrează că nu există nici un corp perfect rigid în realitate, toate corpurile fiind mai mult sau mai puţin „elastice". Modul în care Mecanica clasică foloseşte elasticitatea corpurilor va fi tratat pe larg mai jos. Vom menţiona acum doar faptul că în timp ce Mecanica tehnică (Mecanica în care se aplică aceste două modificări) se preocupă de efectele pe care le are elasticitatea corpurilor asupra mişcării sau echili-

Scanned with OKEN Scanner

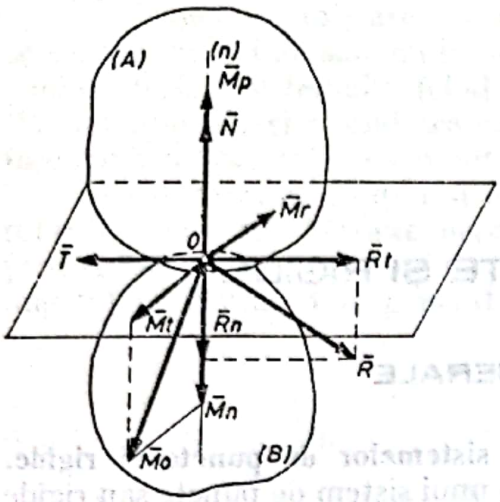


Fig. 5.1

brului acestora, discipline ca Rezistența materialelor sau Teoria elasticității se preocupă de efectele interne pe care le are elasticitatea unui corp (deformații ale corpului, eforturi interioare etc.).

Vom considera acum două corpuri în contact unul cu celălalt (fig. 5.1). Datorită elasticității corpurilor (A) și (B) contactul între ele se stabilește nu într-un punct, ci pe o suprafață finită (mai mare sau mai mică).

Dacă la scară macroscopică putem considera zona de contact ca fiind o suprafață (destul de apropiată de o suprafață plană) a cărei mărime crește odată cu creșterea apăsării reciproce a celor două corpuri, la scară macroscopică putem spune că asperitățile celor două corpuri în zona de contact se întrepătrund și moleculele lor interacționează cu anumite forțe. Această situație ne conduce la afirmația (verificată experimental) că mișcările sau tendințele de mișcare ale corpului (A), corpul studiat, față de (B), considerat aici legătură, vor întîmpina anumite rezistențe. Fie $(\bar{R}, \bar{M}_0)$ torsorul forțelor exterioare ale corpului (A) într-un punct O al suprafeței de contact. Fie (P) planul tangent în O (planul tangent celor două corpuri în ipoteza unui contact punctiform) și fie (n) normala în O la acest plan. Vom descompune $\bar{R}$ și $\bar{M}_0$ după direcția normalei (n) și cîte o direcție din planul tangent (P), obținînd componentele: $\bar{R}_n$, $\bar{R}_t$, $\bar{M}_n$, $\bar{M}_t$. Componenta $\bar{R}_n$ este o forță care caută să deplaseze corpul (A) pe direcția normalei. Ei i se opune o reacțiune $\bar{N}$ egală în mărime și de sens contrar. Această forță de legătură anulează deci componenta $\bar{R}_n$ pînă în momentul distrugerii legăturii (B). Componenta $\bar{R}_t$ caută să producă o alunecare a lui (A) față de (B). Datorită microasperităților și a forțelor intermoleculare această alunecare este în anumite limite împiedicată. Vom ține cont de aceasta prin introducerea unei forțe $\bar{T}$ opusă ca sens lui $\bar{R}_t$ și egală în mărime cu aceasta cît timp $\bar{R}_t$ nu depășește o anumită limită. Cînd $\bar{R}_t$ a depășit această limită forța $\bar{T}$ rămîne la valoarea maximă determinată experimental:

$$T_{max} = \mu N. \tag{5.1}$$

Forța $\bar{T}$ se numește forță de frecare de alunecare, iar μ este coeficientul de frecare de alunecare. Valorile sale se determină experimental.

Componenta $\bar{M}_n$ reprezintă un cuplu de forțe care caută să producă o pivotare a lui (A) față de (B), (rotație în jurul normalei). Datorită microasperităților și a forțelor intermoleculare această mișcare este în anumite limite împiedicată. Vom ține cont de aceasta prin introducerea unui cuplu de moment $\bar{M}_p$ opus ca sens lui $\bar{M}_n$ și egal în mărime cu acesta cît timp $\bar{M}_n$ nu depășește o anumită limită. Cînd $\bar{M}_n$ a trecut peste această limită, momentul $\bar{M}_p$ rămîne la valoarea maximă determinată experimental:

$$M_{p\,max} = KN.$$

Momentul $\bar{M}_p$ se numește moment de frecare de pivotare, iar coeficientul K, determinat experimental, se numește coeficient de frecare de pivotare.

Scanned with OKEN Scanner

Componenta $\overline{M}_t$ reprezintă un cuplu de forțe care caută să producă o rostogolire a lui (A) peste (B) (rotație în jurul suportului său situat în planul tangent). Datorită forțelor intermoleculare și a deformării corpurilor (astfel încît zona de contact este o suprafață) această mișcare este în anumite limite împiedicată. Vom ține cont de acesta prin introducerea unui cuplu de moment $\overline{M}_r$ opus ca sens lui $\overline{M}_t$ și egal cu acesta cît timp $\overline{M}_t$ nu depășește o anumită limită. La depășirea acestei limite de către $\overline{M}_t$ momentul $\overline{M}_r$ rămîne la valoarea maximă determinată experimental:

$$M_r = sN\,. \tag{5.3}$$

Momentul $\overline{M}_r$ se numește moment de frecare de rostogolire, iar coeficientul s, determinat experimental, se numește coeficient de frecare de rostogolire.

Coeficienții experimentali K și s au dimensiunea unor lungimi, iar coeficientul μ este adimensional.

Considerînd că legătura (B) împiedică total deplasarea corpului după normală (considerînd deci legătura indestructibilă și deci forța de legătură $\overline{N}$ oricît de mare), observăm că celelalte trei mișcări posibile ale lui (A), alunecarea, rostogolirea și pivotarea, sînt numai parțial împiedicate prin forța de frecare de alunecare $\overline{T}$, momentul de frecare de rostogolire $\overline{M}_r$ și momentul de frecare de pivotare $\overline{M}_p$. Toate aceste trei rezistențe opuse mișcărilor parțial împiedicate ale lui (A) se numesc frecări.

Vectorii $\overline{N}$, $\overline{T}$, $\overline{M}_r$ și $\overline{M}_p$ sînt forțele și momentele de legătură ce trebuie introduse în O la studiul corpului (A) cînd se ține cont de toate aceste frecări. Cînd una sau mai multe frecări considerăm că pot fi neglijate, vom elimina din schemă forța sau momentul de legătură corespunzător frecării neglijate.

Considerăm acum legătura (B) în repaus și scriind relația valabilă întotdeauna:

$$N = R_n, \tag{5.4}$$

vom constata că atîta timp cît există relațiile:

$$T = R_t < \mu N; \tag{5.5}$$

$$M_r = M_t < sN; \tag{5.6}$$

$$M_p = M_n < KN, \tag{5.7}$$

corpul (A) aflat inițial în repaus își păstrează această stare deoarece torsorul forțelor exterioare și de legătură este nul.

În situația în care avem:

$$T = R_t = \mu N \tag{5.8}$$

sau:

$$M_r = M_t = sN \tag{5.9}$$

sau:

$$M_p = M_n = KN \tag{5.10}$$

corpul se află într-o stare limită, numită în primul caz limita de alunecare, în al doilea caz limita de rostogolire și în al treilea caz limita de pivotare.

Scanned with OKEN Scanner

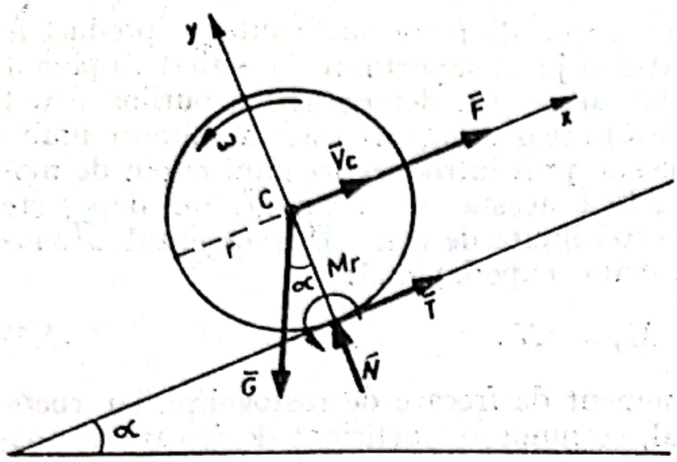


Fig. 5.2

Depășirea acestor limite, adică situația în care avem:

$$T = \mu N < R_t \qquad (5.11)$$

sau:

$$M_r = sN < M_t \qquad (5.12)$$

sau:

$$M_p = KN < M_n \qquad (5.13)$$

conduce la apariția mișcării, în primul caz prin alunecare, în al doilea caz prin rostogolire și în al treilea caz prin pivotare. Depășirea acestor limite se poate face pe rînd sau simultan (cîte două, sau chiar toate trei).

5.1.3. **Mișcarea cu rostogolire și alunecare. Frecarea în lagăre și articulații.** Ca aplicație a celor expuse mai sus vom studia repausul și mișcarea unui cilindru care poate aluneca sau se poate rostogoli pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, cilindrul fiind acționat de propria-i greutate $\bar{G}$ și de o forță $\bar{F}$ de mărime constantă în timp aplicată în centrul maselor C și paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului (fig. 5.2). Frecarea de pivotare nu există întrucît momentul rezultant față de A al forțelor exterioare $\bar{G}$ și $\bar{F}$ se află în planul tangent. Ținînd deci cont de frecarea de alunecare și de cea de rostogolire, sistemul forțelor și momentelor de legătură din punctul A este format de forțele $\bar{N}$ (după axa Cy), $\bar{T}$ (după axa Cx) și momentul $\bar{M}_r$ (după axa Cz). Vom avea întotdeauna: $N_y = N > 0$, $T_x > 0$ la alunecarea în jos, $T_x < 0$ la alunecarea în sus, $M_{rz} < 0$ la rostogolirea în jos și $M_{rz} > 0$ la rostogolirea în sus. Sensurile vectorilor $\bar{F}$, $\bar{T}$ și $\bar{M}_r$ fiind deocamdată neprecizate, ei au fost așezați în figură în sensurile pozitive ale axelor.

Datele problemei sînt forțele $\bar{F}$ și $\bar{G}$, unghiul α, raza r, momentul de inerție J_{zz} al cilindrului față de axa Cz, coeficienții de frecare μ și s și condițiile inițiale pe care le vom considera pentru simplitate nule: $\bar{v}_c(O) = 0$, $\bar{\omega}(O) = 0$. Se cere să se studieze repausul sau mișcarea acestui cilindru. Vom scrie pentru început ecuațiile și condițiile de repaus sub forma:

$$\begin{cases} F_x + T_x - G \sin \alpha = 0 & (5.14) \\ N - G \cos \alpha = 0 & (5.15) \\ M_{rz} + r \cdot T_x = 0 & (5.16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = |T_x| \leqslant \mu N & (5.17) \\ M_r = |M_{rz}| \leqslant sN. & (5.18) \end{cases}$$

Condițiile de repaus se scriu deci:

$$|T_x| = |G \sin \alpha - F_x| \leq \mu G \cos \alpha; \qquad (5.19)$$

$$|M_{rz}| = |F_x - G \sin \alpha| \cdot r \leqslant sG \cos \alpha, \qquad (5.20)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$-\mu G \cos \alpha \leqslant G \sin \alpha - F_x \leqslant \mu G \cos \alpha; \tag{5.21}$$

$$-\frac{s}{r} G \cos \alpha \leqslant F_x - G \sin \alpha \leqslant \frac{s}{r} G \cos \alpha, \tag{5.22}$$

egalitățile încercuite reprezentînd limita de alunecare în jos ($T_x = \mu N > 0$) și respectiv limita de rostogolire în jos ($M_{rz} = -sN < 0$).

Considerînd acuim spre exemplu unghiul α ca un parametru cu valori între 0° și 90°, putem transforma după calcule elementare condițiile de echilibru (5.21) și (5.22) sub formele:

$$\beta - \varphi \leqslant \alpha \leqslant \beta + \varphi; \tag{5.23}$$

$$\delta - \gamma \leqslant \alpha \leqslant \delta + \gamma, \tag{5.24}$$

în care:

$$\beta = \arcsin \frac{F_x}{G\sqrt{1+\mu^2}}; \tag{5.25}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \mu; \tag{5.26}$$

$$\delta = \arcsin \frac{F_x}{G\sqrt{1+\left(\frac{s}{r}\right)^2}}; \tag{5.27}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{s}{r}. \tag{5.28}$$

Plecînd acum de la observația că în practică:

$$\frac{s}{r} < \mu < 1, \tag{5.29}$$

vom putea afirma că:

$$\gamma < \varphi; \tag{5.30}$$

$$\beta < \delta \ (\beta \simeq \delta). \tag{5.31}$$

Considerînd cazul $F_x > 0$ valorile semnificative (limitele de alunecare și de rostogolire) ale lui α pot arăta de exemplu ca în figura 5.3.

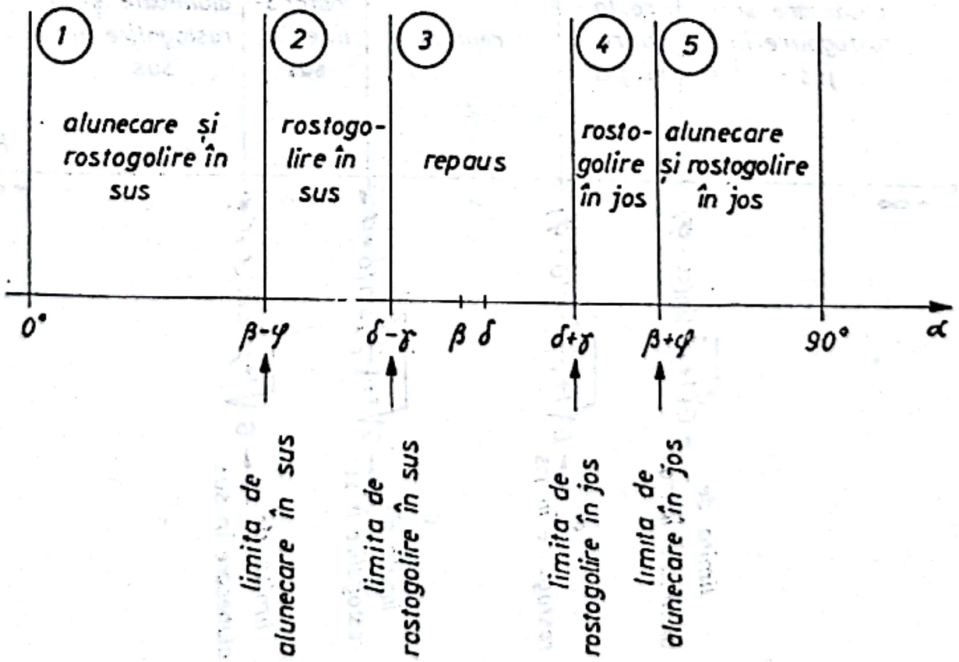


Fig. 5.3

O discuție similară se poate face considerînd pe F_x ca parametru variabil între $-\infty$ și $+\infty$, obținîndu-se în acest caz pentru repaus condițiile:

$$G\sqrt{1+\mu^2}\sin(\alpha-\varphi) \leqslant F_x \leqslant G\sqrt{1+\mu^2}\sin(\alpha+\varphi); \tag{5.32}$$

$$G\sqrt{1+\left(\frac{s}{r}\right)^2}\sin(\alpha-\gamma) \leqslant F_x \leqslant G\sqrt{1+\left(\frac{s}{r}\right)^2}\sin(\alpha+\gamma), \tag{5.33}$$

cu aceleași notații ca mai sus. Ținînd cont de (5.30) putem afirma că valorile semnificative (limitele de alunecare și de rostogolire) ale parametrului F_x arată sigur ca în figura 5.4.

Să studiem acum mișcarea cilindrului nostru atunci cînd parametrii α, respectiv F_x, nu au valori în intervalul corespunzător repausului.

În acest caz teorema mișcării centrului de masă C și teorema momentului cinetic față de acest centru conduc la ecuațiile:

$$\begin{cases} F_x + T_x - G\sin\alpha = \dfrac{G}{g}\dot{v}_{cx} & (5.34) \\ N - G\cos\alpha = 0 & (5.35) \\ M_{rz} + r\cdot T_x = J_{zz}\dot{\omega}_z. & (5.36) \end{cases}$$

Notînd cu $\bar{v}_A$ viteza unui punct A al cilindrului care vine la un moment dat în contact cu planul, cu $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a cilindrului și cu $\bar{v}_c$ viteza centrului său de masă, putem scrie relația:

$$\bar{v}_c = \bar{v}_A + \bar{\omega}\times\overline{AC}, \tag{5.37}$$

care proiectată pe axa Cx conduce la relația:

$$v_{cx} = v_{Ax} - r\omega_z, \tag{5.38}$$

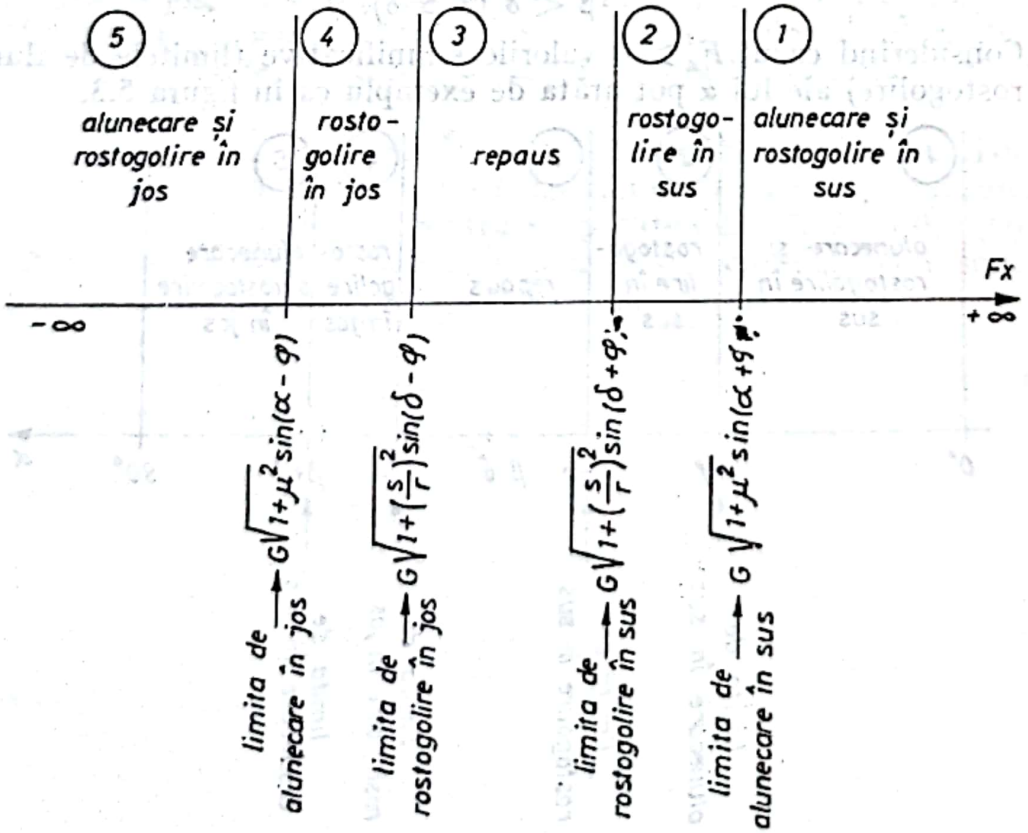


Fig. 5.4

Scanned with OKEN Scanner

și care prin derivare în raport cu timpul ne dă:

$$\dot{v}_{cx} = \dot{v}_{Ax} - r\dot{\omega}_z. \tag{5.39}$$

Relațiile (5.34), (5.35), (5.36) și (5.39) constituie un sistem de patru ecuații cu șase necunoscute: N, T_x, M_{rz}, v_{cx}, ω_z și v_{Ax}. Cele două ecuații care lipsesc pentru a putea determina aceste necunoscute se scriu în fiecare din cele cinci situații posibile din figura 5.3 sau 5.4, după cum urmează:

1) alunecare și rostogolire în sus $\begin{cases} T_x = -\mu N \\ M_{rz} = sN \end{cases}$ (5.40)

2) rostogolire în sus $\begin{cases} M_{rz} = sN \\ v_{Ax} = 0 \end{cases}$ (5.41)

3) repaus $\begin{cases} v_{cx} = 0 \\ \omega_z = 0 \end{cases}$ (5.42)

4) rostogolire în jos $\begin{cases} M_{rz} = -sN \\ v_{Ax} = 0 \end{cases}$ (5.43)

5) alunecare și rostogolire în jos $\begin{cases} T_x = \mu N \\ M_{rz} = -sN. \end{cases}$ (5.44)

Aceste două relații suplimentare permit determinarea în orice situație a tuturor necunoscutelor problemei: forțele și momentele de legătură și proiecțiile v_{cx} și ω_z care caracterizează pe deplin mișcarea. Din relațiile (5.40)—(5.44) deducem faptul că la schimbarea sensului unei mișcări (fie de alunecare, fie de rostogolire) putem pur și simplu să schimbăm coeficienții de frecare μ sau s respectiv în $-\mu$ sau $-s$, operație care, evident, cel mai simplu, o vom face direct în rezultat.

Vom considera acum mișcarea unui corp cilindric (fusul unui arbore de exemplu) într-un lagăr cilindric (legătură numită articulație cilindrică). Fie $\bar{R}$ și $\bar{M}_c$ rezultanta și momentul rezultant al forțelor exterioare ce acționează fusul (fig. 5.5).

Punctul (generatoarea) de contact A între fus și lagăr se deplasează de pe suportul lui $\bar{R}$ datorită prezenței momentului motor $\bar{M}_c$, astfel încît raza CA face un unghi α cu suportul lui R. Cuplul $\bar{M}_c$ produce o mișcare cu viteza unghiulară ω, iar centrul C are viteza nulă: $\bar{v}_c = 0$. Mișcarea fiind cu alunecare și rostogolire putem scrie relațiile:

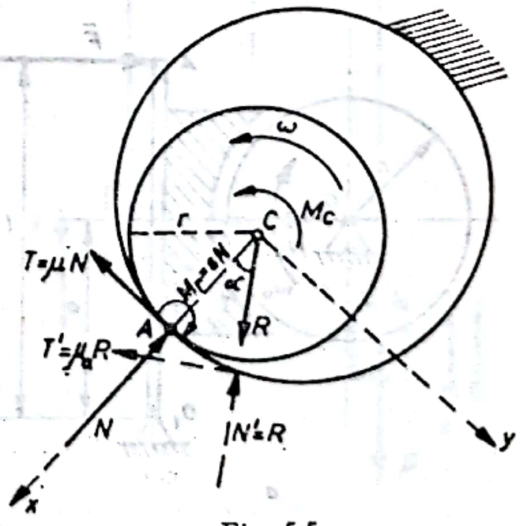


Fig. 5.5

$$\begin{cases} R\cos\alpha - N = mv_{cx} = 0 & (5.45) \\ R\sin\alpha - T = mv_{cy} = 0 & (5.46) \\ M_c - M_r - rT = J_{cz}\dot{\omega} & (5.47) \\ T = \mu N & (5.48) \\ M_r = sN, & (5.49) \end{cases}$$

care este un sistem de cinci ecuații cu necunoscutele: N, T, M_r, α și $\dot{\omega}$. Prin rezolvarea lui obținem:

$$N = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}; \tag{5.50}$$

$$T = \frac{\mu R}{\sqrt{1+\mu^2}}; \tag{5.51}$$

$$M_r = \frac{sR}{\sqrt{1+\mu^2}}; \tag{5.52}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \mu; \tag{5.53}$$

$$\dot{\omega} = \frac{M_c - r \cdot \mu_a \cdot R}{J_{zz}}, \tag{5.54}$$

în care:

$$\mu_a = \frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{5.55}$$

Se observă că ecuația de mișcare (5.54) se poate obține considerînd punctul de contact pe suportul rezultantei R și introducînd în acest punct o reacțiune normală $N' = R$ și o forță de frecare $T' = \mu_a N' = \mu_a R$, ca și cînd am avea doar alunecare, coeficientul de frecare „de alunecare" dat de relația (5.55) numindu-se în acest caz *coeficient de frecare în lagăr* (sau articulație).

APLICAȚII

1. Toba unei instalații de extracție de rază r se rotește cu viteza unghiulară ω_0 în jurul axei O. La un moment dat toba este frînată prin intermediul unui sabot O_1A care este acționat cu o forță F. După t secunde toba se oprește. Să se determine valoarea coeficientului de frecare μ. Momentul de inerție al tobei în raport cu axa de rotație este J_0. Se cunosc de asemenea forța F și dimensiunile a, l și e (fig. 5.6).

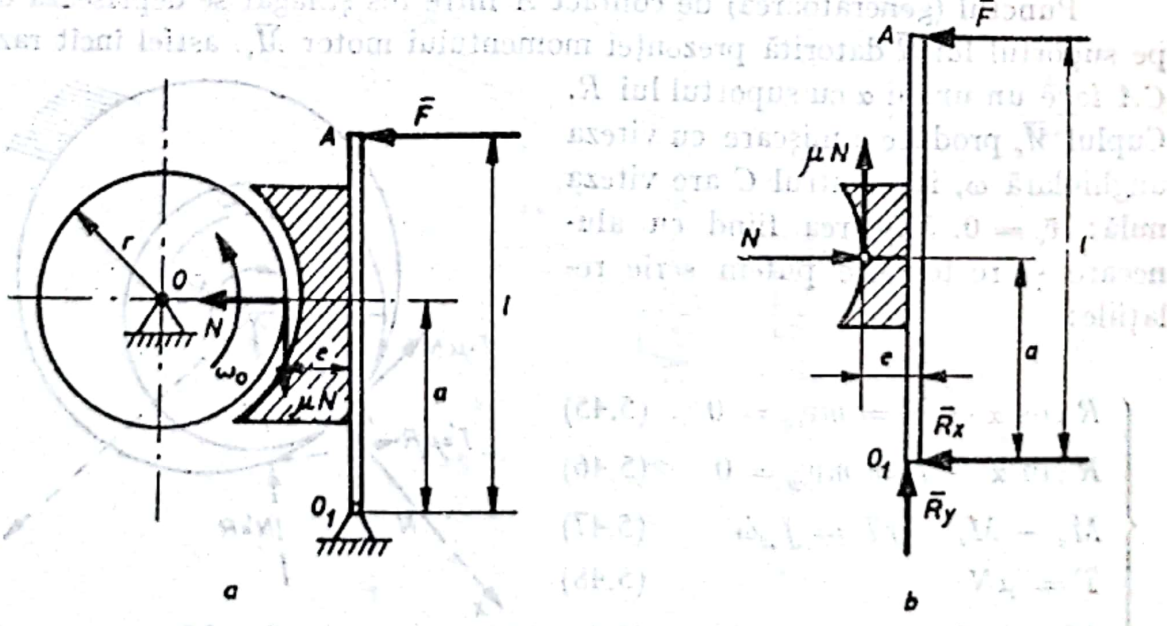


Fig. 5.6

Rezolvare:

Ecuația diferențială a mișcării este:

$$J_0\varepsilon = -\mu N r \qquad \text{sau} \qquad J_0 \frac{d\omega}{dt} = -\mu N r,$$

deci

$$J_0 \int_{\omega_0}^{0} d\omega = -\mu N r \int_0^t dt.$$

Rezultă

$$-J_0\omega_0 = -\mu N r t \qquad \text{sau} \qquad \mu = \frac{J_0\omega_0}{Nrt}.$$

Ecuația de momente în raport cu punctul O_1, la echilibrul sabotului este:

$$\Sigma M_{O_1} = 0: \quad -aN + Fl + \mu N e = 0,$$

deci:

$$N = \frac{Fl}{a - \mu e};$$

$$\mu = \frac{J_0\omega_0}{rt} \cdot \frac{a - \mu e}{Fl}.$$

Rezolvăm ecuația:

$$\mu r t\, Fl = J_0\omega_0(a - \mu e), \qquad \text{de unde rezultă:}$$

$$\mu = \frac{J_0\omega_0 a}{Flrt + J_0\omega_0 e}.$$

2. Se consideră o instalație de extracție cu roată motoare. Pe moleta de antrenare de rază R și greutate G este trecut cablul de extremitățile căruia sînt fixate coliviile, una cu vagonete goale (sarcina totală P) alta cu vagonete pline (sarcina totală Q) ($Q > P$). Cuplul motor al moletei este M (fig. 5.7) Să se determine accelerația coliviilor. Nu se ține seama de frecări și de rezistența aerului.

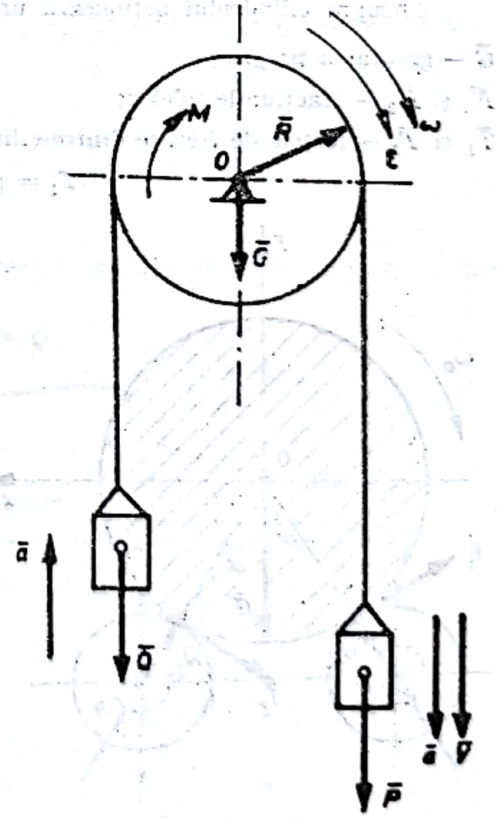


Fig. 5.7

Rezolvare:

Momentul de inerție al roții motoare, considerat ca disc omogen în raport cu centrul său este:

$$J_0 = \frac{GR^2}{2 \cdot g}.$$

Notînd cu v și a, respectiv ω și ε viteza și accelerația cu care se mișcă coliviile și respectiv moleta, rezultă:

$$v = R\omega; \quad a = R\varepsilon.$$

Momentul cinetic al sistemului format din moletă și coliviile de greutate P și Q, în raport cu axa de rotație care trece prin centrul discului este:

$$K = J_0\omega + \frac{P}{g} R^2\omega + \frac{Q}{g} R^2\omega,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$K = \left(\frac{GR^2}{2g} + \frac{PR^2}{g} + \frac{QR^2}{g}\right)\omega;$$

$$K = \frac{(G + 2P + 2Q)\,R^2}{2g}\,\omega.$$

Derivata momentului cinetic în raport cu timpul este:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{(G + 2P + 2Q)\,R^2}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{(G + 2P + 2Q)\,R^2}{2g}\,\varepsilon.$$

Suma momentelor forțelor exterioare în raport cu axa de rotație este:

$$M_0 = M + (P - Q)R.$$

Aplicînd teorema momentului cinetic:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}_0,$$

se obține: $\dfrac{(G + 2P + 2Q)\,R^2}{2g} \cdot \varepsilon = M + (P - Q)\,R,$

de unde: $\varepsilon = \dfrac{2g[M + (P - Q)\,R]}{(G + 2P + 2Q)\,R^2}$ și $a = R\varepsilon = \dfrac{2g[M + (P - Q)\,R]}{(G + 2P + 2Q)\,R}$.

3. Un culbutor de vagonete, considerat ca un cilindru plin de rază r, este așezat pe două role A și B (fig. 5.8). Culbutorul se rotește în jurul axului său O cu viteza unghiulară constantă ω_0. La un moment dat rolele sînt frînate. După cît timp culbutorul se oprește, dacă coeficientul de frecare dintre cilindru și role este μ, iar $\sphericalangle AOB = 2\alpha$?

Rezolvare:

Asupra cilindrului acționează următoarele forțe:

$\bar{G}$ — greutatea proprie;

$\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ — reacțiunile rolelor;

$\bar{T}_1$ și $\bar{T}_2$ — forțele de frecare dintre cilindru și role, a căror mărime se determină cu relațiile:

$$T_1 = \mu N_1 \text{ și } T_2 = \mu N_2.$$

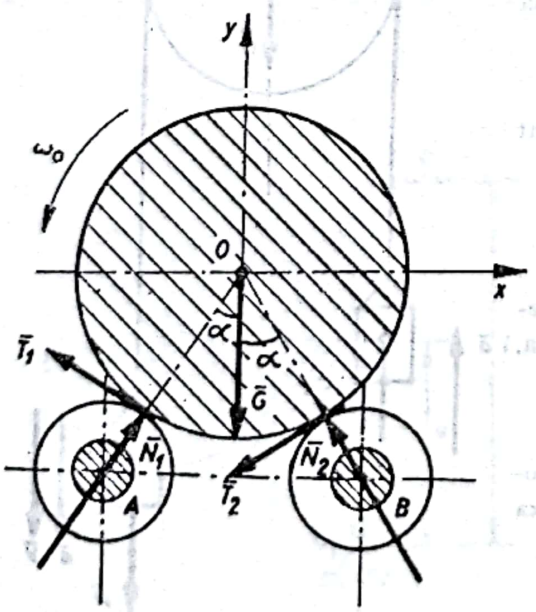


Fig. 5.8

Momentul cinetic al cilindrului în raport cu axa de rotație O este:

$$K = J_0\omega,$$

unde J_0 este momentul de inerție în raport cu axa care trece prin O.

Momentul forțelor exterioare este:

$$\mathcal{M}_0 = -T_1r - T_2r = -\mu r(N_1 + N_2).$$

Aplicînd teorema momentului cinetic avem:

$$J_0\frac{d\omega}{dt} = -\mu r(N_1 + N_2). \qquad (1)$$

Aplicînd teorema mișcării centrului maselor sistemului, obținem ecuațiile diferențiale care caracterizează deplasarea centrului de greutate O al cilindrului:

$$m\ddot{y}_c = -G + (N_1 + N_2)\cos\alpha - T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha;$$

$$m\ddot{x}_c = N_1\sin\alpha - N_2\sin\alpha - T_2\cos\alpha - T_1\cos\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece centrul O este fix, $\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = 0$, deci:

$$(N_1 + N_2) \cos \alpha + \mu(N_1 - N_2) \sin \alpha = G,$$

$$(N_1 - N_2) \sin \alpha - \mu(N_1 + N_2) \cos \alpha = 0.$$

Eliminînd din expresia de mai sus termenul $N_1 - N_2$, obținem:

$$N_1 + N_2 = \frac{G}{(1 + \mu^2) \cos \alpha},$$

și înlocuind în relația (1) avem:

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\mu r G}{(1 + \mu^2) \cos \alpha}. \tag{2}$$

Considerînd culbutorul ca un cilindru plin $J_0 = \frac{G}{g} \cdot \frac{r^2}{2}$ și din relația (2) rezultă:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2g\mu}{(1 + \mu^2) r \cos \alpha} = \text{const.}$$

Integrînd această expresie avem:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{2g\mu}{(1 + \mu^2) r \cos \alpha} t.$$

Deoarece în momentul opririi culbutorului $\omega = 0$ obținem:

$$t_1 = \frac{(1 + \mu^2) r \omega_0 \cos \alpha}{2g\mu}.$$

4. *Deplasarea greutăților pe role.* Pentru deplasarea greutăților mari pe distanțe scurte se folosesc uneori role (fig. 5.9). Greutatea se așază pe o platformă, iar între platformă și sol se așază role.

Notăm cu:

$\bar{Q}$ — greutatea platformei și a corpului de transportat;

$\bar{q}$ — greutatea unei role;

$\bar{F}$ — forța de tracțiune;

$\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3$ — forțele care acționează asupra primei, a doua și respectiv celei de a treia role. În general:

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = Q;$$

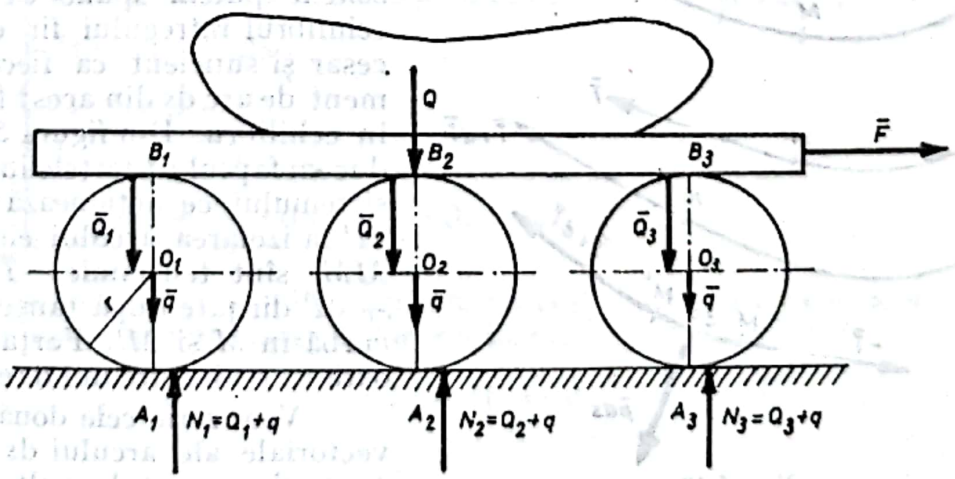


Fig. 5.9

s_1 — coeficientul de frecare de rostogolire dintre platformă și role;

s_2 — idem între role și sol;

r — raza rolelor;

n — numărul de role.

Momentului forței de tracțiune F i se opune momentul de frecare de rostogolire.

Ținînd seama că avem frecare de rostogolire atît în punctele A_1, A_2, A_3 cît și în B_1, B_2, B_3 și că forța de tracțiune este aplicată pe linia B_1, B_2, B_3 expresia lui F se deduce după cum urmează.

Pentru o rolă putem scrie (ex. rola 1):

$$F_1 = \frac{s_1 Q_1}{2r} + \frac{s_2(Q_1 + q)}{2r} = \frac{(s_1 + s_2) Q_1}{2r} + \frac{q s_2}{2r},$$

iar pentru n role avem:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = \frac{(s_1 + s_2)(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n)}{2r} + \frac{q \cdot n \cdot s_2}{2r},$$

dar:

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = Q,$$

deci:

$$F = \frac{(s_1 + s_2) Q}{2r} + \frac{q n s_2}{2r}.$$

Dacă neglijăm greutatea rolelor, putem scrie:

$$F = \frac{(s_1 + s_2) Q}{2r}.$$

5.2. ECHILIBRUL FIRELOR

Numim fir în Mecanica teoretică un sistem continuu unidimensional de puncte materiale care formează un corp flexibil, dar inextensibil. Cu acest model mecanic sînt asimilate cablurile, lanțurile, parîmele etc.

5.2.1. **Ecuațiile generale ale echilibrului firelor suspendate la capete.** Fie un fir suspendat (fixat) la cele două capete ale sale și aflat în echilibru sub acțiunea unui sistem continuu de forțe de densitate liniară $\bar{p}$. Aplicînd principiul echilibrului părților și al întregului sistem putem spune că pentru echilibrul întregului fir este necesar și suficient ca fiecare element de arc ds din acest fir să fie în echilibru. Din figura 5.10 deducem faptul că forțele interioare sistemului ce acționează în M și M' la izolarea arcului elementar MM' sînt tensiunile $-\bar{T}$ și $\bar{T} + d\bar{T}$ dirijate după tangentele la curbă în M și M'. Forța exterioară ce revine arcului ds este $\bar{p}ds$.

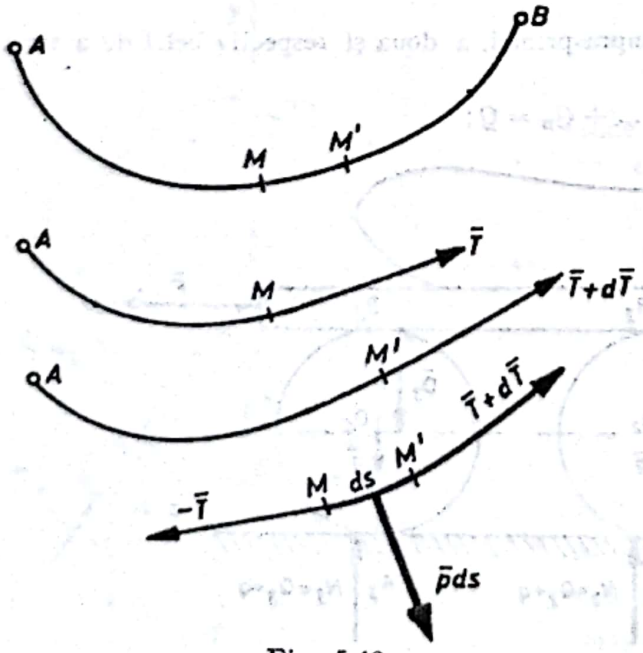


Fig. 5.10

Vom scrie cele două ecuații vectoriale ale arcului ds: rezultanta și momentul rezultant (față

de M' de exemplu) sînt egale cu zero. Vom nota cu M'' punctul de aplicație al forței $\bar{p}\,ds$ și cu $\bar{\tau}$ versorul tangentei în M la curba de echilibru, versor care știm că e coliniar cu vectorul $\overline{M'M}$. Cele două ecuații de echilibru sînt următoarele:

$$-\bar{T} + \bar{T} + d\bar{T} + \bar{p}\,ds = 0;$$

$$\overline{M'M} \times (-\bar{T}) + \overline{M'M''} \times \bar{p}\,ds = 0.$$

Neglijînd ultimul termen al ecuației a doua ca fiind un infinit mic de ordin superior primului termen și notînd $\overline{M'M} = \lambda\bar{\tau}$ cele două ecuații conduc la următoarele relații:

$$d\bar{T} + \bar{p}\,ds = 0; \tag{5.56}$$

$$\bar{\tau} \times \bar{T} = 0. \tag{5.57}$$

A doua relație exprimă faptul că tensiunea în orice punct al firului este orientată pe tangenta la curba de echilibru a firului respectiv. De prima ecuație ne vom ocupa în continuare.

Vom considera cazul cînd densitatea de forță $\bar{p}$ poate fi scrisă sub forma unui gradient:

$$\bar{p} = \operatorname{grad} U. \tag{5.58}$$

Notînd cu $\cos\alpha$, $\cos\beta$ și $\cos\gamma$ cosinușii directori ai tangentei în M la curbă față de axele unui triedru fix $Oxyz$ prin proiectarea relației (5.56) pe axe deducem relațiile:

$$\begin{cases} dT \cdot \cos\alpha + T \cdot d\cos\alpha + \dfrac{\partial U}{\partial x} \cdot ds = 0 \\ dT \cdot \cos\beta + T \cdot d\cos\beta + \dfrac{\partial U}{\partial y} \cdot ds = 0 \\ dT \cdot \cos\gamma + T \cdot d\cos\gamma + \dfrac{\partial U}{\partial z} \cdot ds = 0. \end{cases} \tag{5.59}$$

Ținînd cont de relațiile evidente:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ 2\cos\alpha \cdot d\cos\alpha + 2\cos\beta \cdot d\cos\beta + 2\cos\gamma \cdot d\cos\gamma = 0 \\ ds \cdot \cos\alpha = dx \\ ds \cdot \cos\beta = dy \\ ds \cdot \cos\gamma = dz \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \dfrac{\partial U}{\partial z} \cdot dz = dU \end{cases} \tag{5.60}$$

prin înmulțirea relațiilor (5.59): prima cu $\cos\alpha$, a doua cu $\cos\beta$, a treia cu $\cos\gamma$ și apoi prin însumarea lor obținem:

$$dT + dU = 0 \tag{5.61}$$

sau:

$$T + U = \text{const.} \tag{5.62}$$

Scanned with OKEN Scanner

5.2.2. **Firul omogen greu cu săgeată mare.** Fie un fir suspendat la capete și acționat de un sistem continuu de forțe cu densitate constantă $\bar{p}$, vectorul $\bar{p}$ având direcție fixă. Acesta este în particular și cazul firului omogen acționat de propria-i greutate. Considerînd un sistem de axe fix $Oxyz$ cu axa Oz paralelă cu $\bar{p}$ și proiectînd ecuația de echilibru (5.56) pe aceste axe obținem:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(T\cos\alpha) = \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 & (5.63) \\ \frac{d}{ds}(T\cos\beta) = \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0 & (5.64) \\ \frac{d}{ds}(T\cos\gamma) + p_z = \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + p_z = 0. & (5.65) \end{cases}$$

Din relațiile (5.63) și (5.64) deducem:

$$\begin{cases} T\frac{dx}{ds} = C_1 \\ T\frac{dy}{ds} = C_2, \end{cases} \quad (5.66)$$

din care rezultă:

$$\frac{dy}{dx} = C_3, \quad (5.67)$$

care prin integrare dă:

$$y = C_3x + C_4. \quad (5.68)$$

Deci curba de echilibru a firului este o curbă plană aflată în planul de ecuație (5.68) paralel cu Oz. Alegînd acum axele Ox și Oy ale unui nou sistem în acest plan, cu Oy în sens contrar vectorului $\bar{p}$ (fig. 5.11) și proiectînd din nou ecuația (5.56) pe axele acestui sistem obținem:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0; \quad (5.69)$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p\,ds = 0. \quad (5.70)$$

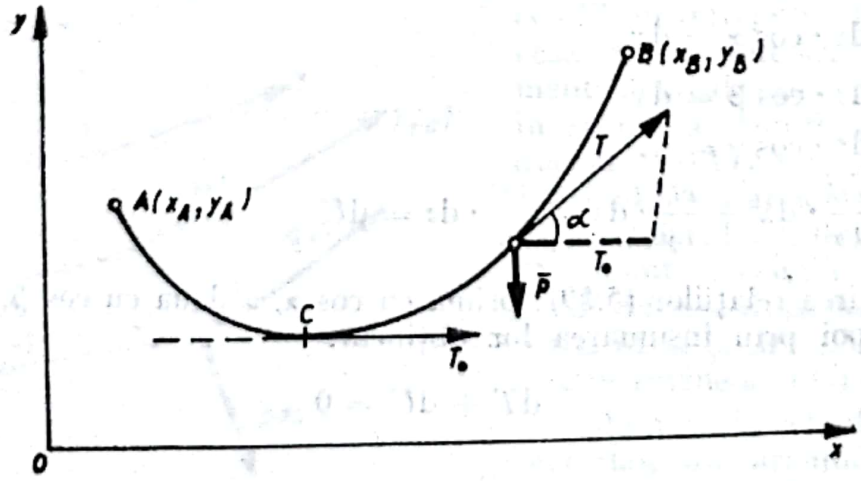


Fig. 5.11

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (5.69) rezultă:

$$T\frac{dx}{ds} = T\cos\alpha = T_0 = \text{const.}, \tag{5.71}$$

cu care relația (5.70) se scrie:

$$d\left(T_0\frac{dy}{dx}\right) = p\,ds. \tag{5.72}$$

Ecuația (5.72) se transformă succesiv:

$$T_0 \cdot dy' = p\sqrt{1+y'^2}\cdot dx; \tag{5.73}$$

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{a}dx, \tag{5.74}$$

în care:

$$a = \frac{T_0}{p}. \tag{5.75}$$

Relația (5.74) se integrează consecutiv sub forma:

$$\operatorname{argsh} y' = \frac{x-x_0}{a}; \tag{5.76}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}\frac{x-x_0}{a}. \tag{5.77}$$

$$y - y_0 = a\operatorname{ch}\cdot\frac{x-x_0}{a}. \tag{5.78}$$

Ecuația (5.78) este curba de echilibru a firului, numită *lănțișor*. Constanta T_0 reprezintă tensiunea din punctul de minim al curbei, iar constanta „a" numită parametrul lănțișorului are dimensiunea unei lungimi și împreună cu constantele de integrare x_0 și y_0 urmează a fi determinată. Pentru aceasta avem la îndemînă spre exemplu următoarele ecuații:

$$\begin{cases} y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \\ \int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\,dx = L, \end{cases} \tag{5.79}$$

a căror semnificație este evidentă.

Pentru a simplifica lucrurile vom considera că raportăm curba la un sistem de axe în care: axa Oy trece prin punctul de minim C al curbei și are sens contrar lui $\bar{p}$ și axa Ox se află în planul curbei, astfel ca $y_c = a$ (fig. 5.12). Impunînd condițiile:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = a \end{cases} \tag{5.80}$$

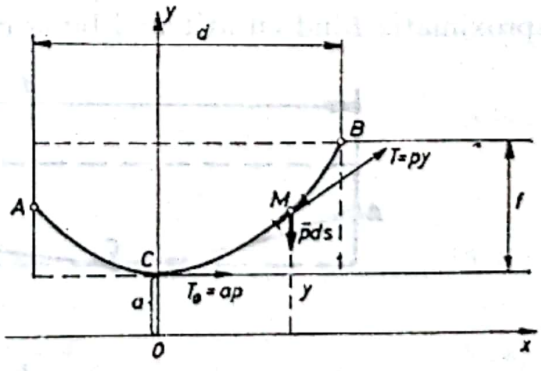


Fig. 5.12

ecuației (5.78), obținem:

$$x_0 = y_0 = 0 \tag{5.81}$$

și deci ecuația lănțișorului devine:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \tag{5.82}$$

în care rămîne de determinat doar parametrul a.

Pentru a determina repartiția tensiunilor în diferitele puncte ale firului vom observa că vectorul $\bar{p}$ se poate scrie în cazul nostru sub forma (5.58) și anume:

$$\bar{p} = -p\bar{j} = \operatorname{grad}(-py). \tag{5.83}$$

Funcția U este deci:

$$U = -py \tag{5.84}$$

și relația (5.62) se scrie:

$$T - py = K. \tag{5.85}$$

Pentru determinarea constantei K aplicăm relația (5.85) în punctul C.

$$K = T_0 - pa = 0; \tag{5.86}$$

și deci putem scrie relația (5.85) sub forma:

$$T = py \tag{5.87}$$

care ne arată că tensiunile cele mai mari apar în punctele cele mai înalte ale firului.

Vom numi *săgeată „f"* și *deschidere „d"* ale unui fir dimensiunile minime ale unui dreptunghi care încadrează firul și are laturile paralele cu axele (orizontală și verticală). Vom spune că un fir are săgeată mare cînd raportul f/d este cel puțin de ordinul zecimilor, iar în cazul cînd acest raport este cel mult de ordinul sutimilor vom spune că firul este cu săgeată mică.

Ecuațiile (5.82) și (5.87) rezolvă în principiu orice problemă de echilibru al firelor omogene suspendate la capete, fie ele cu săgeată mare sau mică. Ele însă vor fi aplicate numai în cazul firelor cu săgeată mare deoarece pentru firele cu săgeată mică vom obține în paragraful următor ecuații aproximative (însă suficient de exacte) mai simple decît cele de față din punct de vedere al calculelor care le implică.

5.2.3. **Firul omogen greu cu săgeată mică și firul cu sarcină distribuită uniform pe orizontală.** La un fir cu săgeată mică (fig. 5.13) putem scrie în orice punct al său relația:

$$ds \simeq dx, \tag{5.88}$$

aproximația fiind cu atît mai bună cu cît raportul f/d este mai mic.

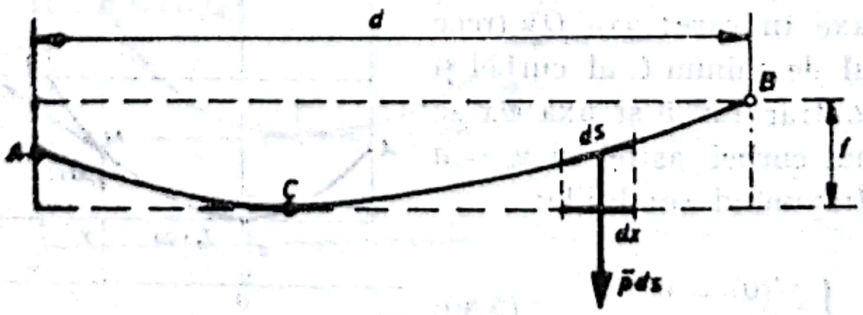


Fig. 5.13

În acest caz ecuațiile (5.69) și (5.70) se aproximează prin:

$$T = T_0 = \text{const.}; \quad (5.89)$$

$$\mathrm{d}\left(T_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \bar{p}\,\mathrm{d}x. \quad (5.90)$$

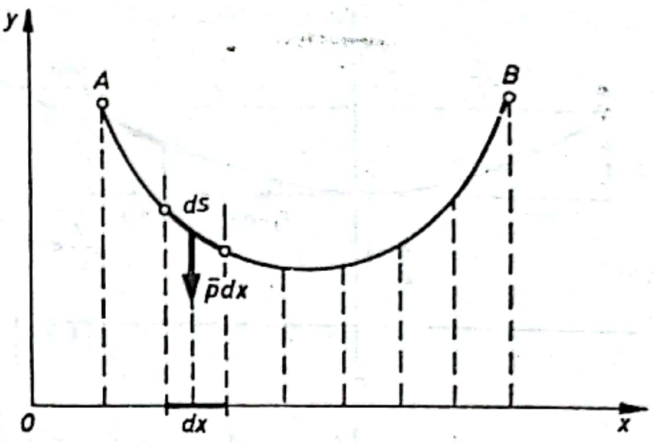


Fig. 5.14

Vom considera acum cazul unui fir cu săgeată mare la care sarcina se distribuie uniform pe orizontală, adică elementului de arc ds îi revine o forță $\bar{p}\,\mathrm{d}x$ (fig. 5.14). Acesta este de exemplu cazul cablurilor de rezistență de la podurile suspendate care sînt acționate prin intermediul tiranților verticali echidistanți de un sistem de forțe asimilabil cu un sistem continuu de forțe distribuite uniform pe orizontală, întrucît fiecărui tirant îi revine greutatea unei aceleiași lungimi de pod (greutatea proprie a cablului este infimă în comparație cu greutatea podului). În figura 5.14 tiranții sînt reprezentați prin liniile echidistante întrerupte.

În acest caz relația (5.56) se transformă în:

$$\mathrm{d}\bar{T} + \bar{p}\,\mathrm{d}x = 0, \quad (5.91)$$

care prin proiectare pe axele Ox și Oy din figura (5.15) conduce la:

$$\mathrm{d}\left(T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0 \quad (5.92)$$

$$\mathrm{d}\left(T \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) - p\,\mathrm{d}x = 0. \quad (5.93)$$

Din relația (5.92) rezultă:

$$T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T \cos\alpha = T_0 = \text{const.}; \quad (5.94)$$

cu care relația (5.93) se scrie:

$$\mathrm{d}\left(T_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = p\,\mathrm{d}x, \quad (5.95)$$

relație identică cu (5.90).

Cu notația (5.75) relația (5.95) se scrie:

$$\mathrm{d}y' = \frac{\mathrm{d}x}{a}, \quad (5.96)$$

care se integrează sub forma:

$$y' = \frac{x}{a} + C_1; \quad (5.97)$$

$$y = \frac{x^2}{2a} + C_1 x + C_2. \quad (5.98)$$

Scanned with OKEN Scanner

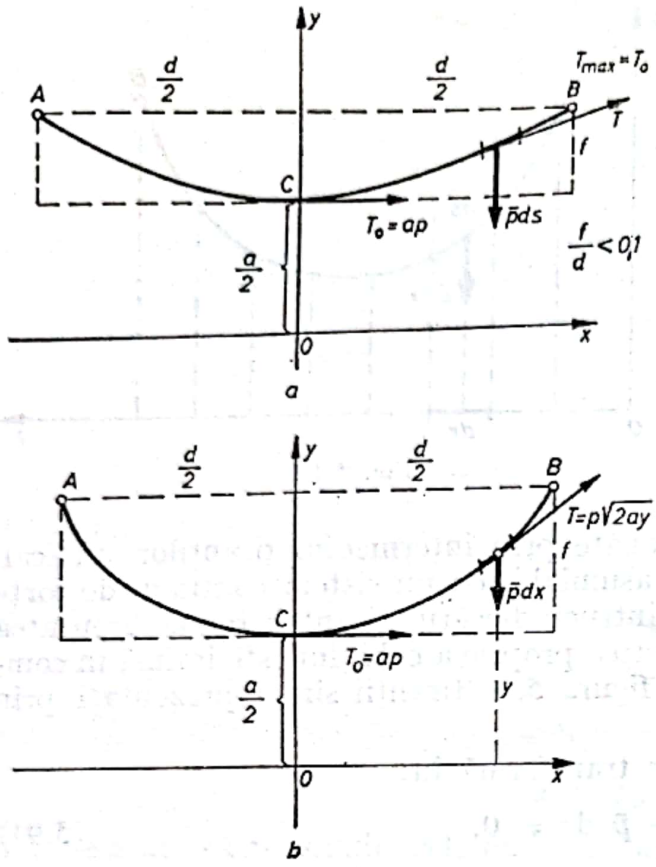


Fig. 5.15

Alegînd acum un sistem de axe (fig. 5.15) cu Oy trecînd prin punctul de minim C şi cu Ox la distanţa $a/2$ sub acest punct condiţiile:

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{a}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{5.99}$$

aplicate în relaţiile (5.97) şi (5.98) conduc la:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{a}{2} \end{cases} \tag{5.100}$$

şi deci ecuaţia de echilibru a celor două fire este parabola:

$$y = \frac{x^2 + a^2}{2a}. \tag{5.101}$$

Din punct de vedere al repartiţiei tensiunilor, pentru firul cu săgeată mică (fig. 5.15, *a*) relaţia (5.89) ne arată că tensiunea este aproximativ aceeaşi în toate punctele firului, pe cînd la firul cu sarcina distribuită uniform pe orizontală relaţia (5.94) se scrie succesiv cu ajutorul ecuaţiei (5.101):

$$T \frac{dx}{\sqrt{1 + y'^2} \cdot dx} = T_0 = ap;$$

$$T = ap\sqrt{1 + y'^2} = ap\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = p\sqrt{x^2 + a^2},$$

$$T = p\sqrt{2ay}. \tag{5.102}$$

În cazul firelor care au punctele de suspendare A şi B la aceeaşi înălţime (fig. 5.15) parametrul a se determina în funcţie de săgeată şi deschidere scriind că punctul $B\left(\frac{d}{2}, \frac{a}{2} + f\right)$ se află pe curba (5.101):

$$\frac{a}{2} + f = \frac{a}{2} + \frac{d^2}{8a};$$

$$a = \frac{d^2}{8f}. \tag{5.103}$$

Cu aceasta tensiunea minimă în cazul ambelor fire se scrie:

$$T_0 = \frac{pd^2}{8f}. \tag{5.104}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea maximă în cazul primului fir se poate calcula sub forma:

$$T_A = T_B = \frac{T_0}{\cos\alpha} = T_0\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = T_0\sqrt{1+y'^2(x_B)} = T_0\sqrt{1+\frac{d^2}{4a^2}};$$

$$T_A = T_B = T_0\sqrt{1+16\frac{f^2}{d^2}} \simeq T_0 \qquad (f/d \leqslant 0{,}1), \tag{5.105}$$

iar în cazul celui de-al doilea:

$$T_A = T_B = p\sqrt{2ay_B} = p\sqrt{2a\left(\frac{a}{2}+f\right)} = p\sqrt{a^2+2af} =$$

$$= ap\sqrt{1+\frac{2f}{a}} = T_0\sqrt{1+\frac{2f\cdot 8f}{d^2}};$$

$$T_A = T_B = T_0\sqrt{1+16\frac{f^2}{d^2}} > T_0 \qquad (f/d > 0{,}1). \tag{5.106}$$

În rezumat, firul cu săgeată mică are ecuația aproximativă a curbei de echilibru identică cu ecuația de echilibru (5.101) a firului cu sarcină distribuită pe orizontală. Dar în timp ce la primul fir tensiunea rămîne aproximativ constantă pe toată lungimea lui, la cel de-al doilea tensiunea se schimbă după legea (5.102).

Mai menționăm faptul că în cazul firului cu săgeată mică din figura 5.15, *a* lungimea firului se poate calcula cu formula aproximativă:

$$L_{AB} = d\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{d^2}\right), \tag{5.107}$$

obținută prin aproximarea radicalului:

$$\sqrt{1+y'^2} = \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{8}\frac{x^4}{a^4}+\ldots, \tag{5.108}$$

prin primii doi termeni ai dezvoltării sale polinomiale (5.108).

Pentru a obține o formulă suficient de exactă pentru lungimea firului din figura 5.15, *b*, considerînd că avem totuși $f/d < 1$, vom lua primii trei termeni din seria (5.108) și vom obține formula aproximativă:

$$L_{AB} = d\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{d^2}-\frac{32}{5}\frac{f^4}{d^4}\right). \tag{5.109}$$

5.2.4. **Echilibrul firelor acționate de forțe concentrate.** În acest paragraf vom studia echilibrul firelor acționate de un sistem discret de forțe coplanare în ipoteza că forțele continui (cum ar fi greutatea proprie) se neglijează. Curba de echilibru a unui astfel de fir se vede ușor că este un poligon funicular*. Mai exact din tripla infinitate de poligoane funiculare ce se pot construi prin alegerea diferită a polului O pentru poligonul forțelor și a primului punct A_0 al poligonului funicular (fig. 5.16, *a*) poligonul căutat este acela care satisface următoarele trei condiții: are primul punct A_0 în punctul de suspensie A, are ultimul punct A_n în punctul de suspensie B și are lungimea egală cu lungimea firului. Problema găsirii acestui poligon este în general dificilă, dar odată rezolvată, problema determinării tensiunilor în cele n ramuri drepte

* a se revedea paragraful (1.1.18).

Scanned with OKEN Scanner

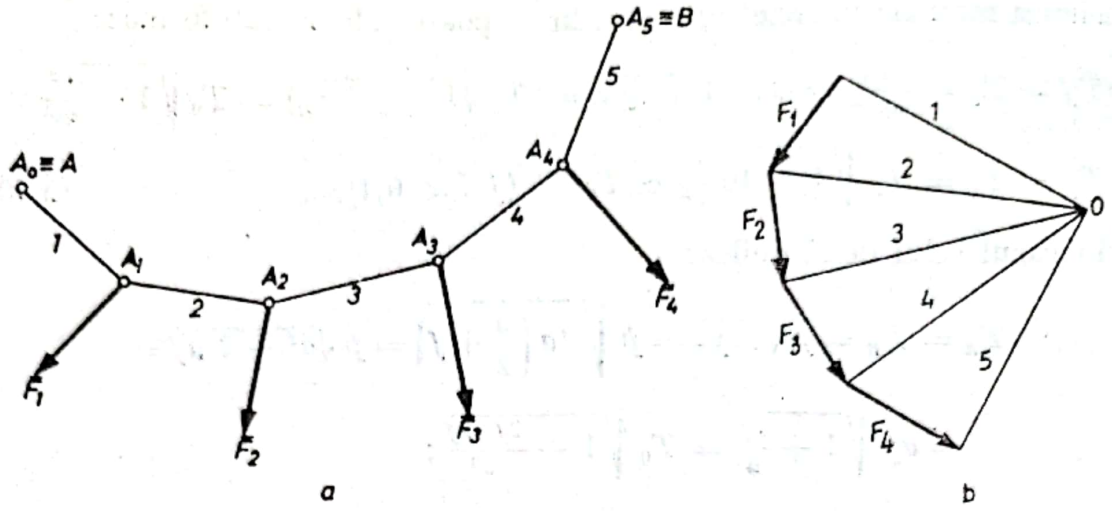


Fig. 5.16

ale firului este rezolvată și ea, aceste tensiuni avînd mărimile egale cu lungimile razelor vectoare 1,2,3,... din poligonul forțelor (fig. 5.16, *b*).

5.2.5. **Echilibrul cu frecare al firelor.** În cele ce urmează vom studia echilibrul cu frecare al unui fir înfășurat după un arc de cerc de unghi la centru egal cu α, pe o suprafață de rotație, cunoscînd și coeficientul de frecare de alunecare μ între fir și suprafață. Echilibru cu frecare al unui fir pe o suprafață oarecare nu se poate rezolva analitic în cazul general.

Considerînd firul din figura 5.17 la limita alunecării de la A spre B și izolînd un element de arc ds din acest fir, această parte a sistemului în echilibru va fi acționată de forțele specificate în figura 5.18.

Proiectînd cele patru forțe din figură pe axele Cx și Cy vom scrie ecuațiile de echilibru ale elementului de arc ds sub forma:

$$\begin{cases} -T \cdot \cos\dfrac{d\theta}{2} + (T + dT) \cdot \cos\dfrac{d\theta}{2} - \mu \cdot dN = 0 & (5.110) \\ -T \cdot \sin\dfrac{d\theta}{2} - (T + dT) \cdot \sin\dfrac{d\theta}{2} + dN = 0. & (5.111) \end{cases}$$

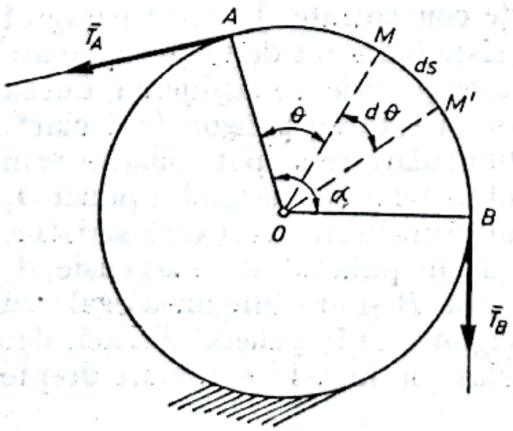


Fig. 5.17

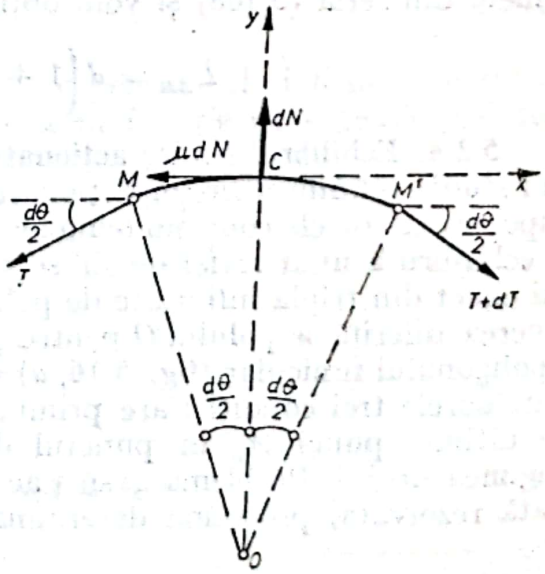


Fig. 5.18

Făcînd înlocuirile:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{d\theta}{2} \to 1 \\ \sin\dfrac{d\theta}{2} \to \dfrac{d\theta}{2} \end{cases} \tag{5.112}$$

și neglijînd infiniții mici de ordin superior, relațiile (5.110) și (5.111) devin:

$$\begin{cases} dT - \mu \cdot dN = 0 & (5.113) \\ -T\,d\theta + dN = 0 & (5.114) \end{cases}$$

din care, prin eliminarea reacțiunii dN, obținem:

$$dT = \mu T\,d\theta. \tag{5.115}$$

Prin integrarea acestei relații obținem:

$$\ln\frac{T}{C} = \mu\theta \tag{5.116}$$

sau:

$$T = C\,e^{\mu\theta}. \tag{5.117}$$

Aplicînd relația (5.117) în punctele A și B avem:

$$T_A = C\,e^0 = C; \tag{5.118}$$

$$T_B = C\,e^{\mu\alpha} = T_A e^{\mu\alpha}. \tag{5.119}$$

Pentru ca firul să nu alunece de la A spre B trebuie ca:

$$T_B \leqslant T_A\,e^{\mu\alpha}. \tag{5.120}$$

Ecuația corespunzătoare limitei de alunecare de la B spre A se obține din relația (5.119) prin înlocuirea lui μ cu $-\mu$ și deci ea este:

$$T_A = T_B\,e^{\mu\alpha}. \tag{5.121}$$

Pentru ca firul să nu alunece de la B spre A trebuie ca:

$$T_A \leqslant T_B\,e^{\mu\alpha}. \tag{5.122}$$

Combinînd relațiile (5.120) și (5.122) putem scrie condițiile de nealunecare ale firului sub forma:

$$e^{-\mu\alpha} \leqslant \frac{T_B}{T_A} \leqslant e^{\mu\alpha}. \tag{5.123}$$

Relația (5.119) sau (5.121) se numește în Mecanică *ecuația lui Euler* referitoare la frecarea firelor.

Scanned with OKEN Scanner

APLICAȚII

1. Un fir omogen și perfect flexibil este fixat în (B) și de capătul celălalt, după ce firul este trecut după un scripete mic (A), atîrnă o greutate (G), (fig. 5.19). Cunoscînd h, d, p și G să se determine parametrul a al lănțișorului.

Rezolvare:

Notînd cu x_0 și y_0 coordonatele punctului A, se poate scrie relația:

$$G = T = py_0 = pa \operatorname{ch} \frac{x_0}{a}. \tag{1}$$

Punînd condiția ca firul să treacă prin punctul B de coordonate $(x_0 + d,\ y_0 + h)$, rezultă:

$$y_0 + h = a \operatorname{ch} \frac{x_0 + d}{a} = a\left(\operatorname{ch} \frac{d}{a} \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} + \operatorname{sh} \frac{d}{a} \operatorname{sh} \frac{x_0}{a}\right).$$

Ținînd seama de relația (1) se obține ecuația transcendentă care dă valoarea parametrului a:

$$\frac{G}{p} + h = \frac{G}{p} \operatorname{ch} \frac{d}{a} + \sqrt{\frac{G^2}{p^2} - a^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{d}{a}.$$

2. Un fir greu omogen de lungime L este suspendat în două puncte A și B care au diferența de nivel h. Unghiurile dintre tangentele la fir duse în aceste puncte și verticală sînt egale cu α și β. Să se afle diferența de nivel a punctelor A și B (fig. 5.20).

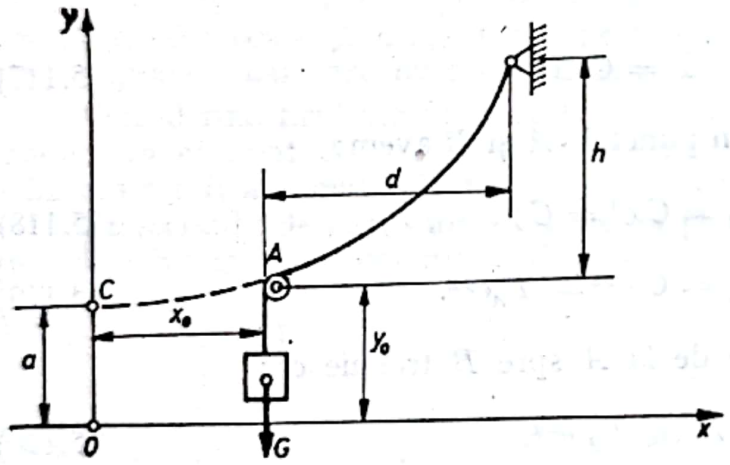


Fig. 5.19

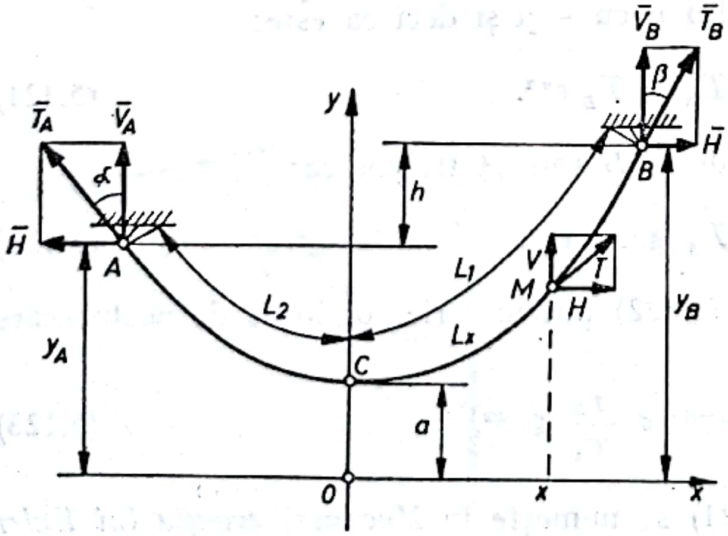


Fig. 5.20

Rezolvare:

Tensiunile din punctele A și B se pot exprima astfel:

$$T_B = py_B;\ T_A = py_A.$$

Dacă le scădem obținem:

$$T_B - T_A = p(y_B - y_A) = ph.$$

Notînd cu L_1 și L_2 lungimile firului de la C pînă la B, respectiv A, și cu L_x lungimea de fir între C și M, putem scrie:

$$V = H \operatorname{sh} \frac{x}{a} = ap \operatorname{sh} \frac{x}{a} = pL_x,$$

deci:

$$V_B = pL_1 \text{ și } V_A = pL_2.$$

Însumînd cele două componente verticale avem:

$$V_B + V_A = p(L_1 + L_2) = pL,$$

însă:

$$V_B = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} \text{ și } V_A = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Înlocuim și rezultă:

$$H\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}\right) = p \cdot L$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$H \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = pL. \tag{1}$$

Dacă în relația $T_B - T_A = ph$ înlocuim tensiunile în funcție de H, obținem:

$$\frac{H}{\sin \beta} - \frac{H}{\sin \alpha} = ph \text{ sau } \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} H = ph$$

și încă:

$$\frac{2H \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = ph. \tag{2}$$

Din relația (1) scoatem: $\sin \alpha \sin \beta = \frac{H \cdot \sin(\alpha + \beta)}{pL}$ și înlocuind în relația (2), obținem:

$$\frac{2H \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{H \frac{\sin(\alpha + \beta)}{pL}} = ph.$$

Înlocuind $\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ și simplificînd, obținem:

$$h = L \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

5.3 GRINZI CU ZĂBRELE

5.3.1. **Generalități.** Se numește grindă cu zăbrele plană un sistem plan rigid de bare drepte unite la capete prin articulații plane și acționat de forțe coplanare. Pot fi asimilate cu acest model o serie de elemente constitutive ale multor construcții, cum ar fi: turnuri, schele, poduri, macarale, stîlpi de înaltă tensiune etc., deși îmbinarea între bare se face în practică prin nituire. Punctele de îmbinare se numesc noduri, în fiecare nod considerînd deci că avem cîte o articulație plană ce unește barele concurente în nodul respectiv.

În cazul cînd avem de-a face cu un sistem spațial rigid de bare drepte unite la capete (în noduri) prin articulații sferice spunem că avem o grindă cu zăbrele spațială.

Problema de bază în studiul grinzilor cu zăbrele este de a determina tensiunea din fiecare bară în ipoteza că întreaga grindă este în echilibru (repaus), iar forțele ce o acționează sînt aplicate numai în noduri. În caz contrar, orice forță $\bar{F}$ ce calcă pe o bară AB (fig. 5.21) se descompune în

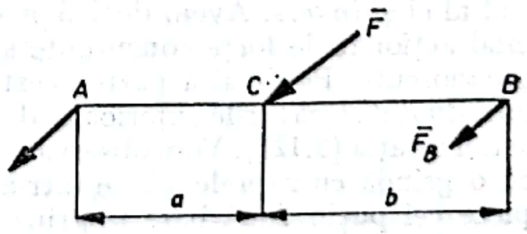


Fig. 5.21

două componente $\bar{F}_A$ și $\bar{F}_B$ paralele cu $\bar{F}$, acționînd în nodurile A și B și de mărimi:

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{F \cdot b}{a+b} \\ F_B = \dfrac{F \cdot a}{a+b}, \end{cases} \tag{5.124}$$

forța $\bar{F}$ fiind astfel rezultanta unică de pe axa centrală a sistemului de forțe $\bar{F}_A$ și $\bar{F}_B$.

În felul acesta tensiunile din toate barele grinzii cu excepția barei AB nu se modifică. În ceea ce privește tensiunea de întindere sau compresiune din bara AB calculată în urma descompunerii forței $\bar{F}$ în cele două componente $\bar{F}_A$ și $\bar{F}_B$, ea nu mai corespunde realității întrucît bara AB este solicitată datorită forței $\bar{F}$ la întindere sau compresiune în mod diferit, pe cele două tronsoane AC și CD și în plus mai este supusă și altor solicitări (de încovoiere și forfecare). Determinarea forțelor interioare (numite eforturi) în cazul unor asemenea solicitări complexe se face cu ajutorul ecuațiilor Rezistenței materialelor.

Vom spune că o grindă cu zăbrele este static determinată dacă toate tensiunile din barele grinzii și necunoscutele introduse de legăturile sale exterioare se pot determina din ecuațiile de echilibru furnizate de Mecanica teoretică. În caz contrar grinda se numește static nedeterminată și rezolvarea ei se face tot cu ecuațiile Rezistenței materialelor.

O grindă cu zăbrele plană este static determinată dacă legăturile sale exterioare introduc numai trei necunoscute (avem doar trei ecuații de echilibru pentru întregul rigid acționat de forțe coplanare) și dacă între numărul b de bare și numărul n de noduri ale grinzii există relația:

$$b = 2n - 3. \tag{5.125}$$

Într-adevăr, echilibrul întregii grinzi atrage după sine echilibrul fiecărui nod al ei și invers. Avem deci $2n$ ecuații de echilibru al grinzii (fiecare nod fiind acționat de forțe coplanare concurente) care trebuie să conțină tot atîtea necunoscute. Pe de altă parte aceste necunoscute sînt: cele trei necunoscute introduse de legăturile exterioare ale grinzii și cele b tensiuni din bare. De aici rezultă relația (5.125).

O grindă cu zăbrele spațială este static determinată dacă legăturile sale exterioare introduc numai șase necunoscute (avem doar șase ecuații de echilibru pentru întregul rigid acționat de forțe oarecare) și dacă între numărul b de bare și numărul n de noduri avem relația:

$$b = 3n - 6, \tag{5.126}$$

Într-adevăr echilibrul întregii grinzi atrage după sine echilibrul fiecărui nod al ei și invers. Avem deci $3n$ ecuații de echilibru al grinzii (fiecare nod fiind acționat de forțe concurente spațiale) care trebuie să conțină tot atîtea necunoscute. Pe de altă parte aceste necunoscute sînt: cele șase necunoscute introduse de legăturile exterioare ale grinzii și cele b tensiuni din bare. Rezultă astfel relația (5.126). Vom observa acum că o condiție necesară (nu și suficientă) ca o grindă cu zăbrele să fie într-adevăr un rigid este ca din fiecare nod să plece cel puțin două bare la grinzile plane și cel puțin trei bare la grinzile spațiale.

Scanned with OKEN Scanner

Este ușor de observat acum că o grindă cu zăbrele care îndeplinește condiția necesară de mai sus și îndeplinește și relația (5.125) dacă este plană, sau (5.126) dacă este spațială, este o grindă care conține numărul minim de bare care-i asigură rigiditatea (suprimarea oricărei bare o transformă într-un mecanism). Relațiile (5.125) și (5.126) pot fi privite deci și ca fiind condițiile suficiente de rigiditate ale grinzilor cu zăbrele respective (plană sau spațială).

În paragrafele care urmează vor fi prezentate diferite metode de rezolvare a grinzilor cu zăbrele static determinate.

5.3.2. **Metoda izolării nodurilor.** Această metodă, sugerată în paragraful precedent, este o aplicare a principiului echilibrului părților și al întregului sistem, considerînd grinda ca fiind formată dintr-un sistem de n puncte (noduri), legăturile interioare ale sistemului fiind cele b bare pe care le înlocuim cu forțele de tensiune. Numărul ecuațiilor de echilibru este de $2\,n$ la grinzile plane și de $3\,n$ la grinzile spațiale. Numărul necunoscutelor este $b + 3 = 2\,n$ la grinzile plane și respectiv $b + 6 = 3\,n$ la grinzile spațiale. Metoda aceasta rezolvă deci orice grindă static determinată. Vom face acum două observații. Prima se referă la modul de înlocuire al barelor cu forțele de tensiune respective. Întrucît la o bară întinsă schema forțelor de tensiune ce acționează asupra celor două noduri (capetele grinzii) este cea din figura 5.22, iar la o bară comprimată este cea din figura 5.23 și întrucît nu putem preciza de la început dacă bara cu indicele i ($i = 1, 2, \ldots, b$) este întinsă sau comprimată, la înlocuirea ei cu forțele de tensiune T_i facem convenția de a utiliza întotdeauna schema (5.22), presupunînd deci bara întinsă. Dacă din rezolvarea ecuațiilor de echilibru respectiva tensiune rezultă un număr pozitiv înseamnă că orientarea tensiunilor T_i a fost bine aleasă și deci bara i este întinsă. Dacă însă rezultă respectiva tensiune ca fiind un număr negativ înseamnă că orientarea tensiunilor T_i este în sens contrar celui ales (deci este ca în figura 5.23) și deci bara i este comprimată. Aplicînd prin urmare convenția de mai sus tensiunile pozitive vor fi de întindere, iar cele negative de compresiune.

A doua observație este aceea că metoda izolării nodurilor se aplică foarte comod la grinzile plane care au cel puțin un nod din care pleacă două bare și la grinzile spațiale care au cel puțin un nod din care pleacă trei bare. Acesta este din fericire și cazul cel mai des întîlnit deoarece se poate arăta ușor că există o singură familie de grinzi cu zăbrele plane la care din fiecare nod pleacă trei bare (grinzile din familie avînd $n = 6$ noduri) și doar două familii de grinzi cu zăbrele spațiale la care din fiecare nod pleacă patru bare (grinzile din familie avînd $n = 6$ noduri) sau cinci bare (grinzile din familie avînd $n = 12$ noduri). Într-adevăr, notînd cu p numărul de bare ce pleacă din fiecare nod al grinzii și numărînd capetele tuturor barelor obținem relația:

$$2b = p\,n. \tag{5.127}$$

Pentru grinzile plane, sistemul:

$$\begin{cases} 2b = pn \quad (p > 2,\ p \in N) \\ b = 2\,n - 3 \end{cases} \tag{5.128}$$

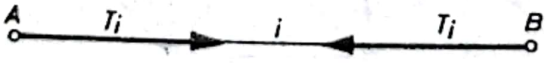


Fig. 5.22

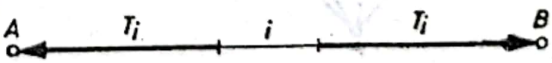


Fig. 5.23

Scanned with OKEN Scanner

admite soluţia unică:

$$n = \frac{6}{4-p} \xrightarrow{p=3} n = 6 \to b = 9. \tag{5.129}$$

Pentru grinzile spaţiale, sistemul:

$$\begin{cases} 2b = pn \\ b = 3n - 6 \end{cases} \qquad (p > 3,\ p \in N) \tag{5.130}$$

admite două soluţii:

$$n = \frac{12}{6-p} \xrightarrow{p=4} n = 6 \to b = 12 \tag{5.131}$$

$$\xrightarrow{p=5} n = 12 \to b = 30. \tag{5.132}$$

Grinzile din familia (5.129) sînt reprezentate în figura 5.24 şi cîte o grindă a familiilor (5.131) şi (5.132) în figurile 5.25 şi 5.26.

Rezolvarea acestor grinzi va fi expusă în paragrafele următoare. În ceea ce priveşte restul grinzilor, rezolvarea lor cu ajutorul metodei izolării nodurilor se face în felul următor: se calculează la început necunoscutele introduse de legăturile exterioare ale grinzii cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru ale întregii grinzi; se izolează apoi pe rînd fiecare nod al grinzii începînd cu un nod din care nu pleacă decît două bare la grinzile plane, sau numai trei bare la grinzile spaţiale, şi avînd grijă ca la izolarea fiecărui nod să nu introducem mai mult de două necunoscute la grinzile plane sau mai mult de trei necunoscute la grinzile spaţiale. În felul acesta vom rezolva mereu cîte două ecuaţii cu două necunoscute la grinzile plane sau cîte trei ecuaţii cu trei necunoscute la grinzile spaţiale, avînd în final şi o verificare a calculelor făcute, şi anume: vor trebui să se transforme în identităţi (se vor verifica de la sine)

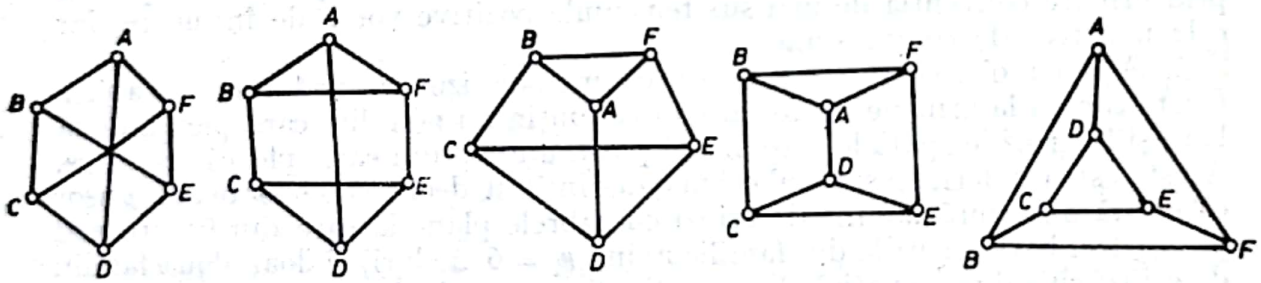


Fig. 5.24

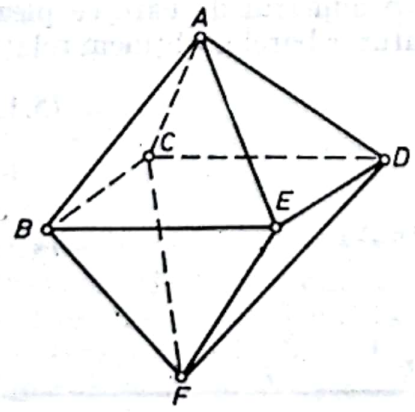


Fig. 5.25

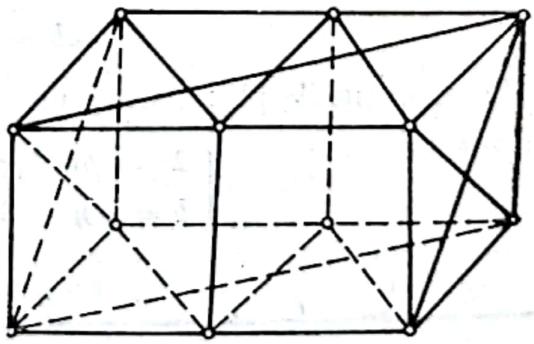


Fig. 5.26

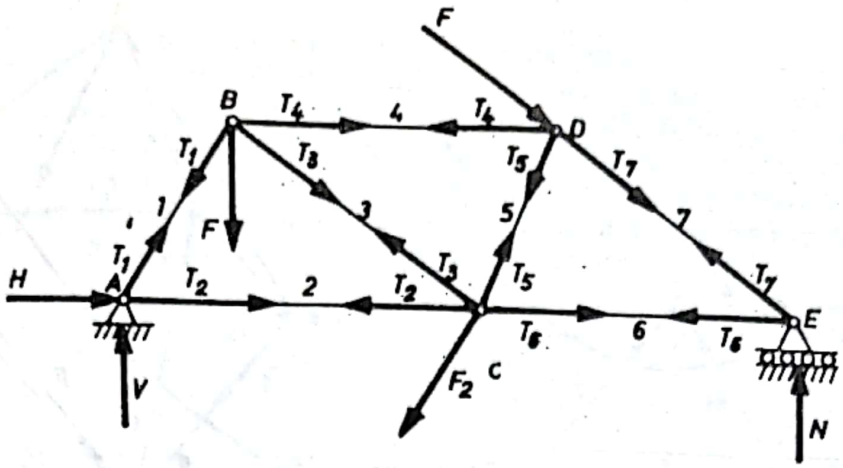


Fig. 5.27

ultimele trei ecuaţii la grinzile plane sau ultimele şase ecuaţii la grinzile spaţiale.

Spre exemplu, la grinda cu zăbrele plană din figura 5.27 cu o articulaţie plană în A şi un sprijin simplu în E, după determinarea reacţiunilor H, V şi N din ecuaţiile de echilibru ale întregii grinzi, ordinea izolării nodurilor poate fi: A, B, C, D, E, o ecuaţie de echilibru de la nodul D şi ambele ecuaţii ale nodului E trebuind să se verifice de la sine. Ordinea izolării nodurilor nu o vom alege A, C, ... întrucît în această situaţie cele două ecuaţii de echilibru ale nodului C ar conţine trei necunoscute: tensiunile T_3, T_5 şi T_6.

În mod cu totul similar se procedează pentru rezolvarea grinzii cu zăbrele spaţiale din figura 5.28 la care ordinea izolării nodurilor ar putea fi: A, B, C, D, E, F, G, H, o ecuaţie a nodului F, două ale lui G şi toate cele trei ecuaţii ale lui H fiind de la sine satisfăcute.

5.3.3. Metoda secţiunilor. Această metodă, numită şi metoda *Ritter*, se aplică în special grinzilor plane, dar ea poate fi uşor extinsă şi pentru rezolvarea grinzilor spaţiale.

Înainte de a o aplica se determină, ca şi la metoda izolării nodurilor, necunoscutele (trei sau şase) introduse de legăturile exterioare ale grinzii.

Metoda secţiunilor este tot o aplicaţie a principiului echilibrului părţilor şi al întregului sistem, de astă dată grinda fiind despărţită în două părţi disjuncte (grinzi mai mici avînd cel puţin o bară) prin secţionarea anumitor bare şi înlocuirea lor cu tensiunile respective. Vom scrie apoi ecuaţiile de echilibru (trei la grinzile plane şi şase la grinzile spaţiale) pentru acea parte a grinzii care conţine numărul minim de forţe exterioare (aceasta numai din motive de simplitate) şi din aceste ecuaţii urmărim să determinăm tensiunile din barele tăiate. Pentru a putea face acest lucru este evident că pentru secţionarea grinzii în cele două părţi disjuncte nu trebuie ca prima secţiune să taie mai mult de trei bare la grinzile plane sau şase bare la grinzile spaţiale. Spre exemplu prima secţiune

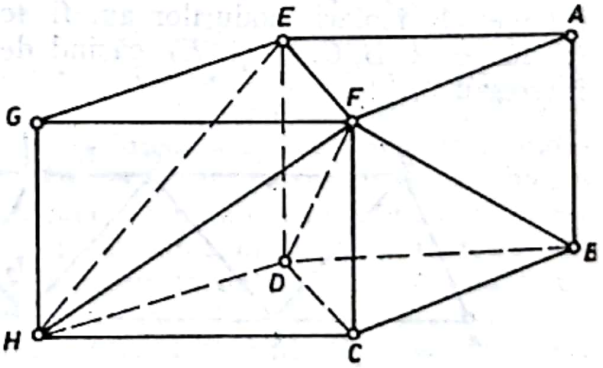


Fig. 5.28

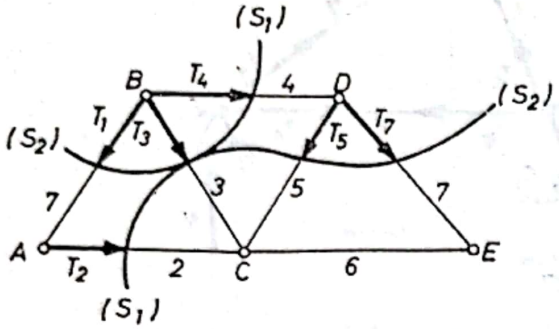


Fig. 5.29

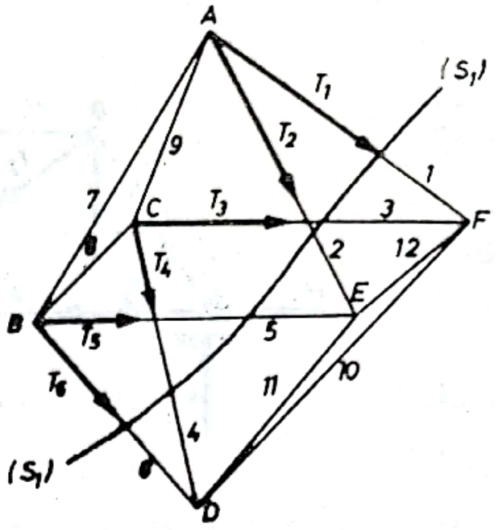


Fig. 5.30

pentru grinda plană din figura 5.29 poate fi făcută prin curba (S_1) care taie barele 2, 3 și 4.

Cele trei ecuații de echilibru ale barei AB ne dau tensiunile T_1, T_3 și T_4. Prima secțiune pentru grinda spațială din figura 5.30 poate fi făcută prin suprafața (S_1) care taie barele 1, 2, 3, 4, 5 și 6. Din cele șase ecuații de echilibru ale grinzii ABC de exemplu se pot determina tensiunile T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 și T_6.

O a doua secționare a grinzii inițiale poate fi făcută cu condiția ca prin aceasta să nu se introducă mai mult de trei necunoscute la grinzile plane sau șase necunoscute la grinzile spațiale, condiție care se impune și următoarelor secțiuni. Spre exemplu la grinda plană din figura 5.29, a doua secțiune (S_2) introduce necunoscutele: T_2, T_5 și T_7 (T_3 este cunoscut în urma primei secționări).

Facem observația că metoda *Ritter* poate fi folosită în combinație cu metoda izolării nodurilor. Spre exemplu pentru rezolvarea grinzii plane din figura 5.29, se pot face întîi secțiunile (S_1) și (S_2) izolînd apoi nodul E pentru a determina și tensiunea T_6. Pentru rezolvarea grinzii spațiale din figura 5.30 se poate face întîi secțiunea (S_1) izolînd apoi nodurile A, B, D și E pentru determinarea tensiunilor T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11} și T_{12}.

Metoda *Ritter* are avantaje evidente la rezolvarea grinzilor „lungi" cum ar fi cea din figura 5.31 la care putem determina prin această metodă tensiunile din barele de la mijlocul grinzii dintr-un număr restrîns de ecuații. Tensiunile T_1, T_2 și T_3 se obțin cu metoda *Ritter* din trei ecuații, pe cînd cu metoda izolării nodurilor am fi fost constrînși să scriem zece ecuații (nodurile A, B, C, D și E) găsind deci și șapte necunoscute care nu ne interesau.

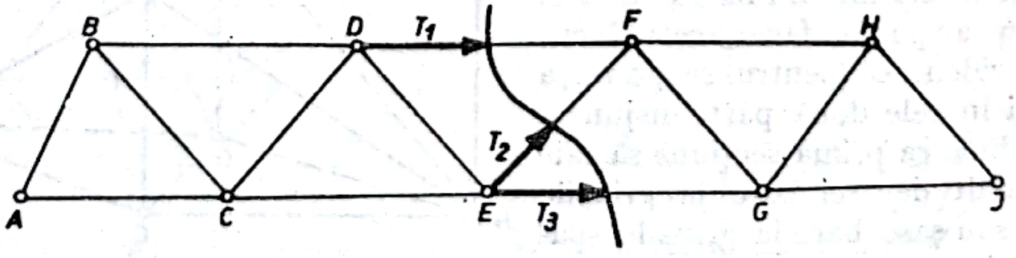


Fig. 5.31

Metoda Ritter mai permite și rezolvarea unor grinzi la care metoda izolării nodurilor este inaplicabilă sub forma ușoară expusă în paragraful precedent. Ca exemplu avem grinda din figura 5.25, reluată în figura 5.30.

Vom observa că pentru grinda spațială din figura 5.26 sau pentru grinzile plane simetrice din figura 5.24 nu se poate aplica nici metoda secțiunilor. E de ajuns însă să stricăm simetria față de AD a grinzilor din figura 5.24 (cu excepția primeia) pentru ca metoda secțiunilor să devină aplicabilă și deci grinzile rezolvabile.

Grinzile care nu se pot rezolva prin metoda izolării nodurilor (sub forma simplă) sau prin metoda secțiunilor (ex.: prima grindă din figura 5.24 și grinda din figura 5.26 se vor rezolva prin metoda înlocuirii barelor expusă în paragraful următor).

5.3.4. **Metoda înlocuirii barelor.** Vom pleca de la observația că toate ecuațiile de echilibru ale unui sistem discret de forțe sînt relații liniare în raport cu modulele forțelor. Într-adevăr, fiind dat un asemenea sistem de forțe $\{F_i\}_1^n$ și notînd cu x_i, y_i, z_i coordonatele punctelor lor de aplicație și cu α_{i1}, α_{i2}, α_{i3} unghiurile făcute de aceste forțe cu axele sistemului de referință, ecuațiile de echilibru se scriu:

$$\begin{cases} \sum_i^n F_i \cos \alpha_{i1} = 0 \\ \sum_i^n F_i \cos \alpha_{i2} = 0 \\ \sum_i^n F_i \cos \alpha_{i3} = 0 \\ \sum_i^n F_i (y_i \cos \alpha_{i3} - z_i \cos \alpha_{i2}) = 0 \\ \sum_i^n F_i (z_i \cos \alpha_{i1} - x_i \cos \alpha_{i3}) = 0 \\ \sum_i^n F_i (x_i \cos \alpha_{i2} - y_i \cos \alpha_{i1}) = 0 \end{cases} \tag{5.133}$$

sau sub formă prescurtată:

$$\sum_i^n a_{ij} F_i = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, K), \tag{5.134}$$

unde $K = 6$ pentru forțe spațiale oarecare, $K = 3$ pentru forțe spațiale concurente sau pentru forțe coplanare oarecare și $K = 2$ pentru forțe coplanare concurente. Metoda înlocuirii barelor pleacă de la ideea înlocuirii uneia sau mai multora dintre barele grinzii cu perechi de forțe de tensiune $T_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ presupuse de întindere care să înlocuiască mecanic barele îndepărtate. Pentru ca grinda să rămînă static determinată va trebui să introducem totuși m bare. Pozițiile noilor bare pe grindă le vom alege însă în așa fel încît să putem rezolva grinda prin metoda izolării nodurilor sau prin metoda secțiunilor. Evident că vom înlocui un număr minim de bare. Pentru ca noua grindă să fie echivalentă mecanic cu grinda inițială (să aibă eforturi egale în bare omoloage) este necesar și suficient ca tensiunile $T_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ din barele nou introduse să fie nule. De aceea, din relațiile liniare de echilibru scrise pentru rezolvarea grinzii transformate se vor scoate tensiunile T_k ale

Scanned with OKEN Scanner

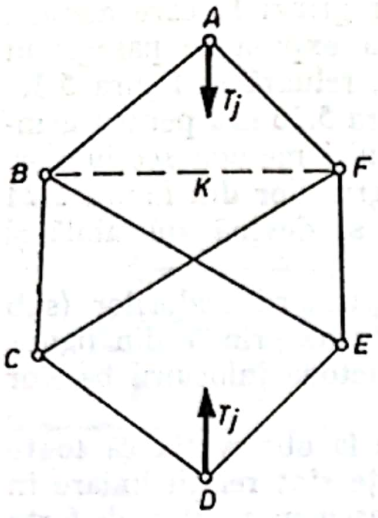


Fig. 5.32

căror expresii vor fi obligatoriu liniare în raport cu forţele exterioare F_i şi cu cele k mărimi T_j ale forţelor de tensiune introduse, care pentru grinda transformată joacă rol de forţe exterioare. Anulînd tensiunile T_k vom putea scrie un sistem liniar de m ecuaţii:

$$T_k = \sum_i^n a_{ik}F_i + \sum_j^m b_{jk}T_j = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{5.135}$$

din a cărui rezolvare rezultă cele m tensiuni T_j din barele înlocuite, o tensiune pozitivă însemnînd întindere, iar una negativă, compresiune. Valorile $T_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ odată determinate ele pot fi înlocuite direct în expresiile tensiunilor din celelalte bare (dacă aceste expresii au fost calculate) şi în felul acesta grinda este rezolvată. Spre exemplu prima grindă din figura 5.24 se poate rezolva prin metoda înlocuirii barelor în felul următor.

Se înlocuieşte bara AD prin forţele de tensiune T_j (fig. 5.32) şi se introduce o nouă bară (k) de exemplu în poziţia BF. În felul acesta grinda este rezolvabilă prin metoda izolării nodurilor plecînd cu izolarea de la nodul D. În cazul nostru avem o singură ecuaţie de echivalenţă a celor două grinzi: relaţia (5.135) pentru $m = 1$. Din această relaţie se obţine T_j — tensiune din bara îndepărtată, cu ajutorul căreia se pot calcula rapid tensiunile din celelalte bare.

Metoda înlocuirii barelor se aplică evident la fel de bine şi grinzilor cu zăbrele spaţiale.

5.3.5. **Metoda Cremona.** Această metodă este o transpunere grafică a metodei izolării nodurilor pentru grinzile cu zăbrele plane. La început vom proceda la determinarea celor trei necunoscute introduse de legăturile exterioare ale grinzii, după care vom introduce aşa-zisa *notaţie Bow*. Pentru aceasta vom înconjura grinda cu o curbă închisă (C) şi vom desena suporturile forţelor exterioare şi de legătură înspre exteriorul grinzii pînă taie curba (C) (fig. 5.33). În felul acesta curba (C), suporturile forţelor şi barele

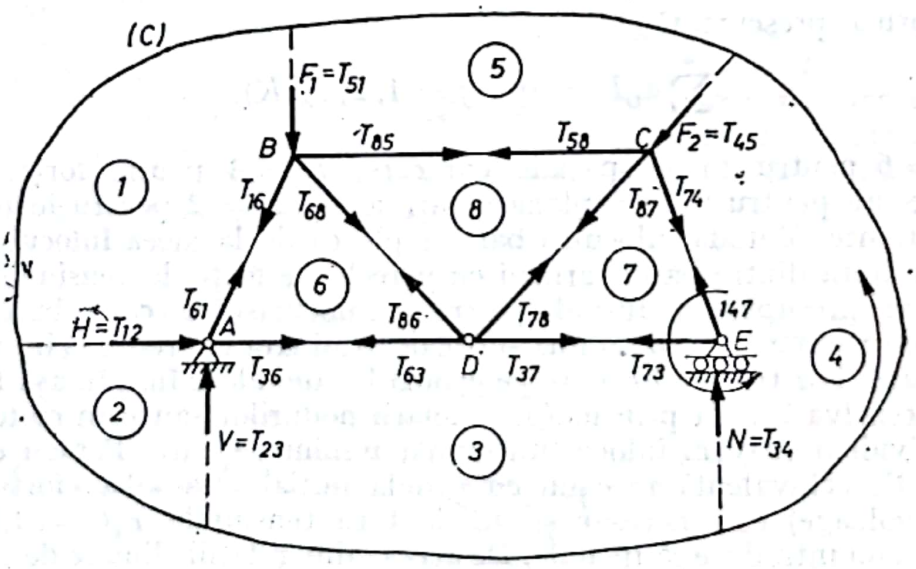


Fig. 5.33

Scanned with OKEN Scanner

grinzii determină între ele un număr de zone exterioare grinzii și un număr de zone interioare ei. Zonele exterioare le vom numerota succesiv începînd cu una din ele și înconjurînd grinda într-un anumit sens (de exemplu în sens pozitiv trigonometric). Vom continua apoi cu numerotarea zonelor interioare într-o ordine absolut arbitrară. În felul acesta fiecare forță exterioară sau de legătură (aflată între două zone exterioare) va fi notată prin T_{ij}, în care i și j sînt indicii celor două zone adiacente forței ($i < j$). Izolînd acum pe rînd nodurile și introducînd tensiunile presupuse de întindere, observăm că putem nota în mod univoc aceste tensiuni tot prin simboluri T_{ij} în care i și j sînt indicii zonelor adiacente tensiunii respective luați în ordinea în care întîlnim zonele dacă ne rotim în jurul nodului în cauză în sensul de rotație ales inițial pentru numerotarea zonelor exterioare (fig. 5.33). Se observă că aplicînd această convenție cele două forțe de tensiune ce acționează asupra capetelor unei bare vor fi întotdeauna de forma T_{ij} și T_{ji}. Aceasta este notația *Bow*. Vom trece acum la construirea așa-zisei *epure Cremona* (fig. 5.34). Fiecărei zone din figura 5.33 îi corespunde în *epura Cremona* un punct și fiecare forță (exterioară de legătură sau tensiune) care se află în figura5.33 între zonele i și j este desenată în *epura Cremona* prin segmentul cuprins între punctele i și j.

Epura se începe prin construcția poligonului forțelor exterioare și de legătură, care este obligatoriu un poligon închis: 1—2—3—4—5—1, datorită echilibrului grinzii. Pe acest desen se suprapun apoi poligoanele închise care reprezintă echilibrul fiecărui nod izolat. Poligonul nodului A va trebui să fie notat prin 1—2—3—6—1. Vîrful necunoscut 6 se determină ducînd din 1 o paralelă la AB și din 3 o paralelă la AD și la intersecția lor găsim punctul 6. Poligonul nodului B este 5—1—6—8—5. Vîrful necunoscut 8 se găsește la intersecția paralelei din 5 la BC cu paralela din 6 la BD. În fine, poligonul vîrfului C este 4—5—8—7—4, în care vîrful necunoscut 7 se află la intersecția paralelei din 4 la CE cu paralela din 8 la CD. În acest moment toate zonele interioare ale grinzii au un corespondent în *epura Cremona*. Echilibrul nodurilor E și D nu mai e necesar să fie făcut. Vom avea ca verificare a corectitudinii epurei condiția ca dreapta 3—7 să fie paralelă cu DE.

Mărimile tensiunilor T_{ij} sînt lungimile segmentelor i—j din *epura Cremona*, o bară fiind întinsă dacă sensul real al tensiunii T_{ij} din *epura Cremona* (sensul de la i spre j) corespunde cu sensul presupus al acestei tensiuni din notația *Bow*, în caz contrar bara fiind comprimată. Spre exemplu, în cazul notației *Bow* din figura 5.33 și al *epurei Cremona* din figura 5.34 barele AD, BD și DE sînt întinse, celelalte fiind comprimate.

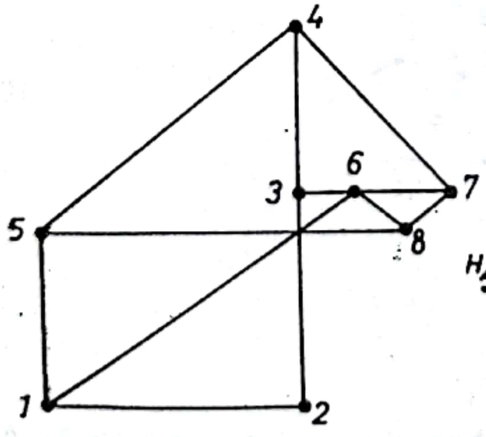


Fig. 5.34

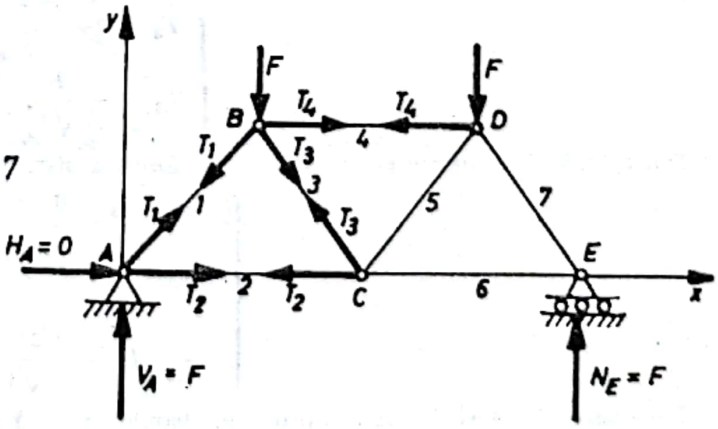


Fig. 5.35

APLICAȚII

1. Să se calculeze eforturile din barele grinzii plane cu zăbrele din figura 5.35. toate barele avînd lungimea a.

Rezolvare:

Grinda este static determinată deoarece numărul $b = 7$ bare și numărul $n = 5$ noduri satisfac relația (5.125); $b = 2n - 3$.

Vom aplica metoda izolării nodurilor.

Înlocuim articulația plană din A și sprijinul simplu din B prin forțele corespunzătoare de legătură și scriem ecuațiile de echilibru ale grinzii:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + N_E - 2F = 0 \\ -F \cdot \dfrac{a}{2} - F \cdot 3\dfrac{a}{2} + N_E \cdot 2a = 0 \end{cases}$$

din care rezultă:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ N_E = F. \end{cases}$$

Ecuațiile de echilibru ale nodului A izolat sînt:

$$\begin{cases} T_2 + T_1 \dfrac{1}{2} = 0 \\ F + T_1 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} T_1 = -\dfrac{2F}{\sqrt{3}} \\ T_2 = \dfrac{F}{\sqrt{3}}. \end{cases} \tag{1}$$

Ecuațiile de echilibru ale nodului B izolat se scriu ținînd cont de relațiile (1) sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{2F}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2} + T_3 \cdot \dfrac{1}{2} + T_4 = 0 \\ \dfrac{2F}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - T_3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - F = 0 \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} T_3 = 0 \\ T_4 = -\dfrac{F}{\sqrt{3}}. \end{cases} \tag{2}$$

Din motive de simetrie geometrică și mecanică a sistemului putem scrie:

$$\begin{cases} T_5 = T_3 = 0 \\ T_6 = T_2 = \dfrac{F}{\sqrt{3}} \\ T_7 = T_1 = -\dfrac{2F}{\sqrt{3}}. \end{cases} \tag{3}$$

Deci barele 1, 4 și 7 sînt comprimate, barele 3 și 5 nu sînt solicitate, iar barele 2 și 6 sînt întinse.

Scanned with OKEN Scanner

2. Grinda spațială din figura 5.36 este sprijinită în A și B pe planul orizontal și are o articulație sferică în C. Dîndu-se forța F ce acționează în D paralel cu axa Ox să se calculeze tensiunile din barele grinzii cunoscînd că:

$$OA = OB = OC = OD = a.$$

Rezolvare:

Grinda este static determinată întrucît numărul de bare $b = 9$ și numărul de noduri $n = 5$ satisfac relația (5.126): $b = 3n - 6$.

Vom aplica o metodă combinată făcînd la început o secțiune prin care să izolăm bara OD, iar apoi izolînd nodurile O și B.

La izolarea barei OD, forțele ce-o acționează sînt: forța F și tensiunile T_1, T_6, T_9, T_2, T_5, T_8 reprezentate în figura 5.36. Scrise analitic aceste forțe sînt:

$$\bar{T}_1(T_1, 0, 0);$$

$$\bar{T}_6(0, T_6, 0);$$

$$\bar{T}_9(0, -T_9, 0);$$

$$\bar{T}_2\left(\frac{T_2}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{T_2}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\bar{T}_5\left(0, \frac{T_5}{\sqrt{2}}, -\frac{T_5}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\bar{T}_8\left(0, -\frac{T_8}{\sqrt{2}}, -\frac{T_8}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\bar{F}(-F, 0, 0).$$

Rezultanta forțelor din O este:

$$\bar{R}_0(T_1, T_6 - T_9, 0),$$

iar rezultanta forțelor din D este:

$$\bar{R}_D\left(-F + \frac{T_2}{\sqrt{2}}, \frac{T_5 - T_8}{\sqrt{2}}, -\frac{T_2 + T_5 + T_8}{\sqrt{2}}\right).$$

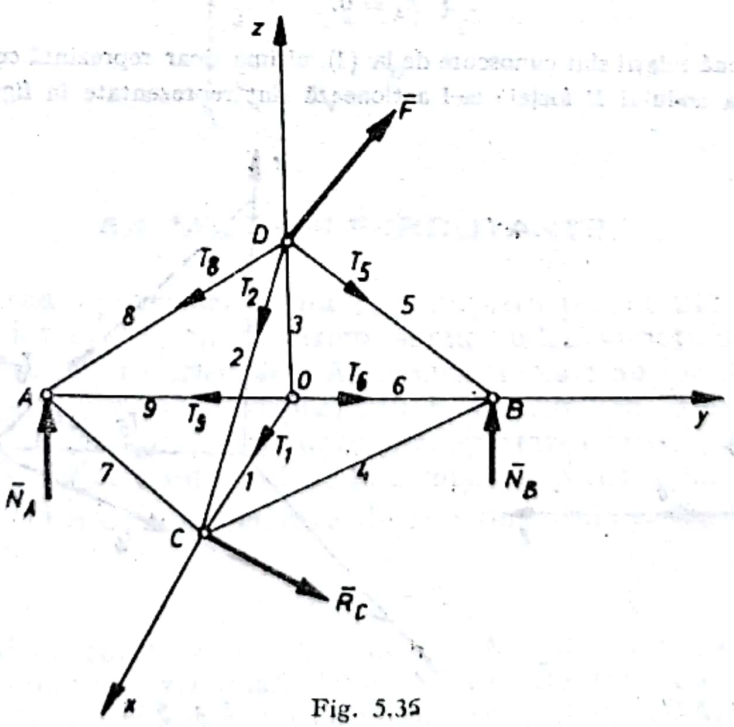


Fig. 5.35

Scanned with OKEN Scanner

Reducînd toate aceste forțe în D obținem torsorul:

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{R}_D \\ \bar{M}_D = \overrightarrow{DO} \times \bar{R}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -a \\ T_1 & (T_6 - T_9) & 0 \end{vmatrix} = a(T_6 - T_9)\,\vec{i} - a\,T_1\,\vec{j}. \end{cases}$$

Din anularea acestui torsor rezultă ecuațiile:

$$\begin{cases} T_6 - T_9 = 0 \\ T_1 = 0 \\ T_1 - F + \dfrac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ T_6 - T_9 + \dfrac{T_5 - T_8}{\sqrt{2}} = 0 \\ T_2 + T_5 + T_8 = 0 \end{cases}$$

din care deducem:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ T_2 = F\sqrt{2} \\ T_5 = T_8 = -F\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ T_6 = T_9 = \text{nedeterminat.} \end{cases} \tag{1}$$

La izolarea nodului O forțele ce-l acționează sînt reprezentate în figura 5.37. Ecuațiile de echilibru ale acestui nod se scriu:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ T_6 - T_9 = 0 \\ T_3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Primele două relații sînt cunoscute de la (1), ultima doar reprezintă ceva nou. La izolarea nodului B forțele ce-l acționează sînt reprezentate în figura 5.38.

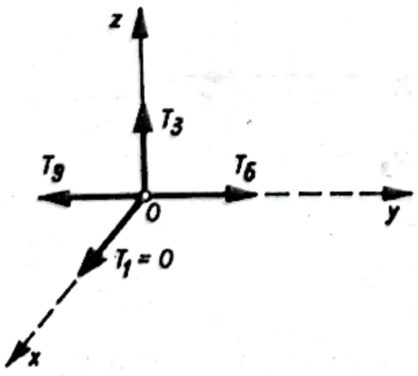


Fig. 5.37

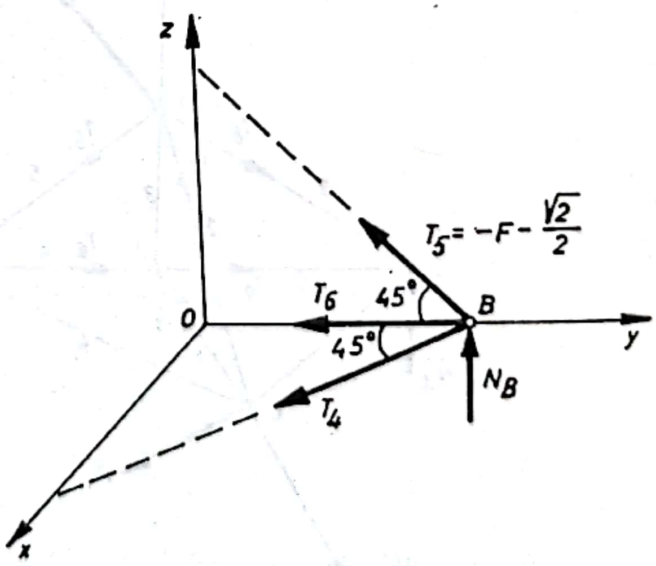


Fig. 5.38

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de echilibru ale acestui nod sînt:

$$\begin{cases} T_4 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ -T_4 \dfrac{\sqrt{2}}{2} - T_6 + F \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ N_A - F \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} T_4 = 0 \\ T_6 = \dfrac{F}{2} \\ N_A = \dfrac{F}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Din motive de simetrie geometrică și mecanică a grinzii putem scrie:

$$\begin{cases} T_7 = T_4 \\ T_9 = T_6 \\ T_8 = T_5. \end{cases} \tag{4}$$

Ultimele două relații sînt deja cunoscute.
Rezumînd rezultatele putem scrie:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ T_2 = F\sqrt{2} \\ T_3 = 0 \\ T_4 = T_7 = 0 \\ T_5 = T_8 = -F\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ T_6 = T_9 = \dfrac{F}{2}. \end{cases}$$

5.4. MIȘCĂRI PERCUTANTE

5.4.1. **Teoreme generale.** Se numește mișcare percutantă orice mișcare la care într-un interval de timp extrem de mic au loc variații mari de viteze sau în modul sau (și) în orientare. Asemenea mișcări au loc de exemplu la coliziunea (ciocnirea) a două corpuri sau la imprimarea bruscă de legături rigide unui corp în mișcare. Din contră, îndepărtarea bruscă a unor legături ale unui corp în mișcare nu conduce la o mișcare percutantă.

Fie un punct A de masă m care de la momentul $t = t_1$ suferă o variație finită de viteză:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_0, \tag{5.136}$$

într-un interval de timp extrem de mic Δt. Aceasta este o mișcare percutantă reală a punctului material. Admițînd că intervalul de timp Δt tinde la zero, adică admițînd că variația de viteză $\Delta\bar{v}$ ar fi instantanee, avem ceea

Scanned with OKEN Scanner

ce se cheamă o *mișcare percutantă ideală* a punctului material. Într-o asemenea accepțiune viteza punctului material se poate scrie cu ajutorul funcției lui *Heaviside* introdusă în paragraful 1.3.2 sub forma:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \Delta\bar{v} \cdot H(t - t_1) = \begin{cases} \bar{v}_0 \text{ pt. } t < t_1 \\ \bar{v}_0 + \Delta\bar{v} = \bar{v}_1 \text{ pt. } t > t_1. \end{cases} \tag{5.137}$$

Forța care acționează asupra punctului material va fi conform teoremei impulsului:

$$\bar{F}_p = m\,\dot{\bar{v}} = m \cdot \Delta\bar{v} \cdot \dot{H}(t - t_1) = m \cdot \Delta\bar{v} \cdot \delta(t - t_1), \tag{5.138}$$

în care $\delta(t - t_1)$ este distribuția lui *Dirac*, iar vectorul:

$$\bar{P} = m \cdot \Delta\bar{v} \tag{5.139}$$

se numește percuție.

Forța percutantă ce acționează asupra punctului nostru se scrie deci:

$$\bar{F}_p = \bar{P} \cdot \delta(t - t_1). \tag{5.140}$$

În cazul unor mișcări percutante ideale această forță ia brusc o valoare infinită, revenind instantaneu la zero. În cazul unor *mișcări percutante reale* forța percutantă prezintă în intervalul de timp Δt o creștere rapidă de la zero la o valoare foarte mare și o scădere rapidă la zero. În cazul cînd ne interesează ce se întîmplă în intervalul de timp Δt vom considera mișcările percutante reale. Dacă ne interesează însă numai evoluția mecanică ulterioară a punctului (în general a unui sistem) vom considera mișcările percutante ideale adică vom introduce forțe percutante de tipul (5.140). Datorită faptului că forțele percutante sînt foarte mari în intervalul de timp Δt, forțele exterioare obișnuite (cele continui în timp) se pot neglija în acest interval de timp, în cazul mișcărilor percutante reale. La mișcările percutante ideale ale unui sistem vom considera că acesta este acționat de forțele exterioare obișnuite și de forțe percutante de tipul (5.140). Momentul $t = t_1$ se numește momentul ciocnirii. Dacă se studiază evoluția mecanică a unui sistem într-un interval de timp foarte mic care conține momentul t_1, forțele exterioare obișnuite pot fi iarăși neglijate, contribuția lor la modificarea stării mecanice a sistemului fiind neînsemnată față de contribuția forțelor percutante, după cum vom vedea și din relațiile de mai jos.

Admițînd mișcările percutante ca fiind ideale vom scrie acum ecuațiile de mișcare ale punctului și rigidului în cazul prezenței forțelor percutante.

Fie un punct material A de masă m, acționat de rezultanta forțelor exterioare finite $\bar{R}_E$, de rezultanta forțelor de legătură $\bar{R}_L$ și de n forțe percutante:

$$\bar{F}_{pi} = \bar{P}_i \cdot \delta(t - t_i)\ (i = 1,2, \ldots, n). \tag{5.141}$$

Legea a doua a lui *Newton* pentru acest punct se scrie:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L + \sum_i^n \bar{P}_i \cdot \delta(t - t_i) = m\dot{\bar{v}}, \tag{5.142}$$

care prin integrare în intervalul de timp $0 - t$ conduce la:

$$\int_0^t \bar{R}_E \cdot dt + \int_0^t \bar{R}_L \cdot dt + \sum_i^n \int_0^t \bar{P}_i \delta(t - t_i) \cdot dt = m\,\bar{v}t - m\,\bar{v}(0). \tag{5.143}$$

Scanned with OKEN Scanner

Integralele din (5.143) se calculează ţinînd cont de proprietatea de filtrare a distribuţiei lui *Dirac*.

Fie acum un rigid cu centrul maselor C acţionat de un sistem de forţe exterioare finite al cărui torsor de reducere într-un punct O este $(\bar{R}_E, \bar{M}_{OE})$, de un sistem de forţe de legătură al cărui torsor de reducere în O este $(\bar{R}_L, \bar{M}_{OL})$ şi de n forţe percutante $\bar{F}_{Pi}$ în punctele A_i de vectori de poziţie $\bar{r}_i = \overline{OA}_i$.

În acest caz teorema mişcării centrului de masă (2.231) şi teorema momentului cinetic faţă de punctul O (punct fix sau centrul maselor), relaţia (2.253), se scriu:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L + \sum_i^n \bar{P}_{ij}\delta(t - t_i) = m\dot{\bar{v}}_c; \tag{5.144}$$

$$\bar{M}_{OE} + \bar{M}_{OL} + \sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{P}_i \cdot \delta(t - t_i) = \dot{\bar{K}}_0. \tag{5.145}$$

Integrînd în raport de timp aceste relaţii în intervalul $0 - t$ obţinem:

$$\int_0^t \bar{R}_E \cdot \mathrm{d}t + \int_0^t \bar{R}_L \cdot \mathrm{d}t + \sum_i^n \int_0^t \bar{P}_i \cdot \delta(t - t_i) \cdot \mathrm{d}t = m\bar{v}_c(t) - m\bar{v}_c(O); \tag{5.146}$$

$$\int_0^t \bar{M}_{OE} \cdot \mathrm{d}t + \int_0^t \bar{M}_{OL} \cdot \mathrm{d}t + \sum_i^n \int_0^t \bar{r}_i \times \bar{P}_i \cdot \delta(t - t_i) \cdot \mathrm{d}t = \bar{K}_0(t) - \bar{K}_0(0). \tag{5.147}$$

Vom face acum observaţia că atunci cînd asupra unui corp acţionează forţe percutante, forţele de legătură devin şi ele în general tot percutante. Dacă vom alege acum intervalul $0—t$ un interval foarte scurt de timp în care pot avea loc un număr n de ciocniri, vom putea scrie:

$$\sum_i^n \int_0^t \bar{P}_i \cdot \delta(t - t_i) \cdot \mathrm{d}t = \sum_i^n \bar{P}_i; \tag{5.148}$$

$$\int_0^t \bar{R}_L \cdot \mathrm{d}t = \sum_j^k \int_0^t \bar{F}_{PLj} \cdot \mathrm{d}t = \sum_i^k \bar{P}_{Lj}; \tag{5.149}$$

$$\int_0^t \bar{R}_E \cdot \mathrm{d}t = \bar{R}_E(\alpha t) \cdot t \approx 0 \quad (0 < \alpha < 1); \tag{5.150}$$

$$\sum_i^n \int_0^t \bar{r}_i \times \bar{P}_i \cdot \delta(t - t_i) \cdot \mathrm{d}t = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{P}_i; \tag{5.151}$$

$$\int_0^t \bar{M}_{OL}\, \mathrm{d}t = \sum_j^k \int_0^t \bar{r}_j \times \bar{F}_{PLj} \cdot \mathrm{d}t = \sum_i^k \bar{r}_j \times \bar{P}_{Lj}; \tag{5.152}$$

$$\int_0^t \bar{M}_{OE} \cdot \mathrm{d}t = \bar{M}_{OE}(\alpha t) \cdot t \approx 0 \quad (0 < \alpha < 1), \tag{5.153}$$

în care: $\bar{F}_{PLj}$ şi $\bar{P}_{Lj}$ sînt respectiv forţele percutante şi percuţiile de legătură.

Scanned with OKEN Scanner

Deci pentru un interval de timp foarte mic ecuația de mișcare a unui punct (5.143) devine:

$$\sum_{i}^{n} \bar{P}_i + \sum_{j}^{k} \bar{P}_{Lj} = m \cdot \Delta \bar{v}, \tag{5.154}$$

iar ecuațiile de mișcare ale unui rigid (5.146) și (5.147) devin:

$$\sum_{i}^{n} \bar{P}_i + \sum_{j}^{k} \bar{P}_{Lj} = m \cdot \Delta \bar{v}_c = \Delta \bar{H}; \tag{5.155}$$

$$\sum_{i}^{n} \bar{r}_i \times \bar{P}_i + \sum_{j}^{k} \bar{r}_j \times \bar{P}_{Lj} = \Delta \bar{K}_0. \tag{5.156}$$

Mai facem observația că pentru un sistem de corpuri care se ciocnesc se pot aplica în unele situații și legile de conservare (a impulsului, a momentului cinetic sau a energiei mecanice), plecînd de la observația că în timpul unei ciocniri forțele percutante (și deci și percuțiile) ce acționează asupra corpurilor sistemului sînt cu siguranță egale în modul și opuse ca sens (acțiune și reacțiune).

5.4.2. **Ciocnirea centrică și oblică a două sfere.** Spunem că două sfere se ciocnesc centric dacă în momentul ciocnirii vitezele centrelor lor se află pe dreapta ce unește aceste centre. În orice altă situație ciocnirea sferelor se numește oblică.

Fie acum două sfere A și B de mase m_1 și m_2, aflate în mișcare de translație cu vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$. Sferele se ciocnesc centric, iar rezultanta forțelor exterioare și de legătură este nulă (fig. 5.39). Vitezele sferelor după ciocnire le notăm prin $\bar{v}_1'$ și $\bar{v}_2'$.

Conservarea impulsului pentru sistemul celor două sfere se scrie:

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2', \tag{5.157}$$

care prin proiectare pe axa Ox ne dă:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}'. \tag{5.158}$$

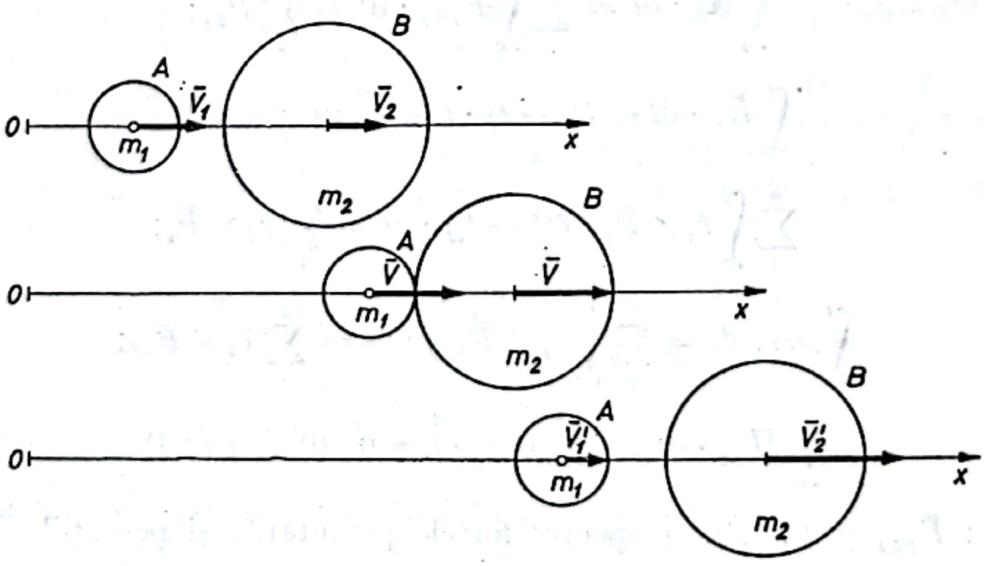


Fig. 5.39

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina vitezele de după ciocnire presupunînd cunoscute vitezele de dinainte de ciocnire mai avem nevoie de o a doua ecuație. Pentru a o obține vom considera fenomenul de ciocnire ca avînd loc într-un interval de timp finit Δt (percuție reală). În acest interval de timp cele două sfere în contact se deformează local datorită elasticității corpurilor. La început se produce o comprimare pînă în momentul cînd vitezele celor două sfere se egalează (vitezele $\bar{v}$ din figura 5.39), urmînd apoi o relaxare (fază care poate să lipsească în situația în care corpurile rămîn lipite după ciocnire, în care caz ciocnirea se numește plastică).

Notînd cu $\bar{P}_c$ și $\bar{P}_r$ percuțiile ce acționează asupra sferei A în perioada de comprimare și în perioada de relaxare, percuțiile ce acționează asupra sferei B fiind evident $-\bar{P}_c$ și $-\bar{P}_r$, aplicînd relația (5.54) obținem:

$$\bar{P}_c = m_1(\bar{v} - \bar{v}_1); \tag{5.159}$$

$$\bar{P}_r = m_1(\bar{v}'_1 - \bar{v}); \tag{5.160}$$

$$-\bar{P}_c = m_2(\bar{v} - \bar{v}_2); \tag{5.161}$$

$$-\bar{P}_r = m_2(\bar{v}'_2 - \bar{v}). \tag{5.162}$$

Proiectînd aceste relații pe axa Ox și notînd:

$$\frac{P_r}{P_c} = \lambda, \tag{5.163}$$

raport pe care-l vom numi *coeficient de restituire*, vom obține relațiile:

$$\lambda = \frac{v'_{1x} - v_x}{v_x - v_{1x}} = \frac{v_x - v'_{2x}}{v_{2x} - v_x}. \tag{5.164}$$

din care obținem:

$$\lambda = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}. \tag{5.165}$$

Coeficientul de restituire λ se determină experimental. El depinde de natura materialelor celor două corpuri care se ciocnesc și are valori între zero și unu:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{5.166}$$

Cînd $\lambda = 0$ ciocnirea se numește *plastică*, iar cînd $\lambda = 1$ ciocnirea se numește *elastică*. Ciocnirile reale se situează undeva între aceste cazuri limită. Aceste ciocniri reale se pot numi *elastoplastice*.

Rezolvînd acum sistemul ecuațiilor (5.158) și (5.165) în raport cu necunoscutele v'_{1x} și v'_{2x} obținem relațiile:

$$v'_{1x} = v_{1x} = \frac{(v_{1x} - v_{2x})(1 + \lambda)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}; \tag{5.167}$$

$$v'_{2x} = v_{2x} = \frac{(v_{1x} - v_{2x})(1 + \lambda)}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \tag{5.168}$$

Putem calcula și pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii:

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

care după calcule elementare se scrie:

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - \lambda^2) (v_{1x} - v_{2x})^2. \tag{5.169}$$

Observăm că la o ciocnire elastică $\Delta E = 0$, iar la o ciocnire plastică $\Delta E = \max$. Pierderea de energie cinetică la ciocnirile reale se explică prin transformarea ei în lucru mecanic de deformare a corpurilor și în alte forme de energie nemecanică: energie calorică, luminoasă, electrică.

O determinare experimentală a coeficientului de restituire se poate face de exemplu lăsînd să cadă liber de la înălțimea h_1 o sferă mică pe un planșeu orizontal și măsurînd înălțimea h_2 pînă la care se ridică după ciocnire (fig. 5.40). Asimilînd planșeul cu o sferă de rază infinită și masă infinită, avem:

$$\begin{cases} m_2 = \infty \\ v_{2x} = 0 \\ v_{1x} = \sqrt{2g h_1}. \end{cases} \tag{5.170}$$

Din relațiile (5.167) și (5.168) rezultă:

$$v'_{1x} = - v_{1x} \cdot \lambda, \tag{5.171}$$

însă:

$$v'_1 = - v'_{1x} = \sqrt{2g h_2}. \tag{5.172}$$

Rezultă deci:

$$\lambda = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \tag{5.173}$$

Vom studia acum ciocnirea oblică a două sfere. Vitezele centrelor acestor sfere în momentul ciocnirii lor le vom descompune în cîte două componente, una normală (după linia centrelor) și alta tangențială perpendiculară pe prima (fig. 5.41). Neglijînd percuțiile de frecare (care apar în realitate), singurele percuții rămase fiind după axa centrelor, se vor schimba numai componentele

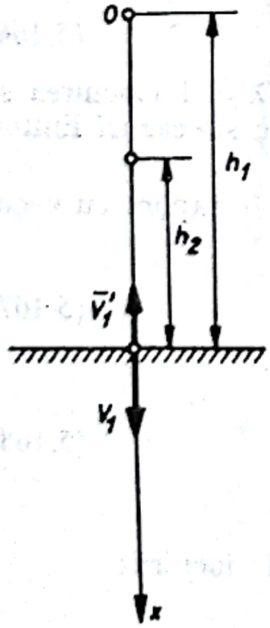


Fig. 5.40

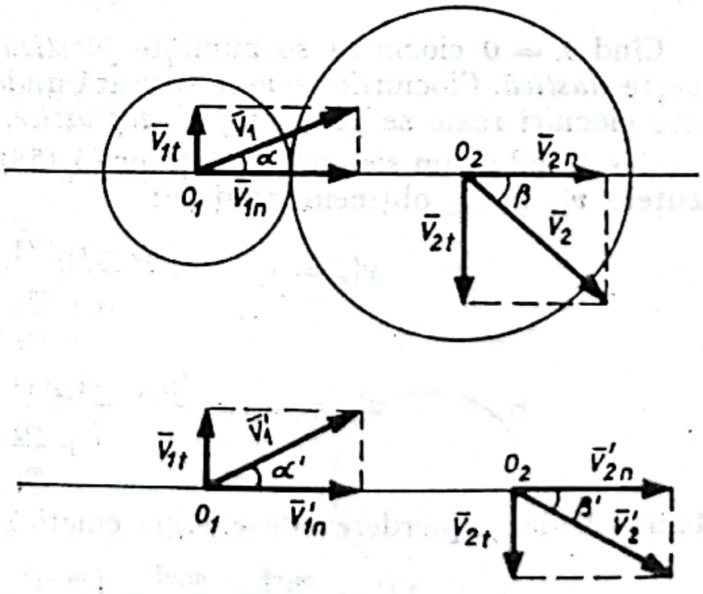


Fig. 5.41

normale ale vitezelor $\bar{v}_{1n}$ și $\bar{v}_{2n}$ în $\bar{v}'_{1n}$ și $\bar{v}'_{2n}$ conform relațiilor (5.167) și (5.168) de la ciocnirea centrică, iar componentele tangențiale $\bar{v}_{1t}$ și $\bar{v}_{2t}$ se conservă. În consecință se vor schimba și unghiurile α și β dintre vitezele sferelor și axa centrelor.

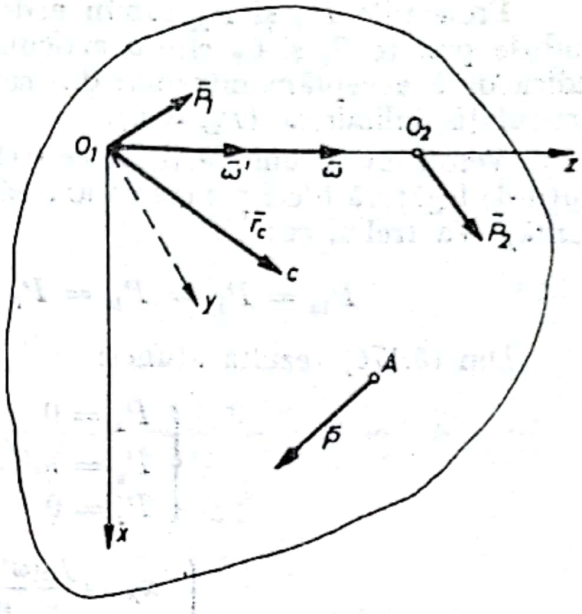


Fig. 5.42

5.4.3. **Percuții aplicate unui corp cu axă fixă. Centrul de percuție.** Fie un corp de masă m cu axa fixă O_1z, având punctele fixe O_1 și O_2 (fig. 5.42). Vom lua axa O_1x în planul determinat de centrul maselor C și punctele O_1 și O_2, sistemul de referință O_1xyz fiind ortogonal drept. Avem deci $C(x_c, O, z_c)$. În punctul $A(x_A, y_A, z_A)$ se aplică la un moment dat o percuție $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$. Datorită acesteia, în momentul ciocnirii apar în O_1 și O_2 percuțiile de legătură $\bar{P}_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ și $\bar{P}_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$. Fie $\bar{\omega}(0, 0, \omega)$ și $\omega'(0, 0, \omega')$ vitezele unghiulare ale rigidului imediat înainte și imediat după ciocnire și fie $O_1O_2 = a$.

Cele două ecuații (5.155) și (5.156) se scriu în cazul nostru:

$$\bar{P} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = m(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \times \bar{r}_c; \tag{5.174}$$

$$\overline{O_1O_2} \times \bar{P}_2 + \overline{O_1A} \times \bar{P} = \bar{K}'_{O_1} - \bar{K}_{O_1}. \tag{5.175}$$

Prin proiectare pe axe aceste ecuații conduc la:

$$\begin{cases} P_x + P_{1x} + P_{2x} = 0 \\ P_y + P_{1y} + P_{2y} = m(\omega' - \omega)\, x_c \\ P_z + P_{1z} + P_{2z} = 0 \\ y_A P_z - z_A P_y - aP_{2y} = -J_{xz}(\omega' - \omega) \\ z_A P_x - x_A P_z + aP_{2x} = -J_{yz}(\omega' - \omega) \\ x_A P_y - y_A P_x = J_{zz}(\omega' - \omega). \end{cases} \tag{5.176}$$

Prin rezolvarea acestui sistem rezultă:

$$\begin{cases} \omega' = \omega + \dfrac{x_A P_y - y_A P_x}{J_{zz}} \\ P_{1x} = \dfrac{1}{a}[z_A P_x - x_A P_z + (\omega' - \omega)\, J_{yz}] - P_x \\ P_{1y} = mx_c(\omega' - \omega) - \dfrac{1}{a}[y_A P_z - z_A P_y + (\omega' - \omega)\, J_{xz}] - P_y \\ P_{2x} = -\dfrac{1}{a}[z_A P_x - x_A P_z + (\omega' - \omega)\, J_{yz}] \\ P_{2y} = \dfrac{1}{a}[y_A P_z - z_A P_y + (\omega' - \omega)\, J_{xz}] \\ P_{1z} + P_{2z} = -P_z. \end{cases} \tag{5.178}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proiecțiile P_{1z} și P_{2z} rămîn nedeterminate deoarece am considerat în ambele puncte O_1 și O_2 cîte o articulație sferică. Nedeterminarea se poate ridica dacă acceptăm într-unul din cele două puncte (de exemplu în O_2) o articulație cilindrică ($P_{2z} = 0$).

Vom căuta acum condițiile ce trebuie îndeplinite pentru a nu avea percuții de legătură (deci pentru ca axa să nu fie solicitată de nici o forță percutantă). Va trebui ca:

$$P_{1x} = P_{1y} = P_{1z} = P_{2x} = P_{2y} = P_{2z} = 0. \tag{5.178}$$

Din (5.176) rezultă atunci:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = m(\omega' - \omega)\, x_c \\ P_z = 0 \end{cases} \tag{5.179}$$

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{J_{xz}(\omega' - \omega)}{P_y} = \dfrac{J_{xz}}{mx_c} \\ y_A = \text{arbitrar} \\ z_A = \dfrac{J_{xz}(\omega' - \omega)}{P_y} = \dfrac{J_{xz}}{mx_c} \end{cases} \tag{5.180}$$

$$J_{yz} = 0. \tag{5.181}$$

Fie O piciorul perpendicularei coborîte din A pe axa fixă și fie $Ox'y'z'$ sistemul de referință cu originea în O și cu axele paralele cu ale sistemului O_1xyz. Vom avea:

$O(0,\ 0,\ z_A)$;

$$J_{x'z'} = \int_{(D)} x'z'\, dm = \int_{(D)} x(z - z_A)\, dm =$$

$$= J_{xz} - z_A \cdot mx_c = J_{xz} - J_{xz} = 0;$$

$$J_{y'z'} = \int_{(D)} y'z'\, dm = \int_{(D)} y(z - z_A)\, dm = J_{yz} - z_A \cdot y_c \cdot m = 0 \ (y_c = 0).$$

Deci:

$$J_{x'z'} = J_{y'z'} = 0. \tag{5.182}$$

În concluzie pentru a nu avea percuții în axă trebuie îndeplinite următoarele condiții:

1. Percuția exterioară $\bar{P}$ să fie aplicată perpendicular pe planul determinat de centrul maselor și axa fixă (5.179).

2. Punctul de aplicație A al percuției, numit *centrul de percuție* să se afle pe dreapta (5.180):

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{J_{xz}}{mx_c} \\ z_A = \dfrac{J_{xz}}{mx_c}. \end{cases} \tag{5.183}$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Axa fixă să fie axă principală de inerţie pentru punctul O — piciorul perpendicularei din A pe axa fixă (5.182).

Se observă că distanţa x_A de la A la axa fixă este chiar lungimea pendulului matematic sincron cu pendulul fizic format de rigidul nostru dacă axa fixă este orizontală. Deci centrul de oscilaţie şi centrul de percuţie se află la aceeaşi distanţă de axa fixă.

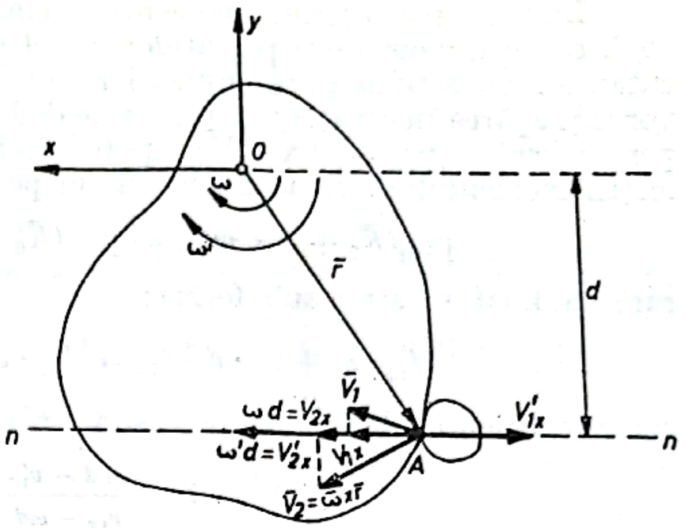


Fig. 5.43

Vom studia acum fenomenul ciocnirii dintre un corp cu axă fixă Oz şi un corp liber mic, asimilabil unui punct material de masă m (fig. 5.43) în ipoteza că normala comună $(n—n)$ la cele două corpuri în punctul de coliziune (ciocnire) A este perpendiculară pe axa fixă Oz. Vom alege axa Ox paralelă cu această normală şi vom nota cu d distanţa dintre acestea. Fie ω şi ω' vitezele unghiulare ale primului corp imediat înainte şi imediat după ciocnire şi fie $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_1'$ vitezele corpului mic în aceste momente. Prin analogie cu fenomenul ciocnirii oblice a două sfere putem afirma că în ipoteza neglijării percuţiilor de frecare cele două componente tangenţiale ale vitezei $\bar{v}_1$ se conservă, deci vom putea scrie:

$$\begin{cases} \bar{v}_1(v_{1x},\ v_{1y},\ v_{1z}) \\ \bar{v}_1'(v_{1x}',\ v_{1y},\ v_{1z}). \end{cases} \tag{5.184}$$

Notînd cu $\bar{r}$ vectorul $\overline{OA}$ vom avea:

$$\bar{r}(x_A,\ -d,\ z_A). \tag{5.185}$$

Fie:

$$\begin{cases} \bar{v}_2 = \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{v}_2' = \bar{\omega}' \times \bar{r}, \end{cases} \tag{5.186}$$

vitezele punctului A al corpului cu axă fixă înainte şi după ciocnire. Vom putea atunci scrie:

$$\begin{cases} \bar{\omega}(0,\ 0,\ \omega) \\ \bar{\omega}'(0,\ 0,\ \omega') \end{cases} \tag{5.187}$$

$$\begin{cases} \bar{v}_2(\omega d,\ \omega x_A,\ 0) \\ \bar{v}_2'(\omega' d,\ \omega' x_A,\ 0) \end{cases} \tag{5.188}$$

$$\begin{cases} \bar{K}_0(-J_{xz}\omega,\ -J_{yz}\omega,\ J_{zz}\omega) \\ \bar{K}_0'(-J_{xz}\omega',\ -J_{yz}\omega',\ J_{zz}\omega'), \end{cases} \tag{5.189}$$

vectorii (5.189) fiind momentele cinetice înainte şi după ciocnire ale corpului cu axă fixă.

Scanned with OKEN Scanner

La aplicarea teoremei momentului cinetic (5.156) pentru sistemul celor două corpuri, momentele percuțiilor din A se anulează reciproc, forțele percutante fiind acțiune și reacțiune, iar dacă proiectăm ecuația pe axa Oz nu vor mai apărea în ecuație nici percuțiile de legătură, momentele acestora fiind perpendiculare pe axa fixă. Vom putea deci scrie legea de conservare a proiecției momentului cinetic al sistemului pe axa fixă:

$$\mathrm{pr}_{Oz}(\bar{K}_0 + \bar{r} \times m\bar{v}_1) = \mathrm{pr}_{Oz}(\bar{K}_0' + \bar{r} \times m\bar{v}_1'), \tag{5.190}$$

care în final se scrie sub forma:

$$J_{zz} \cdot \omega + m \cdot d \cdot v_{1x} = J_{zz} \cdot \omega' + m \cdot d \cdot v_{1x}'. \tag{5.191}$$

Coeficientul de restituire se scrie în cazul nostru:

$$\lambda = \frac{\omega' d - v_{1x}'}{v_{1x} - \omega d}. \tag{5.192}$$

Rezolvînd sistemul (5.191), (5.192) în raport cu v_{1x}' și ω', obținem relațiile:

$$\begin{cases} v_{1x}' = v_{1x} - \dfrac{(v_{1x} - \omega \cdot d)(1 + \lambda)}{1 + md^2/J_{zz}} \\ \omega' = \omega + \dfrac{(v_{1x} - \omega d)(1 + \lambda)}{1 + J_{zz}/md^2} \end{cases} \tag{5.193}$$

relații similare cu (5.167) și (5.168). Mai facem acum observația că într-o manieră cu totul similară se poate studia problema ciocnirii unui corp mic cu un corp cu un punct fix sau cu un corp liber. Studiul se poate face fie plecînd de la teoremele generale (5.155) și (5.156), fie plecînd de la o lege de conservare și de la expresia coeficientului de restituire. În ambele cazuri mișcările se studiază într-un interval de timp foarte scurt care conține momentul ciocnirii. Pentru a ilustra modul de aplicare a legilor de mișcare (5.144) și (5.145) care studiază mișcările percutante într-un interval de timp finit, vom prezenta în paragraful următor problema oscilatorului liniar percutat.

5.4.4. **Oscilatorul liniar percutat.** Fie un punct material $M(x, 0, 0)$ de masă m (fig. 5.44), acționat de o forță elastică $\bar{F} = -Kx\bar{i}$ și căruia i se aplică la momentele t_j percuțiile $\bar{P}_j = P_j \cdot \bar{i}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Condițiile inițiale ale mișcării sînt:

$$\begin{cases} \bar{r}(0) = \bar{r}_0(x_0, 0, 0) \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0(v_0, 0, 0). \end{cases} \tag{5.194}$$

Spunem în acest caz că avem de-a face cu un oscilator liniar percutat. Proiectînd ecuația de mișcare (5.144) pe axa Ox obținem ecuația:

$$-Kx + \sum_j P_j \delta(t - t_j) = m\ddot{x}, \tag{5.195}$$

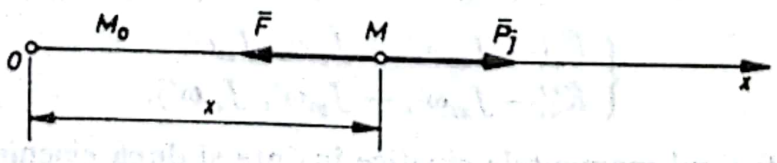


Fig. 5.44

Scanned with OKEN Scanner

care se scrie sub forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \sum_j \frac{P_j}{m} \delta(t - t_j), \tag{5.196}$$

în care:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5.197}$$

Aplicînd ecuației (5.196) *transformata Laplace* obținem relația:

$$q^2 \cdot X(q) - q \cdot x_0 - v_0 + \omega^2 \cdot X(q) = \sum_j \frac{P_j}{m} e^{-qt_j}, \tag{5.198}$$

din care deducem:

$$X(q) = \frac{q}{q^2 + \omega^2} \cdot x_0 + \frac{\omega}{q^2 + \omega^2} \cdot \frac{v_0}{\omega} + \sum_j \frac{P_j}{m\omega} \cdot \frac{\omega}{q^2 + \omega^2} \cdot e^{-qt_j}. \tag{5.199}$$

Inversînd *transformatele Laplace* din relația (5.199) obținem ecuația de mișcare a lui M:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \sum_j \frac{P_j}{m\omega} \cdot \sin \omega(t - t_j) \cdot H(t - t_j). \tag{5.200}$$

5.4.5. **Percuții la aplicarea bruscă de legături rigide. Teorema lui Carnot.** Fie un sistem de rigide în a cărui mișcare se intervine prin aplicarea bruscă a unor legături rigide, persistente. Fie A un punct al sistemului, de masă dm și a cărui viteză suferă în urma acestui fenomen de ciocnire o variație bruscă de la $\bar{v}$ la $\bar{v}'$. Aceasta se datorește unei percuții:

$$d\bar{P} = (\bar{v}' - \bar{v}) \cdot dm. \tag{5.201}$$

Înmulțind scalar această relație cu viteza de după ciocnire $\bar{v}'$ obținem:

$$\bar{v}' \cdot (\bar{v}' - \bar{v}) \cdot dm = \bar{v}' \cdot d\bar{P}, \tag{5.202}$$

care se mai scrie:

$$\frac{1}{2}(v'^2 - v^2) \cdot dm + \frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{v}')^2 \cdot dm = \bar{v}' \cdot dP. \tag{5.203}$$

Integrînd relația (5.203) pe întregul sistem (S) obținem:

$$\int_{(S)} \frac{1}{2} \cdot v'^2 \cdot dm - \int_{(S)} \frac{1}{2} v^2 \cdot dm + \int_{(S)} \frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{v}')^2 \cdot dm = \int_{(S)} \bar{v}' \cdot d\bar{P}. \tag{5.204}$$

În relația (5.204) ultima integrală este nulă:

$$\int_{(S)} \bar{v}' \cdot d\bar{P} = 0, \tag{5.205}$$

percuțiile ce apar fiind sau două cîte două egale și de sens contrar (percuții corespunzătoare forțelor interioare ale rigidelor), sau percuții de legătură fixe ($\bar{v}' = 0$ pentru un punct fixat brusc), sau percuții perpendiculare pe vitezele punctelor legate (cînd legătura impusă brusc unui punct permite o mișcare a acestuia, în ipoteza neglijării percuțiilor de frecare, forțele de legătură

Scanned with OKEN Scanner

și respectiv percuțiile de legătură sînt dirijate după direcțiile deplasărilor independente împiedicate și deci sînt perpendiculare pe direcția deplasării permise: $d\bar{P} \perp \bar{v}'$).

Vom face următoarele notații:

$$\bar{v}_p = \bar{v} - \bar{v}', \tag{5.206}$$

viteza pierdută a punctului A;

$$E_c = \int_{(S)} \frac{1}{2} v^2 \cdot dm, \tag{5.207}$$

energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire;

$$E'_c = \int_{(S)} \frac{1}{2} v'^2 \cdot dm, \tag{5.208}$$

energia cinetică a sistemului după ciocnire;

$$E_{cp} = \int_{(S)} \frac{1}{2} v_p^2 \cdot dm, \tag{5.209}$$

energia cinetică a vitezelor pierdute.

Cu aceste observații și notații relația (5.204) se scrie:

$$E_c - E'_c = E_{cp}, \tag{5.210}$$

care reprezintă *teorema lui Carnot* pe care o enunțăm în felul următor: la aplicarea bruscă a unor legături rigide, persistente și fără frecări, în mișcarea unui sistem mecanic oarecare, pierderea de energie cinetică ($E_c - E'_c$) este egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute (E_{cp}).

APLICAȚII

1. Un vagonet de greutate G se deplasează cu o viteză constantă v. În T roțile din față se lovesc de un opritor și vagonetul se oprește. Dacă momentul de inerție al vagonetului în raport cu axa normală la planul figurii și care trece prin centrul de greutate C este J_c, să se determine cu cît se ridică roțile din spate ale vagonetului în momentul ciocnirii. Se mai dau: a, h și d (fig. 5.45).

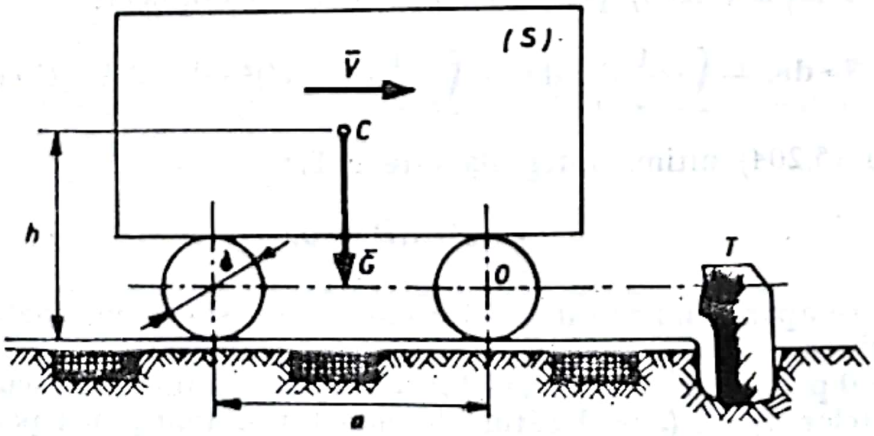


Fig. 5.45

Rezolvare:

Aplicînd relația (5.156) în raport cu punctul O și avînd în vedere că nu avem percuții exterioare putem scrie:

$$\bar{K}_{02} - \bar{K}_{01} = 0$$
$$\bar{K}_{02} = \bar{K}_{01}$$

unde:

$$\bar{K}_{01} = \int_{(S)} \bar{r} \times \bar{v} \cdot dm = \int_{(S)} \bar{r}\, dm \times \bar{v} = m\, \bar{r}_c \times \bar{v}$$

$$K_{01} = mv\left(h - \frac{d}{2}\right) \text{ și } K_{02} = J_0\omega.$$

Deci:

$$J_0\omega = mv\left(h - \frac{d}{2}\right).$$

Aplicînd teorema lui *Steiner* avem:

$$J_0 = J_c + m\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(h - \frac{d}{2}\right)^2\right]. \tag{1}$$

Viteza unghiulară este:

$$\omega = \frac{mv}{J_0}\left(h - \frac{d}{2}\right). \tag{2}$$

Notînd cu s distanța presupusă mică cu care se ridică roțile din spate, din teorema energiei cinetice rezultă:

$$\frac{1}{2} J_0\omega^2 = G\frac{s}{2}, \tag{3}$$

centrul C deplasîndu-se cu $s/2$.

Din (1), (2) și (3) rezultă:

$$s = \frac{Gv^2\left(h - \frac{d}{2}\right)^2}{g^2\left\{J_c + m\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(h - \frac{d}{2}\right)^2\right]\right\}}.$$

2. Într-un concasor cu ciocane cad vertical bucăți de minereu și sînt zdrobite cu ciocanele 2 articulate în toba *1* care se rotește cu turație mare în jurul axului său (fig. 5.46). În ce punct trebuie articulate ciocanele pentru ca ciocnirea să nu se transmită asupra articulațiilor și prin urmare și asupra axei tobei? Ciocanele pot fi considerate ca bare drepte, omogene.

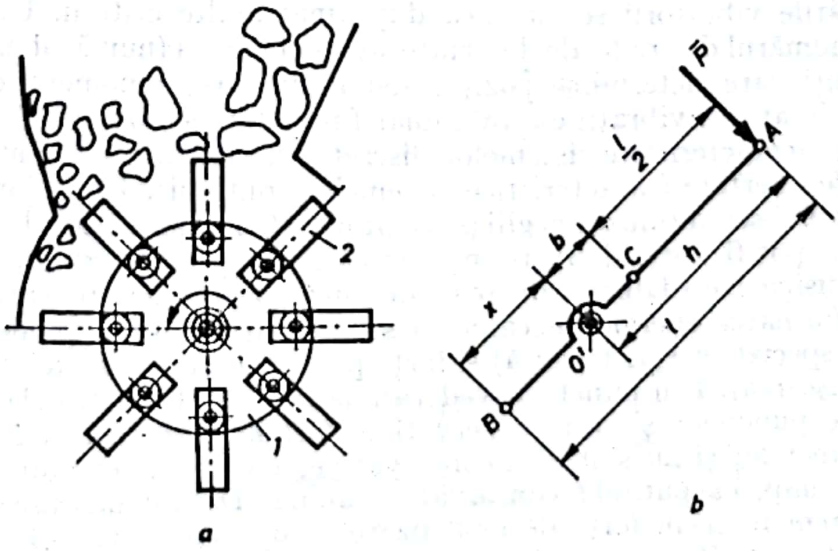


Fig. 5.46

Rezolvare

Fie m masa ciocanului și l lungimea sa. Centrul de greutate C al ciocanului se găsește la mijlocul barei. Notăm cu b respectiv cu h distanța de la articulația O la centrul de greutate C, respectiv capătul A al barei.

Avînd în vedere că centrul de percuție al barei coincide cu punctul A, avem conform primei relații (5.183):

$$h = b + \frac{J_c}{mb},$$

însă:

$$h = b + \frac{l}{2}.$$

Comparînd aceste relații obținem:

$$b = \frac{2J_c}{ml}$$

și deoarece momentul de inerție în raport cu centrul de greutate al unei bare este $J_c = \frac{ml^2}{12}$ rezultă:

$$b = \frac{l}{6}.$$

Distanța x de la articulația 0 la capătul celălalt al barei evident se poate determina din relația:

$$x = \frac{l}{2} - b = \frac{l}{3}.$$

În mod analog se poate rezolva problema în cazul ciocanelor de alte forme.

5.5. MIȘCĂRI VIBRATORII

Mișcările vibratorii sînt mișcările sistemelor de puncte sau rigide sub acțiunea forțelor de tip elastic și a altor forțe (eventual) în jurul poziției de repaus a sistemului. Mișcările vibratorii reprezintă în general mișcări de amplitudine finită ale punctelor sistemului. Excepțiile însă prezintă o importanță deosebită, din motive ușor de intuit.

Mișcările vibratorii se clasifică după mai multe criterii. Un prim criteriu este numărul de grade de libertate ale sistemului (numărul parametrilor independenți care determină poziția sistemului la un moment dat). După acest criteriu avem: vibrații cu un număr finit (unul sau mai multe) de grade de libertate (caracteristice sistemelor discrete) și vibrații cu un număr infinit de grade de libertate (caracteristice sistemelor continui). Un alt criteriu este prezența sau absența (uneori neglijarea) altor forțe în afara celor de tip elastic. Aceste forțe pot fi: forțe de rezistență (frecări), numite și forțe de amortizare sau forțe disipative (datorită disipării de energie mecanică pe care o produc prin transformarea energiei mecanice a sistemului în forme de energie nemecanică, în special energie termică) și forțe perturbatoare sau excitatoare (care întrețin mișcarea). Din punct de vedere analitic forțele de tip elastic depind de pozițiile punctelor și sînt conservative, forțele de amortizare depind de vitezele punctelor și nu sînt deci conservative, iar forțele excitatoare depind explicit de timp, ele putînd fi conservative sau nu. Dacă în mișcarea vibratorie a unui sistem intervin forțe de amortizare (disipative) vibrațiile se numesc *amortizate* (sau *disipative*), iar în cazul absenței acestora vibrațiile se numesc

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Fie m masa ciocanului și l lungimea sa. Centrul de greutate C al ciocanului se găsește la mijlocul barei. Notăm cu b respectiv cu h distanța de la articulația O la centrul de greutate C, respectiv capătul A al barei.

Avînd în vedere că centrul de percuție al barei coincide cu punctul A, avem conform primei relații (5.183):

$$h = b + \frac{J_c}{mb},$$

însă:

$$h = b + \frac{l}{2}.$$

Comparînd aceste relații obținem:

$$b = \frac{2J_c}{ml}$$

și deoarece momentul de inerție în raport cu centrul de greutate al unei bare este $J_c = \frac{ml^2}{12}$ rezultă:

$$b = \frac{l}{6}.$$

Distanța x de la articulația 0 la capătul celălalt al barei evident se poate determina din relația:

$$x = \frac{l}{2} - b = \frac{l}{3}.$$

În mod analog se poate rezolva problema în cazul ciocanelor de alte forme.

5.5. MIȘCĂRI VIBRATORII

Mișcările vibratorii sînt mișcările sistemelor de puncte sau rigide sub acțiunea forțelor de tip elastic și a altor forțe (eventual) în jurul poziției de repaus a sistemului. Mișcările vibratorii reprezintă în general mișcări de amplitudine finită ale punctelor sistemului. Excepțiile însă prezintă o importanță deosebită, din motive ușor de intuit.

Mișcările vibratorii se clasifică după mai multe criterii. Un prim criteriu este numărul de grade de libertate ale sistemului (numărul parametrilor independenți care determină poziția sistemului la un moment dat). După acest criteriu avem: vibrații cu un număr finit (unul sau mai multe) de grade de libertate (caracteristice sistemelor discrete) și vibrații cu un număr infinit de grade de libertate (caracteristice sistemelor continui). Un alt criteriu este prezența sau absența (uneori neglijarea) altor forțe în afara celor de tip elastic. Aceste forțe pot fi: forțe de rezistență (frecări), numite și forțe de amortizare sau forțe disipative (datorită disipării de energie mecanică pe care o produc prin transformarea energiei mecanice a sistemului în forme de energie nemecanică, în special energie termică) și forțe perturbatoare sau excitatoare (care întrețin mișcarea). Din punct de vedere analitic forțele de tip elastic depind de pozițiile punctelor și sînt conservative, forțele de amortizare depind de vitezele punctelor și nu sînt deci conservative, iar forțele excitatoare depind explicit de timp, ele putînd fi conservative sau nu. Dacă în mișcarea vibratorie a unui sistem intervin forțe de amortizare (disipative) vibrațiile se numesc *amortizate* (sau *disipative*), iar în cazul absenței acestora vibrațiile se numesc

Scanned with OKEN Scanner

neamortizate (sau *nedisipative*). Dacă în mișcarea vibratorie a unui sistem intervin forțe excitatoare vibrațiile se numesc *forțate*, iar în cazul absenței acestora vibrațiile se numesc *libere*. Un sistem poate deci avea fie vibrații libere neamortizate sau amortizate, fie vibrații forțate neamortizate sau amortizate.

În cele ce urmează se face o foarte sumară prezentare a principalelor probleme din teoria vibrațiilor, care este un domeniu extrem de vast și despre care s-au publicat numai în ultimele cîteva decenii un număr impresionant de tratate, articole, lucrări etc.

5.5.1. **Vibrații cu un grad de libertate.** Fie un punct material M de masă m (fig. 5.47) acționat de o forță elastică $\bar{F} = -Kx\,\bar{i}$, de o forță de amortizare $\bar{F}_a$ pe care o vom numi vîscoasă dacă are expresia $\bar{F}_a = -c\bar{v} = -c\dot{x}\bar{i}$ sau uscată dacă are expresia $\bar{F}_a = -F_a \operatorname{sgn} \dot{x}\bar{i}$, și de o forță excitatoare $\bar{F}_e = F_e(t)\bar{i}$. Funcția sgn u (signum de u) o definim astfel:

$$\operatorname{sgn} u = 2H(u) - 1 = \begin{cases} 1 \text{ pt. } u > 0 \\ -1 \text{ pt. } u < 0, \end{cases} \tag{5.211}$$

în care $H(u)$ este funcția treaptă a lui *Heaviside*. O forță elastică poate fi creată cu ajutorul unui resort elicoidal (fig. 5.48, *a*). O forță de amortizare vîscoasă poate fi creată cu ajutorul unui amortizor vîscos (cilindru cu lichid în care poate aluneca un piston cu găuri) (fig. 5.48, *b*), iar o forță de amortizare uscată poate fi creată prin simpla frecare de alunecare a masei m pe planul orizontal. Să considerăm pentru exemplificare cazul unei amortizări vîscoase și al unei forțe excitatoare de tipul:

$$\bar{F}_e = F_0 \cos \omega_0 t\bar{i}. \tag{5.212}$$

Sistemul mecanic este prezentat în figura 5.49, iar ecuația sa de mișcare:

$$\sum_i \bar{F}_i = m\bar{a}, \tag{5.213}$$

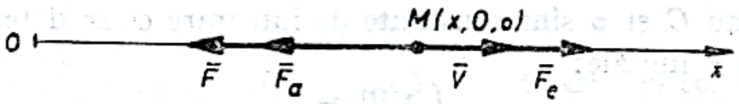


Fig. 5.47

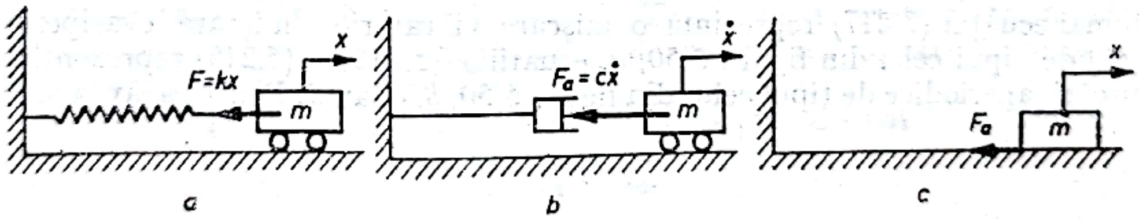


Fig. 5.48

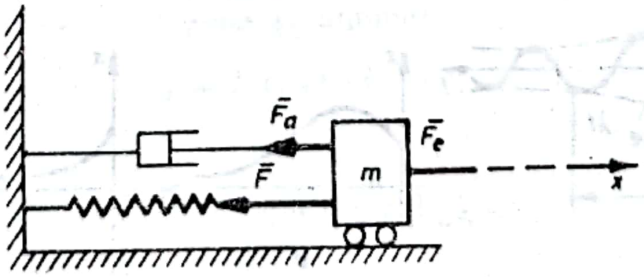


Fig. 5.49

proiectată pe axa Ox conduce la ecuația diferențială liniară, cu coeficienți constanți, neomogenă:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = A\cos\omega_0 t. \tag{5.214}$$

în care:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m} \\ \lambda &= \frac{C}{2m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{K}{m}} \end{aligned}\right\} \tag{5.215}$$

Ecuația (5.214) este ecuația unei vibrații forțate amortizate (disipative) în care punînd $\lambda = 0$ obținem ecuația unei vibrații forțate neamortizate (nedisipative). Ecuația omogenă:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{5.216}$$

reprezintă ecuația unei vibrații libere amortizate (disipative) în care punînd $\lambda = 0$ obținem ecuația unei vibrații libere neamortizate (nedisipative).

Soluția generală a ecuației (5.216) este:

$$\text{— pt. } \lambda < \omega : x = e^{-\lambda t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ce^{-\lambda t}\sin(\omega_1 t + \varphi); \tag{5.217}$$

$$\text{— pt. } \lambda = \omega: x = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t); \tag{5.218}$$

$$\text{— pt. } \lambda > \omega : x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \tag{5.219}$$

în care:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \\ \lambda_{1,2} &= \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \end{aligned}\right. \tag{5.220}$$

iar C_1 și C_2 sau C și φ sînt constante de integrare ce se determină cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$\left\{\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0. \end{aligned}\right. \tag{5.221}$$

Numai ecuația (5.217) reprezintă o mișcare vibratorie (mișcare cvasiperiodică) de tipul celei din figura 5.50, *a*, ecuațiile (5.218) și (5.219) reprezentînd mișcări aperiodice de tipul celor din figura 5.50, *b*, *c* sau *d*. Pentru a avea deci

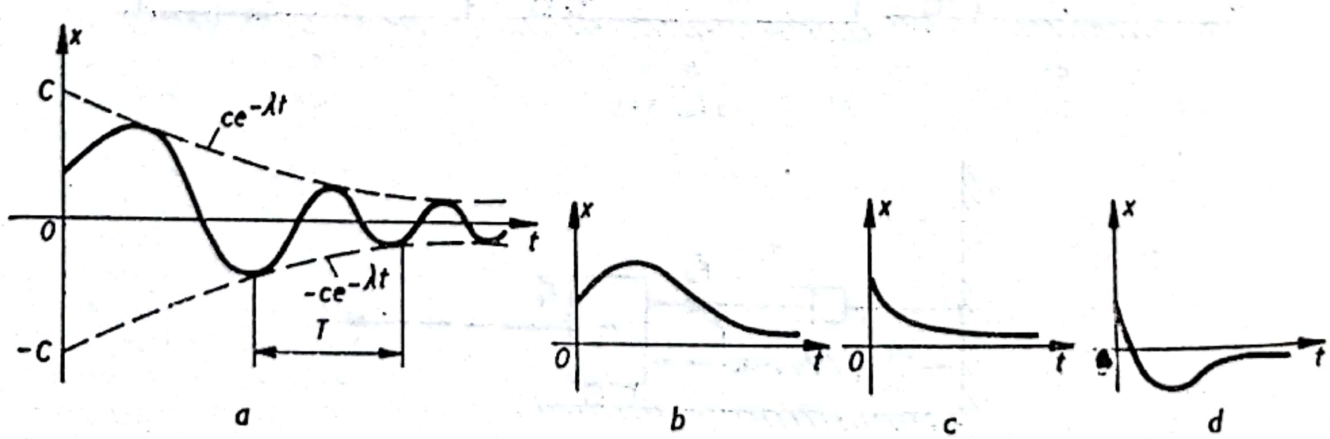


Fig. 5.50

o vibrație liberă amortizată este necesar să avem relația $\lambda < \omega$, care cu ajutorul relațiilor (5.215) se scrie sub forma:

$$c < c_0 = 2\sqrt{Km}. \quad (5.222)$$

Coeficientul de amortizare c_0 legat de constanta elastică K prin relația (5.222) se numește *coeficientul de amortizare critic*.

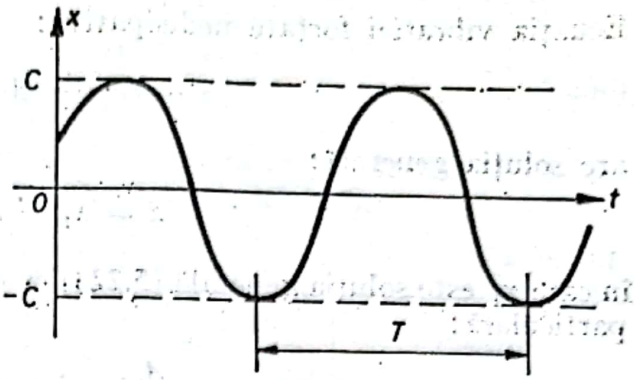


Fig. 5.51

Ecuația vibrației libere neamortizate:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5.223)$$

are soluția generală:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = C \sin (\omega t + \varphi), \quad (5.224)$$

în care constantele de integrare C_1 și C_2 sau C și φ se determină cu ajutorul condițiilor inițiale (5.221).

Graficul unei funcții (5.224) arată ca în figura 5.51.

Mișcarea este periodică cu perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.225)$$

Comparînd această perioadă cu cvasiperioada T_1 a vibrației libere amortizate:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \quad (5.226)$$

deducem:

$$T_1 > T. \quad (5.227)$$

Putem spune deci că la o vibrație liberă amortizarea vîscoasă are ca efect micșorarea succesivă a amplitudinilor (în progresie geometrică cu rația $e^{-\lambda T_1}$ ($\lambda T_1 = \delta$ numindu-se *decrement logaritmic*) și o încetinire a mișcării (o creștere a perioadei de la T la cvasiperioada T_1). Se poate arăta că tot un efect de micșorare succesivă a amplitudinilor și de încetinire a mișcării îl are asupra unei vibrații libere și frecarea uscată.

Soluția generală a ecuației vibrațiilor forțate disipative (5.214) este:

$$x = x_1 + x_2, \quad (5.228)$$

în care x_1 este soluția generală a ecuației omogene, deci una din relațiile (5.217), (5.218) sau (5.219) care se amortizează în timp, iar x_2 este o soluție particulară a ecuației neomogene și anume:

$$x_2 = B \cos (\omega_0 t - \varphi), \quad (5.229)$$

în care:

$$\begin{cases} B = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2}} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{2\lambda\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}. \end{cases} \quad (5.230)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația vibrației forțate nedisipative:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A \cos \omega_0 t \tag{5.231}$$

are soluția generală:

$$x = x_1 + x_2, \tag{5.232}$$

în care x_1 este soluția generală (5.224) a ecuației omogene, iar x_2 este soluția particulară:

$$x_2 = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t \quad (\text{pt. } \omega_0 \neq \omega) \tag{5.233}$$

sau:

$$x_2 = \frac{At}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\text{pt. } \omega_0 = \omega). \tag{5.234}$$

Relația (5.233) se poate obține din relațiile (5.229) și (5.230) prin particularizarea $\lambda = 0$.

Se observă că la vibrațiile forțate disipative odată cu scurgerea timpului vibrația liberă x_1 se amortizează, rămînînd doar vibrația forțată x_2. Un studiu extrem de interesant al amplitudinii B și al așa-zisei diferențe de fază φ a acestei vibrații se poate face trecînd în relațiile (5.230) la mărimi adimensionale. Noi ne vom mărgini însă să remarcăm doar efectul pe care-l are amortizarea vîscoasă în fenomenul vibrațiilor forțate. În timp ce la vibrațiile nedisipative deplasarea x_2 este „în fază" cu forța excitatoare F_e (ambele fiind funcții armonice de același argument), iar amplitudinea vibrației tinde spre infinit cînd pulsația ω_0 a forței excitatoare tinde spre pulsația proprie ω a vibrației libere (caz în care spunem că se produce rezonanța), la vibrațiile disipative, datorită prezenței amortizării vîscoase, deplasarea x_2 prezintă o diferență de fază φ, față de forța excitatoare F_e, iar amplitudinea vibrației rămîne finită chiar și la rezonanță. Se poate arăta că amplitudinea B are un maxim pentru o valoarea a pulsației ω_0 mai mică decît pulsația proprie ω, însă foarte apropiată de aceasta, acest maxim crescînd spre infinit odată cu scăderea coeficientului λ spre zero (deci odată cu scăderea amortizării).

Mai facem observația că dacă forța excitatoare este o funcție periodică se pot studia foarte comod vibrațiile forțate dezvoltînd funcția periodică într-o serie Fourier, iar dacă forța excitatoare este o funcție oarecare de timp (cazul general) ecuația neomogenă:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = f(t) \tag{5.235}$$

are ca soluție generală funcția:

$$x(C_1, C_2, t) = x_1 (C_1, C_2, t) + x_2 (t), \tag{5.236}$$

în care x_1 este soluția generală a ecuației omogene, iar x_2 este produsul de convoluție:

$$x_2(t) = \int_0^t U(t - \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau, \tag{5.237}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $U(t)$ este o soluție particulară a ecuației omogene care satisface condițiile:

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ \dot{U}(0) = 1. \end{cases} \tag{5.238}$$

Funcția $U(t)$ care satisface aceste condiții este dată în tabelul 5.1. Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale (5.221).

Tabelul 5.1.

Felul vibrațiilor	λ	$U(t)$	Explicații
Nedisipative	$\lambda = 0$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$	
Disipative cu amortizare subcritică	$\lambda < \omega$ $(c < c_0)$	$\frac{1}{\omega_1} e^{-\lambda t} \sin \omega_1 t$	$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$
Disipative cu amortizare critică	$\lambda = \omega$ $(c = c_0)$	$t\, e^{-\lambda t}$	
Disipative cu amortizare supracritică	$\lambda > \omega$ $(c > c_0)$	$\frac{1}{\alpha} e^{-\lambda t} \operatorname{sh} \alpha t$	$\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$

Un caz particular foarte interesant este cazul cînd forța excitatoare este o forță percutantă și deci:

$$f(t) = \frac{P}{m} \cdot \delta(t - t_0), \tag{5.239}$$

în care P este percuția aplicată la timpul $t = t_0$.

În acest caz vibrația forțată x_2 este:

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t_0 \notin (0, t) \text{ deci } t < t_0 \\ \frac{P}{m} \cdot U(t - t_0) \text{ pt. } t_0 \in [0, t] \text{ deci } t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{5.240}$$

5.5.2. **Vibrații cu n grade de libertate.** Pentru a studia vibrațiile nedisipative ale unui sistem cu n grade de libertate vom pleca de la un exemplu, scriind ecuațiile de mișcare ale sistemului cu trei grade de libertate din figura 5.52.

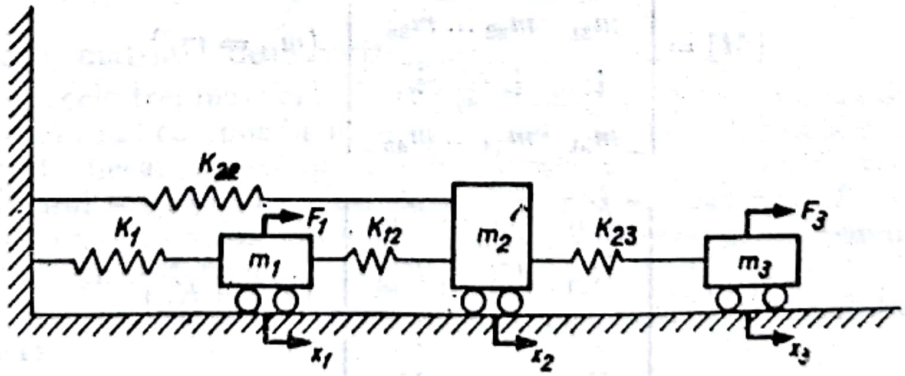


Fig. 5.52

Ecuaţiile vibraţiilor forţate ale celor trei mase din sistem sub acţiunea forţelor elastice din arcuri şi a forţelor excitatoare sînt:

$$\begin{cases} -K_{11}x_1 - K_{12}(x_1 - x_2) + F_1 = m_1\ddot{x}_1 \\ -K_{12}(x_2 - x_1) - K_{22}x_2 - K_{23}(x_2 - x_3) = m_2\ddot{x}_2 \\ -K_{23}(x_3 - x_2) + F_3 = m_3\ddot{x}_3. \end{cases} \tag{5.241}$$

Sistemul (5.241) se poate scrie sub forma matricială:

$$[M]\,[\ddot{X}] + [K]\,[X] = [F], \tag{5.242}$$

în care intervin matricile pătrate simetrice:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{5.243}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{12} & 0 \\ -K_{21} & K_{22} & -K_{23} \\ 0 & -K_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (K_{ij} = K_{ji}) \tag{5.244}$$

şi matricile coloană:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \tag{5.245}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ 0 \\ F_3(t) \end{bmatrix}. \tag{5.246}$$

În cazul cel mai general al vibraţiilor forţate cu n grade de libertate sistemul ecuaţiilor de mişcare se poate pune tot sub forma (3.242) în care matricile simetrice:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \dots m_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} \dots m_{nn} \end{bmatrix} \quad (m_{ij} = m_{ji}) \tag{5.247}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \dots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} \dots K_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} \dots K_{nn} \end{bmatrix} \quad (K_{ij} = K_{ji}) \tag{5.248}$$

Scanned with OKEN Scanner

poartă respectiv numele de matrice de inerție și matrice de elasticitate, iar matricile coloană:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{5.249}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} \tag{5.250}$$

sînt respectiv matricea deplasărilor și matricea forțelor excitatoare. În cazul vibrațiilor libere această ultimă matrice este nulă și deci ecuația matricială a vibrațiilor libere nedisipative este:

$$[M]\,[\ddot{X}] + [K]\,[X] = [0]. \tag{5.251}$$

În mod cu totul analog se scriu ecuațiile matriciale ale vibrațiilor disipative cu amortizare vîscoasă:

$$[M]\,[\ddot{X}] + [C]\,[\dot{X}] + [K]\,[X] = [F] \tag{5.252}$$

pentru vibrațiile forțate și:

$$[M]\,[\ddot{X}] + [C]\,[\dot{X}] + [K]\,[X] = [0] \tag{5.253}$$

pentru vibrațiile libere, în care matricea simetrică:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \ldots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \ldots C_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n1} & C_{n2} \ldots C_{nn} \end{bmatrix} \quad (C_{ij} = C_{ji}) \tag{5.254}$$

se numește matricea de amortizare.

Dacă cele trei matrici $[M]$, $[C]$ și $[K]$ sînt diagonale sistemul se numește decuplat, el fiind compus în acest caz din n sisteme independente, cu un grad de libertate fiecare. Dacă oricare dintre matricile $[M]$ sau $[C]$ nu este diagonală sistemul se cheamă cuplat dinamic, iar dacă matricea $[K]$ nu este diagonală sistemul se numește cuplat static. Spre exemplu sistemul din figura 5.52 este cuplat static și decuplat dinamic.

Pentru a rezolva ecuația matricială (5.251) se caută o soluție periodică de forma:

$$[X] = [Q] \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{5.255}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care matricea coloană:

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{5.256}$$

este matricea amplitudinilor. Introducînd (5.255) în (5.251) obţinem relaţia matricială:

$$([K] - \omega^2 [M])\,[Q] = [0], \tag{5.257}$$

care reprezintă un sistem omogen de n ecuaţii liniare cu n necunoscute q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pentru ca acesta să admită şi soluţii nebanale este necesar ca determinantul sistemului să se anuleze:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = \begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 m_{11} \ldots K_{1n} - \omega^2 m_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ K_{n1} - \omega^2 m_{n1} \ldots K_{nn} - \omega^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.258}$$

Acest determinant, numit şi *determinantul lui Lagrange*, prin anulare conduce la ecuaţia caracteristică a sistemului vibrator. Ea este o ecuaţie algebrică de gradul n în ω^2. Se demonstrează că această ecuaţie are întotdeauna rădăcini pozitive.

Rezultă deci din rezolvarea ecuaţiei n rădăcini pozitive ω_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ şi n rădăcini negative $-\omega_j$. Cele n rădăcini pozitive se numesc pulsaţiile proprii ale sistemului vibrator. Înlocuind pe rînd aceste pulsaţii proprii în sistemul de ecuaţii (5.257) se poate determina pentru fiecare ω_j cîte un set de amplitudini q_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, abstracţie făcînd de o constantă arbitrară care poate fi scoasă factor comun în faţa matricii coloană:

$$[Q]_j = \begin{bmatrix} q_{1j} \\ q_{2j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.259}$$

Putem de exemplu pune de la început $q_{1j} = 1$, $\omega = \omega_j$, rezolvînd apoi $n - 1$ dintre ecuaţiile sistemului compatibil nedeterminat cu o necunoscută arbitrară (5.257) în raport cu necunoscutele independente $q_{2j}, q_{3j}, \ldots, q_{nj}$.

Cu aceasta, vom numi matricea:

$$[X]_j = [Q]_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.260}$$

modul propriu de vibraţie al sistemului, corespunzător valorii proprii $\lambda_j = \omega_j^2$. Vibraţia liberă a sistemului este o combinaţie liniară a acestor moduri proprii de vibraţie:

$$[X] = \sum_{j=1}^{n} C_j [X]_j = \sum_{j=1}^{n} C_j [Q_j] \cdot \sin(\omega_j t + \varphi_j). \tag{5.261}$$

Scanned with OKEN Scanner

Constantele arbitrare scoase în factor la matricile $[Q_j]$ se înglobează în constantele arbitrare C_j. Determinarea celor $2n$ constante C_j și φ_j din (5.261) se face cu ajutorul celor $2n$ condiții inițiale ale mișcării:

$$\begin{cases} x_i(0) = x_{i0} \\ \dot{x}_i(0) = v_{i0} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.262}$$

S-a introdus mai sus noțiunea de valoare proprie $\lambda_j = \omega_j^2$ deoarece cu notațiile:

$$\omega^2 = \lambda \tag{5.263}$$

$$[M]^{-1} \cdot [K] = [H] \tag{5.264}$$

ecuația matricială (5.257) poate fi scrisă sub forma:

$$[H]\,[Q] = \lambda[Q], \tag{5.265}$$

care reprezintă problema de valori proprii a matricii (nu neapărat simetrice) $[H]$. Valorile proprii se determină prin anularea determinantului:

$$\det\,([H] - \lambda[I]) = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & \ldots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.266}$$

în care $[I]$ este matricea unitate. Prin înlocuirea succesivă a celor n valori proprii λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ în sistemul de ecuații (5.265) se determină cei n „vectori proprii":

$$[Q]_j = \begin{bmatrix} q_{1j} \\ q_{2j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.267}$$

cu aproximația unei constante ce poate fi scoasă factor comun în fața „vectorului" (5.267). În continuare calculul urmează ca mai sus scriind modurile proprii de vibrație (5.260), soluția ecuației matriciale (5.251) a vibrațiilor libere nedisipative fiind (5.261) cu condițiile inițiale (5.262).

În cele ce urmează (pentru simplificarea scrierii) vom renunța la parantezele pătrate în notarea matricilor, toate operațiile fiind însă cele din algebra matricială. Vom scrie deci „operatorul matricial" (matricea) H sub forma:

$$H = M^{-1}K. \tag{5.268}$$

Fie doi „vectori" arbitrari (matrici coloană): u și v. Vom defini produsul scalar al vectorilor u și v ca fiind expresia:

$$\langle u, v \rangle = u^T M v, \tag{5.269}$$

T simbolizînd operația de transpunere.

Produsul scalar astfel definit este o formă biliniară simetrică, datorită simetriei matricei M $(m_{ij} = m_{ji})$ și în consecință el este comutativ (așa cum

Scanned with OKEN Scanner

trebuie să fie orice produs scalar dintr-un spațiu oarecare). Într-adevăr, reprezentînd o matrice de ordinul unu, putem scrie produsul scalar ca fiind:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle^T = (u^T M v)^T = v^T M^T u = v^T M u \tag{5.270}$$

și deci:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle. \tag{5.271}$$

Am folosit aici și vom folosi și în continuare relațiile:

$$\begin{cases} M^T = M \\ (M^{-1})^T = M^{-1} \\ K^T = K \end{cases} \tag{5.272}$$

datorate simetriei acestor matrici.

Vom putea acum scrie:

$$\langle Hu, v \rangle = (M^{-1} \cdot K \cdot u)^T \cdot M \cdot v = u^T \cdot K \cdot M^{-1} \cdot M \cdot v = u^T \cdot K \cdot v; \tag{5.273}$$

$$\langle u, Hv \rangle = u^T \cdot M \cdot (M^{-1} \cdot K \cdot v) = u^T \cdot K \cdot v, \tag{5.274}$$

și deci:

$$\langle Hu, v \rangle = \langle u, Hv \rangle. \tag{5.275}$$

Vom avea de asemenea:

$$E_p = \langle u, Hu \rangle = \langle Hu, u \rangle = u^T \cdot K \cdot u > 0; \tag{5.276}$$

$$E_c = \langle u, u \rangle = u^T \cdot M \cdot u > 0, \tag{5.277}$$

ambele fiind forme pătratice. Se poate arăta că acestea reprezintă tocmai energia potențială și respectiv energia cinetică a sistemului la deplasarea u.

Un operator (nu neapărat matricial) care satisface relația (5.275) se numește *autoadjunct*. Dacă operatorul îndeplinește relația (5.276) el se cheamă a fi *definit pozitiv* (sau mai pe scurt pozitiv).

Vom arăta acum că problema de valori proprii:

$$Hu = \lambda u \tag{5.278}$$

a unui operator autoadjunct și pozitiv H, conduce la vectori proprii ortogonali:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad (i \neq j). \tag{5.279}$$

Într-adevăr fie u_i și u_j vectorii proprii corespunzători valorilor proprii diferite $\lambda_i \neq \lambda_j$. Putem scrie atunci:

$$Hu_i = \lambda_i u_i; \tag{5.280}$$

$$Hu_j = \lambda_j u_j. \tag{5.281}$$

Înmulțind scalar prima relație cu u_j și a doua cu u_i avem:

$$\langle Hu_i, u_j \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle; \tag{5.282}$$

$$\langle u_i, Hu_j \rangle = \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle. \tag{5.283}$$

Prin scăderea acestora, ținînd cont de relația (5.275) și de faptul că valorile proprii sînt diferite, deducem imediat relația de ortogonalitate (5.279). Vec-

Scanned with OKEN Scanner

torii proprii u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se pot evident normaliza prin împărţirea fiecăruia la modulul său definit prin relaţia:

$$|u_i| = \sqrt{\langle u_i, u_i \rangle}. \tag{5.284}$$

Vectorii:

$$e_i = \frac{u_i}{|u_i|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.285}$$

formează un şir ortonormat:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ pt. } i \neq j \\ 1 \text{ pt. } i = j \end{cases} \tag{5.286}$$

care poate fi ales ca „bază" a spaţiului de vectori considerat, orice vector v al spaţiului putînd fi descompus după direcţiile vectorilor e_i, conform formulei:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \tag{5.287}$$

în care:

$$v_i = \langle v, e_i \rangle \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.288}$$

sînt mărimile componentelor lui v după direcţiile vectorilor e_i. Putem trece acum la rezolvarea ecuaţiei (5.242) a vibraţiilor forţate:

$$M\ddot{X} + KX = F, \tag{5.289}$$

în care matricile M, K, X şi F sînt date de (5.247) — (5.250). Vom scrie relaţia (5.289) sub forma:

$$\ddot{X} + H \cdot X = M^{-1} \cdot F = f. \tag{5.290}$$

Soluţia acestei ecuaţii neomogene este de forma:

$$X = X_L + X_F \tag{5.291}$$

în care:

$$X_L = \sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \tag{5.292}$$

este soluţia generală a ecuaţiei omogene (soluţia corespunzătoare vibraţiilor libere), iar X_F este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (5.290) a vibraţiilor forţate. Vom încerca o soluţie X_F de forma:

$$X_F = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot g_j(t), \tag{5.293}$$

în care $g_j(t)$ sînt nişte funcţii de timp ce urmează a fi determinate, iar e_j sînt vectorii proprii ortonormaţi ai operatorului H:

$$e_j = \frac{Q_j}{|Q_j|} = \frac{Q_j}{\sqrt{\langle Q_j, Q_j \rangle}} = \frac{Q_j}{\sqrt{Q_j^T \cdot M \cdot Q_j}} \tag{5.294}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru care putem scrie relaţiile:

$$He_j = \lambda_j e_j; \tag{5.295}$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases} \tag{5.296}$$

Vom avea în acest caz:

$$\ddot{X}_F = \sum_j e_j \ddot{g}_j; \tag{5.297}$$

$$HX_F = \sum_j He_j g_j = \sum_j \lambda_j e_j g_j, \tag{5.298}$$

care introduse în ecuaţia:

$$\ddot{X}_F + HX_F = f \tag{5.299}$$

conduc la:

$$\sum_j e_j(\ddot{g}_j + \lambda_j g_j) = f. \tag{5.300}$$

Înmulţind scalar relaţia (5.300) cu vectorul e_i obţinem:

$$\sum_j \langle e_i, e_j \rangle (\ddot{g}_j + \lambda_j g_j) = \langle e_i, f \rangle = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.301}$$

în care:

$$f_i = e_i^T \cdot M \cdot f = \frac{Q_i^T \cdot M \cdot (M^{-1} \cdot F)}{\sqrt{Q_i^T \cdot M \cdot Q_i}} = \frac{Q_i^T \cdot F}{\sqrt{Q_i^T \cdot M \cdot Q_i}} \tag{5.302}$$

este mărimea componentei vectorului f coliniară cu vectorul propriu e_i. Ţinînd cont de relaţiile (5.263) şi (5.296), relaţiile (5.301) se scriu:

$$\ddot{g}_i + \omega_i^2 g_i = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.303}$$

din care rezultă funcţiile $g_i(t)$, conform relaţiei (5.237) şi tabelului 5.1 sub forma produselor de convoluţie:

$$g_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \sin \omega_i(t - \tau) \cdot f_i(\tau) \cdot d\tau. \tag{5.304}$$

Cu aceasta soluţia generală a ecuaţiei vibraţiilor forţate nedisipative (5.289) se scrie:

$$X = \sum_i^n C_i Q_i \cdot \sin(\omega_i t - \varphi_i) +$$

$$+ \sum_i^n \frac{Q_i}{\omega_i Q_i^T \cdot M \cdot Q_i} \int_0^t Q_i^T \cdot F(\tau) \cdot \sin \omega_i(t - \tau) \cdot d\tau, \tag{5.305}$$

în care $F(t)$ este matricea forţelor excitatoare (5.250), ω_i şi Q_i sînt pulsaţiile proprii şi vectorii proprii ai vibraţiilor libere, iar C_i şi φ_i sînt 2 n constante care se determină din condiţiile iniţiale (5.262).

Scanned with OKEN Scanner

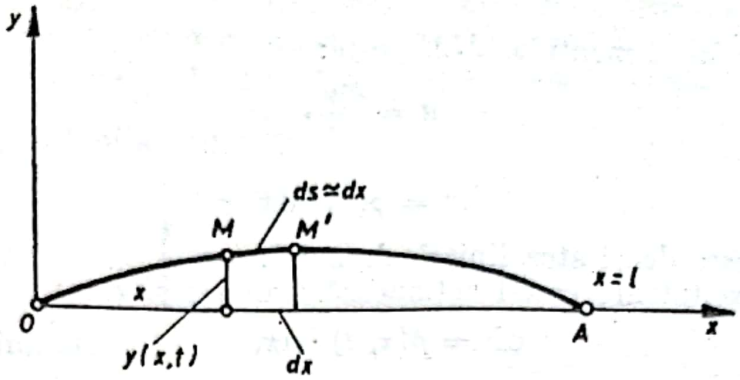


Fig. 5-53

Se observă că pentru rezolvarea ecuațiilor vibrațiilor nedisipative, atît libere cît și forțate, este suficientă rezolvarea problemei de valori proprii:

$$HQ = \lambda Q \tag{5.306}$$

a operatorului matricial pozitiv autoadjunct:

$$H = M^{-1} \cdot K, \tag{5.307}$$

adică de a găsi valorile proprii:

$$\lambda_i = \omega_i^2 \tag{5.308}$$

și vectorii proprii corespunzători Q_i. Vom vedea că această afirmație se păstrează și în cazul vibrațiilor nedisipative cu un număr infinit de grade de libertate, caz în care vom avea de-a face cu operatori diferențiali (nu matriciali) și cu funcții proprii (nu vectori proprii).

În privința vibrațiilor disipative cu n grade de libertate, descrise de ecuația matricială (5.253) pentru vibrațiile libere și (5.252) pentru vibrațiile forțate, vom spune doar că studiul lor se face într-o manieră mult mai dificilă decît cea descrisă mai sus și considerăm că o discuție generală ar depăși cadrul acestui curs.

5.5.3. **Vibrații cu un număr infinit de grade de libertate.** Vom începe prin a stabili ecuațiile vibrațiilor transversale libere și forțate ale unui fir întins între două puncte O și A în care este fixat (fig. 5.53). Dacă la timpul $t = 0$ firul este scos din poziția de repaus (dreapta OA) și se imprimă eventual diferitelor puncte ale sale anumite viteze, firul (coarda vibrantă) începe să vibreze, mișcarea sa numindu-se vibrație liberă dacă asupra sa nu acționează nici o forță exterioară excitatoare și forțată în caz contrar. Pentru a stabili ecuațiile acestor vibrații vom izola din fir un element de arc MM' de lungime $ds \simeq dx$ (fig. 5.54) scriindu-i legea de mișcare. Tensiunea S din fir este sensibil aceeași pe întreaga lungime a firului, iar unghiurile α și β se calculează cu formulele:

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}; \tag{5.309}$$

$$\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta \approx \beta = \alpha + d\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx. \tag{5.310}$$

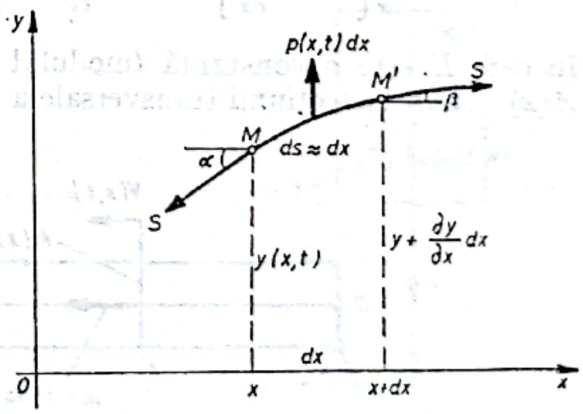


Fig. 5.54

Accelerația elementului MM' este:

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{5.311}$$

iar masa sa:

$$dm = \rho(x) \cdot dx, \tag{5.312}$$

în care $\rho(x)$ este densitatea liniară de masă.

Forța excitatoare care-l acționează transversal este:

$$dF = p(x, t) \cdot dx, \tag{5.313}$$

în care $p(x, t)$ este densitatea liniară de forță.

Proiectînd ecuația de mișcare pe axa transversală obținem relația:

$$-S\frac{\partial y}{\partial x} + S\frac{\partial y}{\partial x} + S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \rho(x) \cdot dx + p(x, t) \cdot dx,$$

care se mai scrie:

$$S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t), \tag{5.314}$$

care reprezintă ecuația vibrațiilor forțate. Vibrațiile libere sînt descrise de ecuația:

$$S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{5.315}$$

Ambele ecuații trebuie rezolvate pentru condițiile la limită:

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \tag{5.316}$$

și condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ \dot{y}(x, 0) = g(x). \end{cases} \tag{5.317}$$

Remarcăm că aceste vibrații sînt nedisipative întrucît nu am luat în considerare nici o forță de frecare.

Cu ajutorul ecuațiilor stabilite de Rezistența materialelor și Teoria elasticității se pot deduce ecuațiile diferențiale care descriu diferitele tipuri de vibrații ale celor mai variate corpuri. Noi ne vom mulțumi să dăm aici (evident fără demonstrație) doar ecuațiile vibrațiilor nedisipative longitudinale și transversale ale unei bare cu axă dreaptă. Vibrațiile longitudinale nedisipative ale barelor cu axă dreaptă sînt descrise de ecuația:

$$E\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right] - \rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \begin{cases} -p(x, t) \text{ la vibrații forțate} \\ 0 \text{ la vibrații libere} \end{cases} \tag{5.318}$$

în care E este o constantă (modulul de elasticitate al materialului barei); $A(x)$ este aria secțiunii transversale a barei la abscisa x (fig. 5.55); $\rho(x)$ este

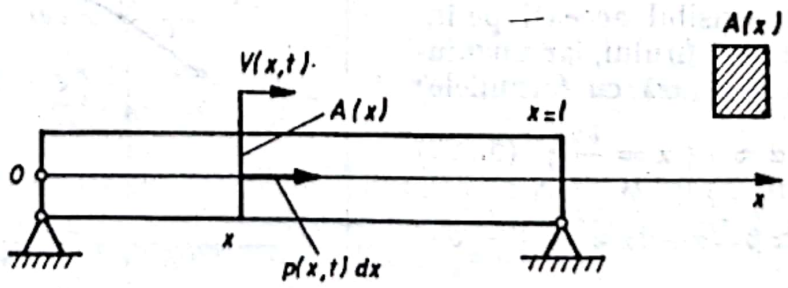


Fig. 5.55

densitatea liniară de masă a barei; $p(x, t)$ este densitatea liniară de forță a forței excitatoare ce acționează longitudinal la abscisa x (pe întreaga secțiune transversală), iar $v(x, t)$ este deplasarea longitudinală a secțiunii de abscisă x.

Condițiile la limită sînt:

$$\begin{cases} v = 0 \text{ la un capăt fix} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ la un capăt liber} \end{cases} \tag{5.319}$$

iar condițiile inițiale:

$$\begin{cases} v(x, 0) = f(x) \\ \dot{v}(x, 0) = g(x). \end{cases} \tag{5.320}$$

Vibrațiile transversale nedisipative ale barelor cu axă dreaptă sînt descrise de ecuația:

$$E \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \begin{cases} p(x, t) & \text{la vibrații forțate} \\ 0 & \text{la vibrații libere} \end{cases} \tag{5.321}$$

în care E și $\rho(x)$ au semnificațiile de mai sus; $p(x, t)$ este densitatea liniară de forță ce acționează transversal pe axa barei (fig. 5.56); $y(x, t)$ este deplasarea transversală a punctului C al axei barei, iar $I(x)$ este momentul de inerție axial geometric față de axa Cz, dat de formula:

$$I(x) = \int_{A(x)} y_p^2 \cdot dA. \tag{5.322}$$

Notăm că axa Ox a barei, numită și axă neutră, este dreapta ce trece prin toate centrele de greutate ale secțiunilor transversale (secțiunile de arie minimă) considerate suprafețe omogene.

Condițiile la limită sînt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \text{ la un capăt liber} \\ y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{la un capăt articulat} \\ y = \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{la un capăt încastrat} \end{cases} \tag{5.323}$$

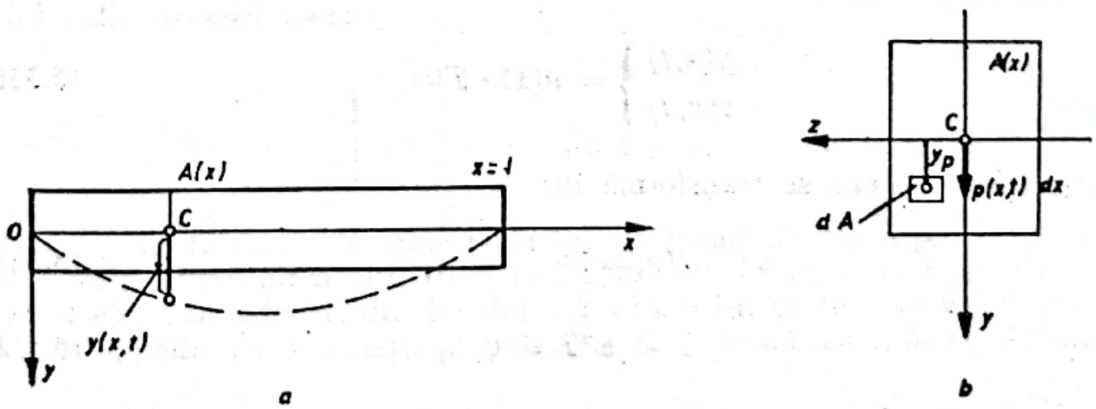


Fig. 5.56

iar condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ \dot{y}(x, 0) = g(x). \end{cases} \tag{5.324}$$

Toate aceste ecuații pot fi scrise sub formă adimensională schimbînd întîi denumirea variabilei x în z și făcînd apoi schimbarea de variabilă:

$$z = x \cdot l, \tag{5.325}$$

după care x devine o variabilă adimensională cu valori în intervalul $[0,1]$. Cu această operație cele trei ecuații (5.314), (5.318) și (5.321) se pot aduce la formele:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \begin{cases} 0 & \text{pentru vibrațiile libere} \\ -f(x, t) & \text{pentru vibrațiile forțate} \end{cases} \tag{5.326}$$

$$\frac{1}{A(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\,\frac{\partial v}{\partial x}\right] - b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \begin{cases} 0 & \text{pentru vibrații libere} \\ -F(x, t) & \text{pentru vibrații forțate} \end{cases} \tag{5.327}$$

$$\frac{1}{A(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I(x)\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + c^4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \begin{cases} 0 & \text{pentru vibrații libere} \\ G(x, t) & \text{pentru vibrații forțate} \end{cases} \tag{5.328}$$

în care:

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{l^2 \cdot \rho}{S}; & f(x, t) = \dfrac{l^2 \cdot p(x, t)}{S} \quad (\rho = \text{const}) \\ b^2 = \dfrac{\rho_v \cdot l^2}{E}; & F(x, t) = \dfrac{l^2 \cdot p(x, t)}{E \cdot A(x)} \\ c^4 = \dfrac{\rho_v l^4}{E}; & G(x, t) = \dfrac{l^4 \cdot p(x \cdot t)}{E \cdot A(x)}, \end{cases} \tag{5.329}$$

iar ρ_v este densitatea volumetrică a materialului barei, presupusă constantă. Cînd $A(x) = \text{const}$. ecuațiile (5.326) și (5.327) coincid ca formă.

Toate aceste ecuații se rezolvă analog, plecînd de la ecuațiile vibrațiilor libere. Pentru acestea se aplică metoda clasică a separării variabilelor, încercînd soluții de forma:

$$\left.\begin{matrix} y(x, t) \\ v(x, t) \end{matrix}\right\} = u(x) \cdot T(t) \tag{5.330}$$

și ecuațiile omogene se transformă în:

$$Hu = \lambda u \tag{5.331}$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \tag{5.332}$$

în care operatorul diferențial H și constanta λ sînt date în tabelul 5.2.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.2.

Nr. crt.	Ecuația omogenă	Operatorul H	Constanta λ
1	(5.326)	$-\frac{d^2}{dx^2}$	$\omega^2 \cdot a^2$
2	(5.327)	$-\frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}\left[A(x)\cdot\frac{d}{dx}\right]$	$\omega^2 \cdot b^2$
3	(5.328)	$\frac{1}{A(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\right]$	$\omega^2 \cdot c^4$

Definind conform tabelului 5.3 în cele trei cazuri produsul scalar $<u, v>$ al unor funcții admisibile $u(x)$ și $v(x)$, funcții ce satisfac condițiile la limită corespunzătoare, se poate verifica ușor că pentru orice combinație a condițiilor la limită (în cazurile 2 și 3) operatorul H respectiv este pozitiv și autoadjunct.

Tabelul 5.3.

Nr. crt.	Produsul scalar $<u, v>$	Condițiile la limită la $x_i = \begin{cases}1\\0\end{cases}$
1	$\int_0^1 u \cdot v \cdot dx$	$u(0) = u(1) = 0$
2	$\int_0^1 A \cdot u \cdot v \cdot dx$	$u(x_i) = 0$ pt. $x = x_i$ capăt fix $u'(x_i) = 0$ pt. $x = x_i$ capăt liber
3	$\int_0^1 A \cdot u \cdot v \cdot dx$	$u(x_i) = u'(x_i) = 0$ pt. $x = x_i$ capăt încastrat $u(x_i) = u''(x_i) = 0$ pt. $x = x_i$ capăt articulat $u''(x_i) = u'''(x_i) = 0$ pt. $x = x_i$ capăt liber

În acest caz problema de valori proprii (5.331) a operatorului H conduce la un șir (infinit în cazul nostru) de valori proprii λ_i și un șir de funcții proprii $u_i(x)$ ortogonale, care se pot evident normaliza formînd deci un șir ortonormat, pe care-l vom lua ca bază a spațiului funcțiilor admisibile. Spre exemplu, se pot determina ușor (prin calcul direct) valorile proprii și funcțiile proprii ortonormate ale operatorului H în cazul coardei vibrante (nr. crt. 1 din tabelul 5.2). Acestea sînt:

$$\begin{cases} \lambda_i = i^2\pi^2 \quad (i = 1, 2, 3,\ldots) \\ u_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\, i\ \pi\ x. \end{cases} \tag{5.333}$$

Vom arăta acum că odată rezolvată problema de valori proprii (5.331), problemele vibrațiilor nedisipative, atît libere cît și forțate, sînt practic rezolvate și ele. Într-adevăr, din tabelul 5.2 observăm că fiecărei valori proprii λ_i îi corespunde cîte o pulsație proprie ω_i și deci cîte o ecuație de tipul (5.332):

$$\ddot{T}_i + \omega_i^2 \cdot T_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3,\ldots) \tag{5.334}$$

Scanned with OKEN Scanner

a cărei soluție este:

$$T_i = C_{1i} \cos \omega_i t + C_{2i} \sin \omega_i t \tag{5.335}$$

și în acest caz soluția generală a vibrațiilor libere se poate scrie sub forma:

$$z(x, t) = \left\{ \begin{matrix} y(x, t) \\ \text{sau} \\ v(x, t) \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \, (C_{1i} \cos \omega_i t + C_{2i} \sin \omega_i t). \tag{5.336}$$

Constantele C_{1i} și C_{2i} se determină cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$z(x, 0) = f(x) \tag{5.337}$$

$$\dot{z}(x, 0) = g(x) \tag{5.338}$$

și a condițiilor de ortonormalitate:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases} \tag{5.339}$$

Condițiile inițiale aplicate soluției (5.336) conduc la:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} u_j C_{1j} = f \\ \sum_{j=1}^{\infty} u_j \omega_j C_{2j} = g \end{cases} \tag{5.340}$$

relații din care, prin înmulțire scalară cu u_i deducem:

$$\begin{cases} C_{1i} = \langle f, u_i \rangle = f_i \\ C_{2i} = \dfrac{1}{\omega_i} \langle g, u_i \rangle = \dfrac{1}{\omega_i} g_i. \end{cases} \tag{5.341}$$

Soluția generală (5.336) a ecuației vibrațiilor libere se scrie deci:

$$Z_L(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \left(\langle f, u_i \rangle \cos \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \langle g, u_i \rangle \sin \omega_i t \right). \tag{5.342}$$

Pentru a rezolva ecuațiile vibrațiilor forțate (5.326), (5.327) și (5.328) vom încerca pentru acestea soluții particulare de forma:

$$Z_F(x, t) = \left\{ \begin{matrix} y(x, t) \\ \text{sau} \\ v(x, t) \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \cdot F_i(t), \tag{5.343}$$

în care $u_i(x)$ sînt funcțiile proprii ortonormate de mai sus, iar $F_i(t)$ sînt funcții ce urmează a fi determinate. Notînd cu:

$$F_E(x, t) = \begin{cases} -f(x, t)/a^2 \\ -F(x, t)/b^2 \\ G(x, t)/c^4 \end{cases} \tag{5.344}$$

Scanned with OKEN Scanner

funcția excitatoare în cazul uneia din aceste trei tipuri de vibrații, vom dezvolta această funcție într-o serie de funcții proprii:

$$F_E(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_i, F_e \rangle u_i = \sum_i f_i(t) \cdot u_i(x). \tag{5.345}$$

Introducînd soluția particulară propusă (5.343) în ecuația neomogenă considerată și ținînd cont de dezvoltarea (5.345) se ajunge în toate cazurile la ecuațiile:

$$\ddot{F}_i + \omega_i^2 F_i = f_i(t) \quad (i = 1; 2, 3, \ldots), \tag{5.346}$$

ale căror soluții sînt:

$$F_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f_i(\tau) \cdot \sin \omega_i(t - \tau) \cdot d\tau. \tag{5.347}$$

Soluția generală a ecuațiilor vibrațiilor forțate va fi atunci:

$$Z(x, t) = Z_L(x, t) + Z_F(x, t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \left[\langle f, u_i \rangle \cos \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \langle g, u_i \rangle \sin \omega_i t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \langle u_i, F_E, (x, \tau) \rangle \cdot \sin \omega_i(t - \tau) \cdot d\tau \right]. \tag{5.348}$$

Relațiile (5.342) și (5.348) demonstrează afirmația că problemele vibrațiilor nedisipative libere sau forțate sînt rezolvate odată cu rezolvarea problemei de valori proprii (5.331).

Vom analiza acum problema vibrațiilor forțate în cazul unor forțe excitatoare periodice în timp. Pentru aceasta vom introduce la început un nou operator, dat de relația:

$$R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}, \tag{5.349}$$

pe care-l vom numi operator rezolvat. În definiția (5.349) H este un operator pozitiv autoadjunct, I operatorul unitate (transformă o funcție în ea însăși), iar λ un număr diferit de valorile proprii λ_i ale operatorului H. Dacă λ_i este una dintre valorile proprii ale lui H și u_i funcția proprie corespunzătoare ei, putem scrie relația:

$$(H - \lambda_i I)u_i = Hu_i - \lambda_i u_i = 0. \tag{5.350}$$

Dacă vom pune $\lambda \neq \lambda_i$ se poate scrie relația:

$$(H - \lambda I)\, u_i = Hu_i - \lambda u_i = (\lambda_i - \lambda)\, u_i. \tag{5.351}$$

Aplicînd relației (5.351) operatorul rezolvant R_λ rezultă:

$$u_i = R_\lambda\, (\lambda_i - \lambda)\, u_i \tag{5.352}$$

sau:

$$R_\lambda u_i = \frac{1}{\lambda_i - \lambda} u_i = \mu_i u_i. \tag{5.353}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația (5.353) ne arată că operatorul rezolvant R_λ are aceleași funcții proprii u_i ca și operatorul H, valorile sale proprii fiind legate de ale lui H prin relația:

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \lambda}. \tag{5.354}$$

În consecință, o funcție arbitrară f putînd fi descompusă într-o serie de funcții proprii u_i, se poate scrie relația:

$$R_\lambda f = R_\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, u_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle f \cdot u_i \rangle}{\lambda_i - \lambda} \cdot u_i. \tag{5.355}$$

Revenind acum la problema vibrațiilor forțate sub acțiunea unor forțe excitatoare periodice în timp, vom dezvolta funcția periodică F_E (5.344) în serie Fourier:

$$F_E(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k). \tag{5.356}$$

Introducînd o asemenea expresie în ecuațiile vibrațiilor forțate (5.326), (5.327), (5.328) și căutînd o soluție particulară de forma:

$$Z_F(x, t) = \begin{Bmatrix} y(x, t) \\ v(x, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} W_K(x) \cdot \sin(\omega_K t + \varphi_K) \tag{5.357}$$

și făcînd, conform ultimei coloane din tabelul 5.2, notația:

$$\lambda_k = \begin{cases} \omega_k^2 \cdot a^2 \\ \omega_k^2 \cdot b^2 \\ \omega_k^2 \cdot c^4 \end{cases} \tag{5.358}$$

obținem în toate cele trei cazuri relațiile:

$$(H - \lambda_k I)\, W_k = f_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5.359}$$

în care H este operatorul corespunzător tipului de vibrație considerat (tab. 5.2). Aplicînd relației (5.359) operatorul rezolvant R_{λ_k} obținem funcțiile W_k sub forma unor serii (5.355):

$$W_k(x) = R_{\lambda_k} f_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle f_k, u_i \rangle}{\lambda_i - \lambda_k} u_i. \tag{5.360}$$

Introducînd (5.360) în (5.357) obținem soluția particulară dorită, cu ajutorul căreia soluția generală a ecuațiilor vibrațiilor forțate se scrie sub forma:

$$Z(x, t) = Z_L(x, t) + Z_F(x, t) = Z_L(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle f_k, u_i \rangle}{\lambda_i - \lambda_k} \cdot u_i \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k), \tag{5.361}$$

în care $Z_L(x, t)$ este soluția corespunzătoare vibrațiilor libere.

Relația (5.361) ne conduce la următoarea concluzie foarte importantă din punct de vedere practic. Cînd forța excitatoare este periodică în timp sistemul oscilant intră în rezonanță (amplitudinile vibrațiilor cresc teoretic nemărginit, practic foarte mult, limitarea datorindu-se amortizărilor) atunci

Scanned with OKEN Scanner

cînd una dintre pulsațiile armonicelor forței excitatoare (ω_k) coincide cu una dintre pulsațiile proprii ale sistemului vibrator (ω_i) deoarece atunci $\lambda_k = \lambda_i$.

5.5.4. **Vibrațiile corpurilor cu mase adiționale concentrate.** Dacă pe firul sau pe barele din paragraful precedent, vom atașa în punctele de abscisă x_i masele punctiforme m_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) vom obține niște corpuri cu mase adiționale concentrate ale căror vibrații ne interesează în acest paragraf.

Ecuațiile vibrațiilor în acest caz se obțin din relațiile (5.314), (5.318) sau (5.321) prin simpla înlocuire a densității liniare de masă cu expresia:

$$\rho(x) = \rho_0(x) + \sum_{i=1}^{n} m_i \delta(x - x_i) \tag{5.362}$$

conform relației (1.328).

Toate ecuațiile de acest gen se rezolvă într-o aceeași manieră și prin urmare ne vom mărgini aici la un exemplu: acela al unui fir cu densitate liniară ρ_0 constantă, căruia îi atașăm n mase adiționale ca mai sus.

Ecuațiile vibrațiilor transversale nedisipative ale unui astfel de fir se scriu sub forma adimensională:

$$B\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \left[\rho_0 + \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \delta(x - x_i)\right]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \begin{cases} 0 & \text{vibrații libere} \\ -p(x,t) & \text{vibrații forțate} \end{cases} \tag{5.363}$$

$$x \in [0, 1],$$

în care:

$$\begin{cases} B = \dfrac{S}{l^2} \\ M_i = \dfrac{m_i}{l}. \end{cases} \tag{5.364}$$

Condițiile la limită sînt:

$$y(0, t) = y(1, t) = 0, \tag{5.365}$$

iar condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ \dot{y}(x, 0) = g(x). \end{cases} \tag{5.366}$$

Pentru rezolvarea ecuației omogene (a vibrațiilor libere) vom folosi tot metoda separării variabilelor punînd:

$$y(x, t) = u(x) \cdot T(t) \tag{5.367}$$

Din (5.363) rezultă atunci:

$$\frac{[\rho_0 + \sum_i M_i \cdot \delta(x - x_i)] \cdot u(x)}{Bu''(x)} = \frac{T(t)}{\ddot{T}(t)} = -\frac{1}{\omega^2}, \tag{5.368}$$

de unde se obțin ecuațiile:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0; \tag{5.369}$$

$$u'' + \alpha^2 u + \frac{\alpha^2}{\rho_0} \sum_i M_i \delta(x - x_i) \cdot u = 0, \tag{5.370}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

$$\alpha^2 = \frac{\rho_0}{B}\omega^2 = \frac{\rho_0 l^2}{S}\omega^2. \tag{5.371}$$

Soluția ecuației (5.369) este cunoscută:

$$T(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \tag{5.372}$$

Din condițiile la limită (5.365) rezultă pentru funcția $u(x)$ condițiile:

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{5.373}$$

Aplicînd ecuației (5.370) *transformata Laplace* obținem:

$$q^2 \cdot U(q) - q \cdot u(0) - u'(0) + \alpha^2 U(q) + \frac{\alpha^2}{\rho_0} \sum_i M_i \cdot u(x_i) \cdot e^{-qx_i}; \tag{5.374}$$

din care deducem:

$$U(q) = \frac{q}{q^2 + \alpha^2} u(0) + \frac{\alpha}{q^2 + \alpha^2} \cdot \frac{u'(0)}{\alpha} - \frac{\alpha}{\rho_0} \sum_i M_i \cdot u(x_i) \cdot \frac{\alpha}{q^2 - \alpha^2} e^{-qx_i} \tag{5.375}$$

Prin inversarea transformatelor din această ecuație operațională găsim:

$$u(x) = u(0) \cdot \cos \alpha x + \frac{u'(0)}{\alpha} \sin \alpha x -$$

$$- \frac{\alpha}{\rho_0} \sum_i M_i \cdot u(x_i) \cdot \sin \alpha (x - x_i) \cdot H(x - x_i). \tag{5.376}$$

Prin aplicarea condițiilor (5.373) rezultă:

$$u'(0) = \frac{\alpha^2}{\rho_0 \sin \alpha} \sum_i M_i \cdot u(x_i) \cdot \sin \alpha (1 - x_i), \tag{5.377}$$

cu care (5.376) se poate scrie sub forma:

$$u(x) = \alpha \sum_i \lambda_i \cdot u(x_i) \cdot W_i(x) \tag{5.378}$$

cu notațiile:

$$\lambda_i = \frac{M_i}{\rho_0} = \frac{m_i}{\rho_0 l} = \frac{m_i}{m_{bară}}; \tag{5.379}$$

$$W_i(x) = \frac{\sin \alpha (1 - x_i)}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha x - \sin \alpha (x - x_i) \cdot H(x - x_i). \tag{5.380}$$

Scriind ecuația (5.378) pentru punctele $x = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ obținem sistemul de n ecuații liniare:

$$u(x_j) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u(x_i) \cdot W_{ij}(\alpha) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.381}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

$$W_{ij}(\alpha) = W_i(x_j). \tag{5.382}$$

Pentru ca sistemul (5.381) să fie compatibil în necunoscutele $u(x_i)$, care evident nu sînt toate nule, va trebui să anulăm determinantul:

$$\begin{vmatrix} \alpha\lambda_1 W_{11} - 1 & \alpha\lambda_2 W_{21} \dots \alpha\lambda_n W_{n1} \\ \alpha\lambda_1 W_{12} & \alpha\lambda_2 W_{22} - 1 \dots \alpha\lambda_n W_{n2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \alpha\lambda_1 W_{1n} & \alpha\lambda_2 W_{2n} \dots \alpha\lambda_n W_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.383}$$

Această ecuație transcendentă este ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (5.370).

Soluțiile acestei ecuații transcendente sînt valorile proprii ale ecuației diferențiale și ele formează un șir infinit $\alpha_k (k = 1, 2, 3, \dots)$. Fiecare valoare proprie α_k introdusă în sistemul de ecuații (5.381) permite determinarea (cu aproximația unui factor constant) unui set de valori $u_k(x_i)$, care introduse în (5.378) ne dau funcția proprie corespunzătoare $u_k(x)$. Pe de altă parte, fiecărei valori proprii α_k îi corespunde conform relației (5.371) cîte o pulsație proprie ω_k și deci o funcție $T_k(t)$ de forma (5.372):

$$T_k(t) = C_{1k} \cos \omega_k t + C_{2k} \sin \omega_k t. \tag{5.384}$$

Am găsit deci un număr infinit de soluții de forma (5.376) soluția generală fiind deci:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) (C_{1k} \cos \omega_k t + C_{2k} \sin \omega_k t). \tag{5.385}$$

Factorul constant arbitrar de la determinarea funcției proprii $u_k(x)$, precum și constantele cu care formăm combinația liniară de mai sus au fost înglobate în constantele C_{1k} și C_{2k}. Pentru determinarea acestora vom demonstra la început ortogonalitatea funcțiilor proprii. Vom nota:

$$\rho(x) = \rho_0 + \sum_i M_i \cdot \delta(x - x_i) \tag{5.386}$$

și vom introduce produsul scalar al funcțiilor $u(x)$ și $v(x)$ prin relația:

$$< u, v > = \int_0^1 \rho(x) \cdot u(x) \cdot v(x) \cdot dx. \tag{5.387}$$

Scriind relația (5.370) pentru două funcții proprii u_i și u_j corespunzătoare la două valori proprii diferite $\alpha_i \neq \alpha_j$, avem:

$$\begin{cases} u_i'' + \dfrac{\alpha_i^2}{\rho_0} \cdot \rho(x) \cdot u_i = 0 \\ u_j'' + \dfrac{\alpha_j^2}{\rho_0} \cdot \rho(x) \cdot u_j = 0. \end{cases} \tag{5.388}$$

Înmulțind prima relația cu u_j, a doua cu u_i, scăzîndu-le și integrînd rezultatul de la 0 la 1 obținem:

$$\int_0^1 (u_i'' u_j - u_j'' u_i) \cdot dx + \frac{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}{\rho_0} \int_0^1 \rho(x) \cdot u_i \cdot u_j \cdot dx = 0. \tag{5.389}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar:

$$\int_0^1 (u_i'' u_j - u_j'' u_i) \cdot dx = (u_i' u_j)\Big|_0^1 - (u_j' u_i)\Big|_0^1 - \int_0^1 (u_i' u_j' - u_j' u_i')\, dx = 0,$$

datorită condițiilor (5.373). Deoarece valorile proprii le-am presupus diferite, din relația (5.389) rezultă atunci:

$$< u_i,\ u_j > = 0. \tag{5.390}$$

Șirul funcțiilor ortogonale u_i îl vom normaliza împărțind fiecare funcție la modulul său:

$$|u_i| = \sqrt{< u_i,\ u_i >} = \sqrt{\int_0^1 \rho(x) \cdot u_i^2(x) \cdot dx}, \tag{5.391}$$

obținînd astfel un șir ortonormal. Pentru un astfel de șir, pe care să-l notăm tot cu u_i, vom avea deci relațiile:

$$< u_i,\ u_j > = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases} \tag{5.392}$$

Revenim acum la soluția generală (5.385) în care presupunem introduse funcțiile proprii ortonormale u_k.

Aplicarea condițiilor inițiale (5.366) acestei soluții conduce la:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot C_{1k} = f(x) \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot \omega_k C_{2k} = g(x). \end{cases} \tag{5.393}$$

Prin înmulțirea scalară a acestor relații cu $u_i(x)$ rezultă ținînd cont de (5.392):

$$\begin{aligned} C_{1k} &= < f,\ u_k > \\ C_{2k} &= \frac{1}{\omega_k} < g,\ u_k > \end{aligned} \tag{5.394}$$

și deci soluția generală a vibrațiilor libere este:

$$y_L(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot \left(< f, u_k > \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} < g, u_k > \sin \omega_k t \right). \tag{5.395}$$

Problema vibrațiilor forțate se rezolvă încercînd pentru ecuația neomogenă (5.363) o soluție particulară de forma:

$$y_F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot T_k(t), \tag{5.396}$$

în care u_k sînt funcțiile proprii ortonormale determinate mai sus, iar T_k sînt funcții de timp ce urmează a fi determinate.

Prin dezvoltarea funcției excitatoare $p(x, t)$ în serie de funcții proprii:

$$p(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} < p,\ u_k > u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot p_k(t), \tag{5.397}$$

Scanned with OKEN Scanner

și înlocuirea relației (5.396) în (5.363) rezultă ecuațiile:

$$\ddot{T}_k + \omega_k^2 T_k = p_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5.398}$$

ale căror soluții sînt:

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t p_k(\tau) \cdot \sin \omega_k (t - \tau) \cdot d\tau. \tag{5.399}$$

Rezultă soluția ecuației vibrațiilor forțate sub forma:

$$y(x, t) = y_L(x, t) + y_F(x, t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot \left[< f, u_k > \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} < g, u_k > \sin \omega_k t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t < p(x, \tau), u_k > \cdot \sin \omega_k (t - \tau) \cdot d\tau \right]. \tag{5.400}$$

Remarcăm și aici același rezultat ca și la firele cu densitate continuă că odată cunoscute valorile proprii și funcțiile proprii problema vibrațiilor libere și forțate este practic rezolvată.

APLICAȚII

1. Se consideră sistemul oscilant din figura 5.57 format din trei pendule identice cuplate între ele prin arcuri identice. Se cer pulsațiile proprii și vectorii proprii ai vibrațiilor libere ale acestui sistem.

Rezolvare:

Considerînd oscilațiile mici și făcînd înlocuirile $\sin \theta_i \to \theta_i$ ecuația de mișcare a unui rigid cu axă fixă:

$$J_{zz} \ddot{\theta} = M_z,$$

aplicată celor trei pendule conduce la ecuațiile:

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 - Ka^2(\theta_1 - \theta_2) \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 = -mgl\theta_2 + Ka^2(\theta_1 - \theta_2) - Ka_2(\theta_2 - \theta_3) \\ ml^2 \ddot{\theta}_3 = -mgl\theta_3 + Ka^2(\theta_2 - \theta_3), \end{cases}$$

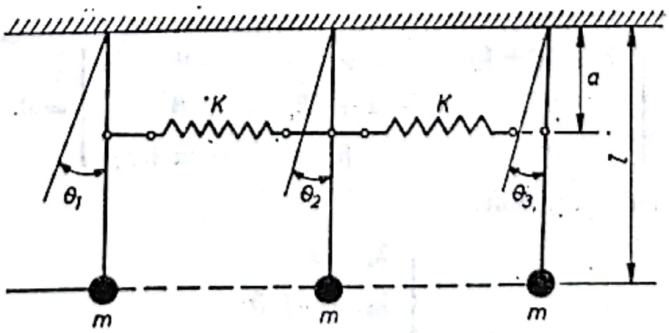


Fig. 5.57

Scanned with OKEN Scanner

care se mai scriu:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + Ka^2)\theta_1 - Ka^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 - Ka^2\theta_1 + (mgl + 2Ka^2)\,\theta_2 - Ka^2\theta_3 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_3 - Ka^2\theta_2 + (mgl + Ka^2)\,\theta_3 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem de ecuații se scrie sub forma matricială (5.251)

$$M\ddot{\theta} + K\,\theta = 0,$$

în care:

$$M = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} mgl + Ka^2 & -Ka^2 & 0 \\ -Ka^2 & mgl + 2Ka^2 & -Ka^2 \\ 0 & -K\,a^2 & mgl + Ka^2 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Matricea H dată de relația (5.264) este:

$$H = M^{-1} \cdot K = \begin{bmatrix} \frac{g}{l} + \frac{K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 & -\frac{K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 & 0 \\ -\frac{K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 & \frac{g}{l} + \frac{2K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 & -\frac{K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \\ 0 & -\frac{K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 & \frac{g}{l} + \frac{K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \end{bmatrix}$$

care cu notațiile:

$$\alpha = \frac{g}{l} \qquad \beta = \frac{K}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2$$

devine:

$$H = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & -\beta & 0 \\ -\beta & \alpha + 2\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & \alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii $\lambda_i = \omega_i^2$ le determinăm cu ajutorul ecuației caracteristice (5.266) care în cazul nostru devine:

$$\begin{bmatrix} \lambda - (\alpha + \beta) & \beta & 0 \\ \beta & \lambda - (\alpha + 2\beta) & \beta \\ 0 & \beta & \lambda - (\alpha + \beta) \end{bmatrix} = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații sînt:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = \alpha + \beta \\ \lambda_3 = \alpha + 3\beta. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pulsațiile proprii ale sistemului se scriu deci:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{K}{m}\left(\dfrac{a}{l}\right)^2} \\ \omega_3 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + 3\left(\dfrac{a}{l}\right)^2 \dfrac{K}{m}}. \end{cases} \quad (1)$$

Vectorii proprii Q_i se determină din relațiile:

$$HQ_i = \lambda_i Q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Alegînd în mod arbitrar primul element al fiecărui vector ca fiind egal cu 1, vectorii proprii căutați sînt:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Cele trei moduri proprii de vibrații ale sistemului sînt schițate în figura 5.58.

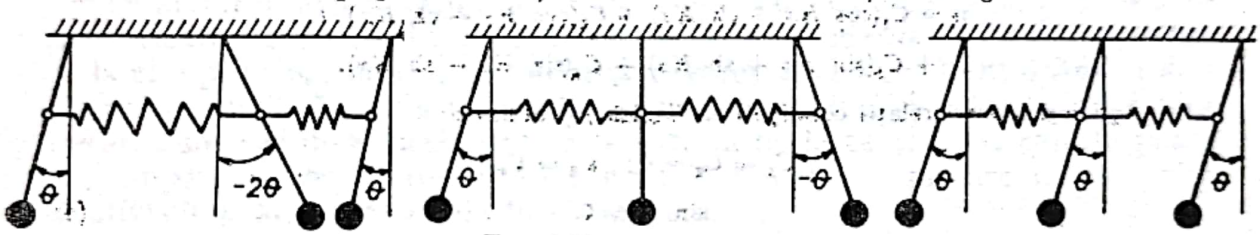


Fig. 5.58

Se poate verifica imediat ortogonalitatea vectorilor proprii (2).

2. Să se determine pulsațiile proprii și funcțiile proprii ale vibrațiilor transversale libere ale barei drepte omogene, de secțiune constantă, din figura 5.59.

Ecuația (5.321) pentru vibrațiile libere se scrie sub forma:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \; x \in [0, l], \quad (1)$$

în care E este modulul de elasticitate al materialului barei, I este momentul de inerție geometric al secțiunii transversale față de axa Cz, ρ este densitatea volumetrică a materialului barei, iar A secțiunea transversală presupusă constantă pe lungimea l a barei.

Trecînd la mărimi adimensionale prin înlocuirea $x \to l\,x$ și făcînd notația:

$$\lambda = \frac{\rho A l^4 \omega^2}{EI},$$

ecuația (1) conduce prin separarea variabilelor, cu ajutorul relației (5.330) la ecuații de tipul (5.331) și (5.332):

$$\begin{cases} Hu = \lambda u \\ \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \end{cases}$$

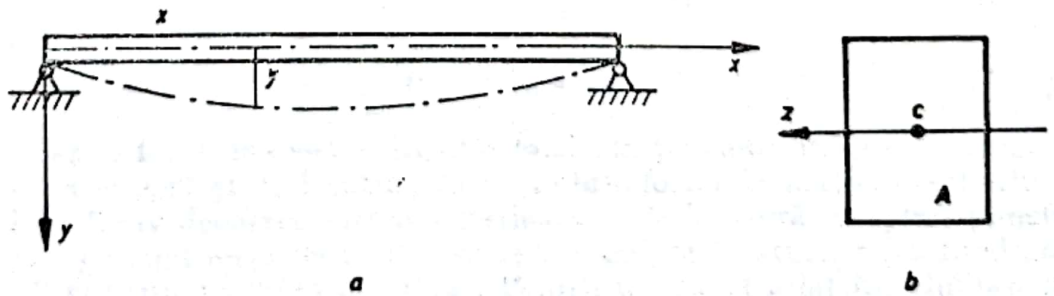


Fig. 5.59

în care opearatorul H este:

$$H = \frac{d^4u}{dx^4}. \tag{2}$$

Pentru a rezolva problema de valori proprii (5.331) cu operatorul (2) vom scrie condițiile la limită, care conform tabelului 5.3 sînt în cazul nostru (ambele capete articulate):

$$u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0. \tag{3}$$

Vom nota:

$$\lambda = K^4$$

și vom scrie ecuația (5.331) sub forma:

$$\frac{d^4u}{dx^4} - K^4u = 0$$

a cărei soluție generală este:

$$u = C_1' \sin Kx + C_2' \cos Kx + C_3' \operatorname{sh} K x + C_4' \operatorname{ch} K x,$$

pe care o punem sub forma:

$$u = C_1(\cos Kx + \operatorname{ch} Kx) + C_2(\cos Kx - \operatorname{ch} Kx) +$$
$$+ C_3(\sin Kx + \operatorname{sh} Kx) + C_4(\sin Kx - \operatorname{sh} Kx).$$

Aplicînd acestei relații condițiile la limită (3) obținem:

$$C_1 = C_2 = 0; \quad C_3 = C_4;$$
$$\sin K = 0. \tag{4}$$

Aceasta este ecuația caracteristică din care deducem valorile proprii:

$$\lambda_i = K_i^4 = (i\pi)^4 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Rezultă pulsațiile proprii:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i \cdot EI}{\rho A l^4}} = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{5}$$

și funcțiile proprii:

$$u_i(x) = D_i \sin K_i x = D_i \sin i\pi x (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

care se poate vedea că formează un șir ortogonal:

$$< u_i, u_j > = \int_0^1 A \cdot u_i \cdot u_j \, dx = 0 \quad \text{pentru } i \neq j.$$

Scanned with OKEN Scanner

6. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

INTRODUCERE

Rezolvarea problemelor de echilibru sau mişcare cu ecuaţiile generale ale Mecanicii expuse pînă acum necesită în general eliminarea din ecuaţii a forţelor de legătură pentru a găsi condiţiile de echilibru sau legile de mişcare. Mecanica analitică îşi propune să stabilească direct aceste condiţii sau legi cu ajutorul unor ecuaţii în care nu intervin forţele de legătură exterioare şi interioare ale sistemului mecanic. În acest scop *Mecanica analitică* pleacă de la alte principii, nu cele ale Mecanicii teoretice clasice. Menţionăm că deşi Mecanica analitică studiază cazul aşa-ziselor legături ideale (legături fără frecări), sfera ei de aplicabilitate este extrem de largă şi, ceea ce este poate mai important, principiile ei au constituit puncte de plecare în Mecanica relativistă şi alte ramuri ale fizicii moderne.

Principiile Mecanicii analitice se împart în două mari categorii: principii diferenţiale şi principii integrale. Primele reprezintă din punct de vedere matematic ecuaţii diferenţiale, în timp ce ultimele reprezintă probleme variaţionale, aceste principii numindu-se adesea principii variaţionale.

6.1. PRINCIPII DIFERENŢIALE

6.1.1. **Principiul lui d'Alembert. Torsorul forţelor de inerţie.** Ecuaţia de mişcare a unui punct material:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = m\bar{a}, \tag{6.1}$$

în care $\bar{R}_E$ şi $\bar{R}_L$ reprezintă rezultanta forţelor exterioare şi respectiv de legătură, poate fi scrisă sub forma:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L + \bar{F}_I = 0 \tag{6.2}$$

în care:

$$\bar{F}_I = -m\bar{a} \tag{6.3}$$

este aşa-zisa forţă de inerţie. Relaţia (6.2) am putea-o interpreta spunînd că forţele exterioare şi de legătură fac echilibrul forţei de inerţie. Acest echilibru este însă fictiv deoarece forţele exterioare şi de legătură se aplică punctului material pe cînd forţa de inerţie se aplică asupra legăturilor (ea fiind „reacţiunea" punctului asupra acestora). Pentru un punct aflat în echilibru forţa de inerţie este nulă şi relaţia (6.2) reprezintă echilibrul real al forţelor exterioare şi de legătură.

Scanned with OKEN Scanner

Vom scrie acum ecuațiile generale de mișcare ale unui rigid (teorema mișcării centrului de masă și teorema momentului cinetic):

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L = m\bar{a}_c; \tag{6.4}$$

$$\bar{M}_{OE} + \bar{M}_{OL} = \dot{\bar{K}}_O. \tag{6.5}$$

Acestea se mai pot scrie:

$$\bar{R}_E + \bar{R}_L + \bar{R}_I = 0; \tag{6.6}$$

$$\bar{M}_{OE} + \bar{M}_{OL} + \bar{M}_{OI} = 0, \tag{6.7}$$

în care:

$$\bar{R}_I = -m\bar{a}_c; \tag{6.8}$$

$$\bar{M}_{OI} = -\dot{\bar{K}}_O, \tag{6.9}$$

reprezintă torsorul de reducere în O al sistemului de forțe de inerție. Relațiile (6.6) și (6.7) s-ar putea interpreta (ca și în cazul punctului material) spunînd că sistemul forțelor exterioare și de legătură face echilibrul forțelor de inerție. Acest echilibru este un echilibru fictiv pentru același motiv ca și în cazul punctului material.

Principiul lui d'Alembert (sau principiul forțelor de inerție) afirmă că în mișcarea unui sistem mecanic forțele exterioare și de legătură se află într-un echilibru fictiv cu forțele de inerție. Aplicat sub forma (6.2) pentru un punct material sau (6.6) și (6.7) pentru un rigid (sau sub forma unor sume de asemenea relații pentru un sistem de puncte sau rigide) principiul reprezintă propriu-zis o metodă, numită *metoda cineto-statică*, prin care se transformă formal o problemă de mișcare într-o problemă de echilibru.

Principiul lui d'Alembert a fost enunțat inițial de către autorul său sub o altă formă, plecînd de la noțiunea de „forță pierdută" ce acționează asupra unui punct material supus la legături. Fie A un astfel de punct supus acțiunii forței exterioare $\bar{F}_E$ și forței de legătură $\bar{F}_L$. În lipsa legăturilor (cînd punctul material este liber) avem:

$$\bar{F}_E - m\bar{a} = 0. \tag{6.10}$$

În prezența legăturilor:

$$\bar{F}_E - m\bar{a} = \bar{F}_P \neq 0. \tag{6.11}$$

Forța $\bar{F}_P$ este așa-zisa „forță pierdută".

Definiția pleacă de la ideea descompunerii forței exterioare în două componente: forța activă care produce accelerația punctului legat, ca și cînd acesta ar fi liber:

$$\bar{F}_a = m\bar{a} \tag{6.12}$$

și a doua componentă $\bar{F}_P$ (forța pierdută) care nu creează accelerație. Atunci putem scrie:

$$\bar{F}_E = \bar{F}_a + \bar{F}_P; \tag{6.13}$$

$$\bar{F}_E + \bar{F}_L = m\bar{a}. \tag{6.14}$$

Din relațiile (6.12) și (6.13) rezultă definiția (6.11) a forței pierdute, iar din relația (6.14) rezultă atunci:

$$\bar{F}_P + \bar{F}_L = 0. \tag{6.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta este expresia principiului enunțat de *d'Alembert* pentru un punct material.

În cazul unui sistem de puncte (discret sau continuu) scrierea relației de „echilibru" (6.15) a forțelor pierdute și de legătură din fiecare punct al sistemului este echivalentă cu afirmația că întregul sistem al forțelor pierdute și de legătură este în echilibru. Acesta fiind un sistem de forțe neconcurente va trebui să aibă torsorul nul, adică să avem relația:

$$\tau\{\bar{F}_P\} + \tau\{\bar{F}_L\} = 0, \tag{6.16}$$

în care s-au evidențiat cei doi torsori: al forțelor pierdute și al forțelor de legătură. În cazul unui sistem mecanic la care torsorul forțelor de legătură este nul relația (6.16) se reduce la:

$$\tau(\bar{F}_P) = 0. \tag{6.17}$$

În cazul cînd unul din elementele torsorului forțelor de legătură (rezultanta sau momentul rezultant) este nul, din relația (6.16) deducem iarăși o relație numai între forțele pierdute, anulînd elementul respectiv (rezultanta sau momentul rezultant) al torsorului forțelor pierdute.

În general însă, enunțul dat de *d'Alembert* principiului său este următorul: în mișcarea unui sistem mecanic supus la legături forțele pierdute fac echilibrul forțelor de legătură.

Forțele pierdute am văzut deci că sînt acele componente ale forțelor exterioare care nu produc accelerații (se pierd) din cauza constrîngerii impuse de legături sistemului mecanic.

Plecînd de la această idee *Gauss* a stabilit un principiu care guvernează mișcarea sistemelor discrete de puncte materiale, care se numește *principiul celei mai mici constrîngeri* (sau *principiul lui Gauss*). Enunțul acestui principiu, a cărui demonstrație nu o mai dăm aici, este următorul: dintre toate mișcările posibile (care respectă legăturile) ale unui sistem discret de puncte materiale supus la legături ideale (fără frecări), mișcarea reală este aceea pentru care constrîngerea Z definită prin relația:

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\ddot{\bar{r}}_i - \frac{1}{m_i}\bar{F}_{Ei}\right)^2 \tag{6.18}$$

are valoarea minimă. În relația (6.18) m_i sînt masele punctelor sistemului, $\bar{r}_i$ vectorii lor de poziție față de un punct fix, iar $\bar{F}_{Ei}$ forțele exterioare ce acționează aceste puncte.

Se observă că definiția (6.18) a constrîngerii se poate exprima cu ajutorul forțelor pierdute (6.11) sub forma:

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{Pi}^2}{m_i}. \tag{6.19}$$

6.1.2. Principiul deplasărilor virtuale și principiul vitezelor virtuale. Aplicație: principiul lui Torricelli. Fie $A\ (x, y, z)$ un punct material și $d\bar{r}$ deplasarea sa elementară sub acțiunea forțelor exterioare și a legăturilor (forțelor de legătură). Vom numi această deplasare „deplasarea reală" a punctului.

Ne putem însă imagina și o infinitate de alte deplasări elementare ale punctului, deplasări fictive, pe care le vom numi pe viitor „deplasări virtuale"

Scanned with OKEN Scanner

și le vom nota cu $\delta\bar{r}$ pentru a le deosebi de primele. Dacă punctul are o legătură neolonomă de tipul (2.29) deplasarea sa reală $d\bar{r}$ (dx, dy, dz) satisface o relație diferențială neintegrabilă:

$$A(x, y, z, t) \cdot dx + B(x, y, z, t) \cdot dy + C(x, y, z, t) \cdot dz + \\ + D(x, y, z, t) \cdot dt = 0, \tag{6.20}$$

numită *formă Pfaff*. Definim o deplasare virtuală $\delta\bar{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ compatibilă cu legătura la timpul t ca fiind orice deplasare care satisface condiția:

$$A(x, y, z, t) \cdot \delta x + B(x, y, z, t) \cdot \delta y + C(x, y, z, t) \cdot \delta z = 0. \tag{6.21}$$

Dacă punctul are o legătură olonomă de tipul (2.27) deplasarea sa reală satisface relația integrabilă:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \tag{6.22}$$

iar o deplasare virtuală compatibilă cu legătura la momentul t este orice deplasare care satisface condiția (integrabilă și ea):

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \tag{6.23}$$

În cele ce urmează vom înțelege prin deplasări virtuale $\delta\bar{r}$ compatibile cu legăturile numai deplasări compatibile cu legăturile la momentul t.

În cazul legăturilor scleronome (olonome sau neolonome), din cauza absenței variabilei t (timpul) sub formă explicită din ecuațiile de legătură, putem afirma că deplasarea reală a punctului este una dintre deplasările sale virtuale compatibile cu legăturile.

Comparînd relațiile (6.22) și (6.23) putem spune formal că operatorul „d" acționează și asupra variabilei t, pe cînd operatorul „δ" nu.

Fie acum un sistem mecanic oarecare aflat în mișcare sau în echilibru. Fie $A(x, y, z)$ un punct al sistemului (S), figura 6.1, de o vecinătate a lui A de masă dm dată în general de relația (2.272). Fie $\bar{a}$ accelerația acestui punct ($\bar{a} = 0$ în cazul echilibrului).

Fie $d\bar{F}_E$ și $d\bar{F}_L$ forța exterioară și forța de legătură ce acționează punctul A (incluzînd în forța de legătură și forțele interioare, datorate legăturilor interioare ale sistemului), forțe date în general de relațiile (2.223).

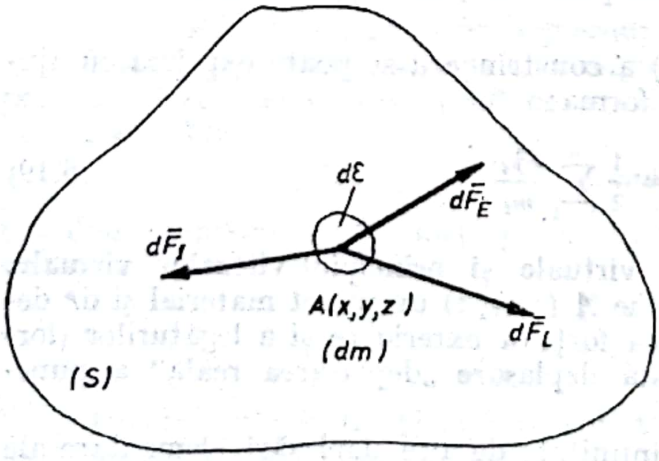


Fig. 6.1

Introducînd și forța de inerție:

$$d\bar{F}_I = -\bar{a} \cdot dm \tag{6.24}$$

putem scrie *principiul lui d'Alembert* pentru punctul A sub forma echilibrului fictiv al celor trei forțe și anume:

$$d\bar{F}_E + d\bar{F}_L + d\bar{F}_I = 0, \tag{6.25}$$

relație care se particularizează sub forma (6.2) în cazul unui

Scanned with OKEN Scanner

sistem discret de forțe ce acționează punctul A în care este concentrată masa finită m (punct material).

Să ne imaginăm acum o deplasare virtuală a sistemului (S) realizată prin deplasări virtuale $\delta\bar{r}$ ale punctelor A ale sistemului, deplasări în general diferite unele față de altele. La o astfel de deplasare virtuală lucrul mecanic elementar al forțelor de mai sus pentru întregul sistem se scrie conform relației (2.290):

$$\delta L = \int_{(S)} (\mathrm{d}\bar{F}_E + \mathrm{d}\bar{F}_L + \mathrm{d}\bar{F}_I) \cdot \delta\bar{r} = \delta L_E + \delta L_L + \delta L_I \qquad (6.26)$$

și se numește lucrul mecanic virtual al sistemului. În relația (6.26) s-au pus în evidență cele trei lucruri mecanice virtuale datorate respectiv forțelor exterioare, de legătură și de inerție:

$$\delta L_E = \int_{(S)} \mathrm{d}\bar{F}_E \cdot \delta\bar{r}; \qquad (6.27)$$

$$\delta L_L = \int_{(S)} \mathrm{d}\bar{F}_L \cdot \delta\bar{r}; \qquad (6.28)$$

$$\delta L_I = \int_{(S)} \mathrm{d}\bar{F}_I \cdot \delta\bar{r} = \int_{(S)} (-\bar{a}\,\mathrm{d}m)\,\delta\bar{r}. \qquad (6.29)$$

Imaginîndu-ne deplasările virtuale $\delta\bar{r}$ efectuate cu vitezele $\bar{v}$ într-un timp virtual δt (fără nici o legătură cu vitezele reale și timpii reali), introducînd relația:

$$\delta\bar{r} = \bar{v} \cdot \delta t \qquad (6.30)$$

în cele trei relații de mai sus obținem:

$$\delta L_E = \int_{(S)} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{F}_E \cdot \delta t = P_E \cdot \delta t; \qquad (6.31)$$

$$\delta L_L = \int_{(S)} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{F}_L \cdot \delta t = P_L \cdot \mathrm{d}t; \qquad (6.32)$$

$$\delta L_I = \int_{(S)} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{F}_I \cdot \delta t = P_I \cdot \delta t, \qquad (6.33)$$

în care P_E, P_L și P_I sînt așa-zisele „puteri virtuale" ale sistemului datorate respectiv forțelor exterioare, de legătură și de inerție.

Introducînd acum relația (6.25) în (6.26) rezultă relația:

$$\delta L = \delta L_E + \delta L_L + \delta L_I = 0, \qquad (6.34)$$

care cu expresiile (6.31), (6.32) și (6.33) se mai scrie:

$$P = P_E + P_L + P_I = 0. \qquad (6.35)$$

Relația (6.34) exprimă *principiul deplasărilor virtuale* care se enunță sub forma următoare: lucrul mecanic virtual al unui sistem mecanic, datorat forțelor exterioare, de legătură și de inerție este nul pentru orice deplasare virtuală a sistemului.

Relația (6.35) exprimă *principiul vitezelor virtuale*, care nu este altceva decît o concluzie a primului principiu, obținîndu-se din acesta prin simpla împărțire cu timpul virtual δt în care se presupune că au avut loc toate deplasările virtuale $\delta\bar{r}$ cu anumite viteze virtuale $\bar{v}$.

Scanned with OKEN Scanner

Principiul vitezelor virtuale se enunţă astfel: puterea virtuală a unui sistem mecanic, datorată forţelor exterioare, de legătură şi de inerţie, este nulă pentru orice deplasare virtuală a sistemului.

Principiul deplasărilor virtuale se aplică la fel de bine şi pentru studierea unui sistem mecanic în mişcare şi pentru studierea unui sistem mecanic în repaus (caz în care acceleraţiile şi deci forţele de inerţie sînt nule).

Să considerăm acum legăturile (exterioare şi interioare) ale sistemului ca fiind ideale (fără frecări). În acest caz putem afirma că lucrul mecanic virtual al forţelor de legătură pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile (la momentul t) este nul. Într-adevăr, orice legături olonome bilaterale ale unui punct se pot exprima sub forma uneia sau mai multor relaţii de tipul:

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{6.36}$$

pentru care forţa de legătură, în absenţa frecării, este normală la suprafaţa mobilă (6.36), deci de forma:

$$\bar{N} = \lambda \operatorname{grad} f,$$

iar deplasarea virtuală compatibilă cu legătura este în planul tangent la această suprafaţă la momentul t. Lucrul mecanic virtual al forţei de legătură este atunci:

$$\delta L_L = \bar{N} \cdot \delta r = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \delta z \right) = 0, \tag{6.37}$$

conform relaţiei (6.23).

Cum legăturile unui rigid pot fi considerate ca fiind formate dintr-un număr de legături aplicate diferitelor puncte ale lui, afirmaţia privind nulitatea lucrului mecanic virtual al forţelor de legătură:

$$\delta L_L = 0 \tag{6.38}$$

se menţine şi în cazul deplasărilor virtuale compatibile cu legăturile ideale ale unui rigid, rămînînd deci valabilă în cazul oricărui sistem de puncte şi rigide. Dealtfel această proprietate a fost luată de către *Paul Appel* ca definiţie a legăturilor ideale.

Cu aceste observaţii putem arăta cum se aplică principiul deplasărilor virtuale pentru studiul diferitelor sisteme de puncte şi rigide supuse la legături ideale (interioare şi exterioare), considerînd deplasările virtuale compatibile cu legăturile.

a) *Sistem în repaus.* În acest caz avem:

$$\delta L_L = 0 \qquad \bar{a} = 0 \Rightarrow \delta L_I = 0$$

şi deci relaţia (6.34) devine:

$$\delta L_E = \int_{(S)} d\bar{F}_E \cdot \delta \bar{r} = 0. \tag{6.39}$$

b) *Sistem în mişcare.* În acest caz avem $\delta L_L = 0$ şi deci relaţia (6.34) devine:

$$\delta L_E + \delta L_I = \int_{(S)} d\bar{F}_E \cdot \delta \bar{r} + \int_{(S)} (-\bar{a}\, dm) \cdot \delta \bar{r} = 0. \tag{6.40}$$

Vom face acum cîteva consideraţii privind modul de aplicare a ecuaţiilor (6.39) şi (6.40). Vom începe prin a spune că poziţia momentană a oricărui

Scanned with OKEN Scanner

sistem mecanic poate fi determinată printr-un anumit număr de parametri independenți (distanțe, unghiuri etc.). Fie $q_1, q_2, \ldots, q_n$ acești parametri pe care-i numim *coordonate generalizate* ale sistemului. Vom mai spune că sistemul are n grade de libertate. Vom da acum pe rînd sistemului cîte o deplasare virtuală astfel încît să varieze pe rînd cîte o coordonată q_i cu $\delta q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

În felul acesta se obțin n ecuații algebrice din (6.39) și n ecuații diferențiale de ordinul doi din (6.40). Acestea permit determinarea configurației de echilibru sau a condițiilor de echilibru a sistemului în primul caz și, respectiv, determinarea legilor de mișcare [funcțiile $q_i(t)$] în al doilea caz (constantele de integrare se determină cu ajutorul condițiilor inițiale).

Mai facem observația că putem înlocui după voie una din legăturile (exterioare sau interioare) ale sistemului prin forțele de legătură corespunzătoare. Dînd apoi sistemului (sau părților lui) deplasări virtuale compatibile cu restul legăturilor (neînlocuite) se obțin ecuații care permit determinarea forțelor de legătură (reacțiunilor) statice în primul caz sau dinamice în al doilea.

Modul concret în care se obțin ecuațiile de mișcare prin aplicarea relației (6.40) constituie obiectul paragrafului următor.

Ca exemplificare a modului de aplicare a relației (6.39) să găsim poziția de repaus a unui sistem mecanic arbitrar cu legături ideale, acționat doar de forțe exterioare de greutate. Fie A un punct al sistemului, dm masa vecinătății de a lui A și

$$d\bar{F}_g = \bar{g} \cdot dm \tag{6.41}$$

forța exterioară de greutate ce acționează punctul A.

Alegînd un sistem de axe $Oxyz$ cu Oz verticala ascendentă și dînd sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile vom putea scrie relațiile:

$$\begin{cases} \bar{g}(0, 0, -g) \\ \overline{OA} = \bar{r}(x, y, z) \\ \delta\bar{r} = (\delta x, \delta y, \delta z). \end{cases} \tag{6.42}$$

Cu aceasta relația (6.39) devine:

$$\int_{(S)} (\bar{g} \cdot dm) \cdot \delta\bar{r} = 0, \tag{6.43}$$

din care rezultă succesiv relațiile:

$$-g \int_{(S)} \delta z \cdot dm = 0;$$

$$\delta \left(\int_{(S)} z \cdot dm \right) = 0;$$

$$\delta \left(\frac{\int_{(S)} z \cdot dm}{\int_{(S)} dm} \right) = \delta z_c = 0;$$

$$z_c = \begin{cases} \text{minim} \\ \text{sau} \\ \text{maxim}, \end{cases} \tag{6.44}$$

în care z_c este cota centrului de greutate al sistemului. Relația (6.44) exprimă *principiul lui Torricelli* care afirmă că pozițiile de echilibru (repaus) ale unui

Scanned with OKEN Scanner

sistem mecanic cu legături ideale supus numai acțiunii forțelor de greutate sînt acelea pentru care înălțimea (cota) centrului de greutate al sistemului are o valoare extremă (maximă sau minimă).

6.1.3. **Ecuațiile lui Lagrange.** Fie (S) un sistem mecanic în mișcare. Să presupunem pentru început că sistemul are numai legături olonome ideale (fără frecare). Fie A un punct al sistemului, dm masa vecinătății sale d_ε și $\bar{r}$ vectorul său de poziție față de originea O a unui reper fix. Fie $q_1, q_2, \ldots, q_n$ cele n coordonate generalizate ale sistemului. Vectorul $\bar{r}$ se poate pune atunci sub forma:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \tag{6.45}$$

relația pe care o vom scrie uneori și condensat sub forma:

$$\bar{r} = \bar{r}(q, t), \tag{6.46}$$

înțelegînd prin q ansamblul celor n coordonate generalizate. Deplasarea virtuală $\delta\bar{r}$ a punctului A se scrie atunci:

$$\delta\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i. \tag{6.47}$$

Introducînd această expresie în (6.40) obținem:

$$\int_{(S)} \left[(d\bar{F}_E - \bar{a}\, dm) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \delta q_i \right] = 0 \tag{6.48}$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{(S)} (d\bar{F}_E - \bar{a}\, dm) \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \tag{6.49}$$

Alegînd pe rînd n deplasări virtuale ale sistemului astfel încît de fiecare dată să varieze numai o coordonată generalizată relația (6.49) conduce la n ecuații:

$$\int_{(S)} (d\bar{F}_E - \bar{a}\, dm) \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.50}$$

care poartă numele de *ecuații Lagrange de speța întîi în cazul legăturilor olonome*. Acestea se pot însă transforma în continuare. Vom numi *forțe generalizate* expresiile:

$$Q_i = \int_{(S)} d\bar{F}_E \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.51}$$

Ele se calculează cel mai comod scriind relația (6.51) sub forma:

$$Q_i = \frac{1}{\delta q_i} \int_{(S)} d\bar{F}_E \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \frac{\delta L_{Ei}}{\delta q_i}, \tag{6.52}$$

în care δL_{Ei} este lucrul mecanic virtual dat de forțele exterioare la deplasarea virtuală compatibilă cu legăturile sistemului, în care numai coordonata q_i variază cu δq_i. Vom observa apoi că mai putem scrie:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\, dm = \int_{(S)} \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \cdot dm = \int_{(S)} \frac{d}{dt} \left(\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \cdot dm - \\ - \int_{(S)} \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \cdot dm, \end{aligned} \tag{6.53}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică:

$$\int_{(S)} \bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \cdot \mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{(S)} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \mathrm{d}m - \int_{(S)} \bar{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \cdot \mathrm{d}m. \tag{6.54}$$

Pe de altă parte din relația (6.45) deducem prin derivare:

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \ldots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}; \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{6.56}$$

iar pe de altă parte:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_j \partial q_i} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t \cdot \partial q_i}. \tag{6.57}$$

Observînd că $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$ este o funcție de aceleași variabile ca și $\bar{r}$, putem scrie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \cdot \partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \cdot \partial t}. \tag{6.58}$$

Comparînd relația (6.57) cu (6.58) deducem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}. \tag{6.59}$$

Introducînd acum relațiile (6.56) și (6.59) în (6.54) și apoi pe aceasta împreună cu (6.51) în (6.50) obținem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{(S)} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathrm{d}m - \int_{(S)} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \cdot \mathrm{d}m = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.60}$$

Însă aplicînd definiția (2.274) a energiei cinetice a sistemului (S) mai putem scrie:

$$\int_{(0)} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathrm{d}m = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \int_{(S)} \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \cdot \mathrm{d}m = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}; \tag{6.61}$$

$$\int_{(S)} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \cdot \mathrm{d}m = \frac{\partial}{\partial q_i} \int_{(S)} \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \cdot \mathrm{d}m = \frac{\partial E_c}{\partial q_i}. \tag{6.62}$$

Cu aceste relații, relația (6.60) devine:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.63}$$

Relațiile (6.63) poartă numele de *ecuații ale lui Lagrange de speța a doua în cazul legăturilor olonome*. Acestea reprezintă un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul doi care permite determinarea funcțiilor $q_i(t)$ care dau mișcarea sistemului. Determinarea celor $2n$ constante arbitrare se face cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$\begin{cases} q_i(0) = q_{i0} \\ \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0}. \end{cases} \tag{6.64}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem acum cazul în care sistemul are pe lîngă legăturile sale olonome și un număr de $p(p < n)$ legături neolonome impuse punctelor $A_k(k = 1, 2, ..., p)$ ale sistemului. În acest caz cele p *forme Pfaff* de tipul (6.20) asociate punctelor $A_k(x_k, y_k, z_k)$ se scriu:

$$A(x_k, y_k, z_k, t) \cdot dx_k + B(x_k, y_k, z_k, t) \cdot dy_k + C(x_k, y_k, z_k, t) \cdot dz_k + \\ + D(x_k, y_k, z_k, t) \cdot dt = 0 \quad (k = 1, 2, ..., p). \tag{6.65}$$

Însă coordonatele carteziene ale punctelor A_k pot fi scrise în funcție de cele n coordonate generalizate ale sistemului:

$$\begin{cases} x_k = x_k(q, t) \\ y_k = y_k(q, t) \\ z_k = z_k(q, t), \end{cases} \tag{6.66}$$

cu care relațiile (6.65) se scriu:

$$A_k(q, t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot dq_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} \cdot dt \right) + B_k(q, t) \cdot \\ \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \cdot dq_i + \frac{\partial y_k}{\partial t} \cdot dt \right) + C_k(q, t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} + \frac{\partial z_k}{\partial t} \cdot dt \right) + \\ + D_k(q, t) \cdot dt \quad (k = 1, 2, ..., p). \tag{6.67}$$

Aceste relații sînt de forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(q, t) \cdot dq_i + \beta_k(q, t) \cdot dt \quad (k = 1, 2, ..., p), \tag{6.68}$$

în care prin q se subînțelege același ansamblu al coordonatelor generalizate ca și în relația (6.46). Observăm acum că sistemul (S) are în deplasări finite n grade de libertate (coordonatele q_i fiind independente nu avem nici o relație impusă lor), pe cînd în deplasări infinitezimale sistemul are numai $n-p$ grade de libertate întrucît între deplasările elementare dq_i avem impuse cele p relații (6.68) și deci numai $n-p$ deplasări elementare sînt independente.

O deplasare virtuală a sistemului este compatibilă cu legăturile neolonome ale acestuia la timpul t dacă satisface condițiile:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(q, t) \cdot \delta q_i = 0 \quad (k = 1, 2, .., p) \tag{6.69}$$

Să vedem acum ce modificări aduce ecuațiilor lui Lagrange prezența legăturilor neolonome. Pînă la obținerea ecuației (6.49) raționamentele sînt identice. Acum însă observăm că nu mai putem alege n deplasări virtuale ale sistemului astfel încît de fiecare dată toți δq_j să fie nuli cu excepția unuia și deplasările să fie compatibile cu legăturile. Aceasta ar însemna conform relației (6.69) ca toți α_{ki} să fie nuli și deci n-am avea legături neolonome. Pentru a rezolva problema în acest caz folosim *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*. Vom înmulți fiecare dintre cele p relații (6.69) cu cîte o funcție (multiplicator) $\lambda_k(t)$ pentru moment nedeterminată. Adunînd rezultatele obținem relația:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k(t) \cdot \alpha_{ki}(q, t) \cdot \delta q_i = 0. \tag{6.70}$$

Scanned with OKEN Scanner

Însumînd relaţiile (6.49) şi (6.70) obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{(S)}(\mathrm{d}\bar{F}_E-\bar{a}\cdot\mathrm{d}m)\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\cdot\alpha_{ki}\right]\delta q_i=0. \tag{6.71}$$

Să presupunem că am ales funcţiile λ_k astfel încît să se anuleze fiecare coeficient al variaţiilor $\delta q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ adică

$$\int_{(S)}(\mathrm{d}\bar{F}_E-\bar{a}\cdot\mathrm{d}m)\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\cdot\alpha_{ki}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{6.72}$$

Acestea sînt *ecuaţiile lui Lagrange de speţa întîi în cazul legăturilor neolonome.*

În continuare, într-un mod cu totul analog cazului legăturilor olonome, se obţin *ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua în cazul legăturilor neolonome,* sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k(t)\cdot\alpha_{ki}(q,t)=0. \tag{6.73}$$

Aceste n ecuaţii împreună cu cele p ecuaţii de legătură (6.68) puse prin împărţirea la $\mathrm{d}t$ sub forma:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}(q,t)\cdot\dot{q}_i+\beta_k(q,t)=0 \quad (k=1,2,\ldots,p) \tag{6.74}$$

formează un sistem de $n + p$ ecuaţii diferenţiale care permit determinarea celor $n + p$ funcţii necunoscute: coordonatele generalizate $q_i(t)$ şi *multiplicatorii lui Lagrange* $\lambda_k(t)$.

Se vede uşor că relaţiile (6.73) prin particularizările $\alpha_{ki} = 0$ (în absenţa legăturilor neolonome) conduc la relaţiile (6.63).

Să considerăm acum cazul unui sistem cu legături olonome ideale, supus acţiunii unor forţe exterioare conservative. Atunci putem scrie relaţia:

$$\mathrm{d}\bar{F}_E=\bar{p}_E\cdot d\varepsilon=\operatorname{grad}u\cdot\mathrm{d}\varepsilon, \tag{6.75}$$

în care $u(x, y, z, t)$ este funcţia de forţe.

Forţele generalizate Q_i din relaţia (6.51) devin în acest caz:

$$Q_i=\int_{(S)}(\operatorname{grad}u)\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\cdot\mathrm{d}\varepsilon=\int_{(S)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_i}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_i}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}\varepsilon=$$

$$=\int_{(S)}\frac{\partial u}{\partial q_i}\cdot\mathrm{d}\varepsilon=\frac{\partial}{\partial q_i}\int_{(S)}u\cdot\mathrm{d}\varepsilon. \tag{6.76}$$

Adică:

$$Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i=1,2,\ldots,n), \tag{6.77}$$

în care:

$$U(q,t)=\int_{(S)}u\cdot\mathrm{d}\varepsilon \tag{6.78}$$

este funcţia de forţe a sistemului, ea depinzînd numai de coordonatele generalizate.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz putem scrie relațiile:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.79}$$

și introducînd funcția:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = E_c(q, \dot{q}, t) + U(q, t) \tag{6.80}$$

numită *funcția lui Lagrange* sau *potențialul cinetic*, observăm că *ecuațiile lui Lagrange* (6.63) se pot scrie sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.81}$$

ecuații valabile în cazul legăturilor olonome ideale și al forțelor exterioare conservative.

6.1.4. **Ecuațiile canonice ale lui Hamilton.** Fie un sistem mecanic cu legături olonome ideale, acționat de forțe exterioare conservative. Pentru a-i studia mișcarea îi putem deci aplica *ecuațiile lui Lagrange* (6.81). Acestea formează un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul doi. *Hamilton* a transformat acest sistem într-un sistem de $2n$ ecuații de ordinul întîi, introducînd pe lîngă funcțiile necunoscute $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ încă n funcții necunoscute numite impulsuri generalizate $p_i(t)$, definite prin relațiile:

$$p_i = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.82}$$

Aceste relații sînt analoage definițiilor proiecțiilor pe axe ale impulsului unui punct material:

$$p_x = mv_x = \frac{\partial E_c}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x}\left[\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}\right] \quad \text{etc.}$$

Din (6.82) și (6.81) rezultă:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.83}$$

Sistemul de $2n$ ecuații (6.82) și (6.83) rezolvă în principiu problema propusă. El poate fi însă adus la o formă mai convenabilă calculului analitic.

Pentru aceasta să aplicăm operatorul diferențial δ (variație virtuală) funcției $\mathcal{L}$ și să ținem cont de faptul că el nu operează asupra variabilei t. Vom putea scrie atunci:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta \dot{q}_i\right), \tag{6.84}$$

în care introducînd (6.82) și (6.83) obținem:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} (\dot{p}_i \cdot \delta q_i + p_i \cdot \delta \dot{q}_i). \tag{6.85}$$

Însă:

$$p_i \cdot \delta \dot{q}_i = \delta(p_i \cdot \dot{q}_i) - \dot{q}_i \delta p_i, \tag{6.86}$$

care introdusă în relația (6.85) conduce la:

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \dot{q}_i - \mathcal{L}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i \cdot \delta p_i - \dot{p}_i \cdot \delta q_i). \tag{6.87}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu H funcția lui *Hamilton:*

$$H(q, \dot{q}, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \tag{6.88}$$

este evident că H este o funcție de q_i, $\dot{q}_i$, p_i și t.

Însă energia cinetică E_c a sistemului fiind o funcție pătratică în $\dot{q}_i$, ecuațiile (6.82) formează un sistem de n ecuații liniare din care se pot scoate cele n viteze generalizate $\dot{q}_i$ în funcție de impulsurile generalizate p_i, de coordonatele generalizate q_i și de timpul t. Deci putem scrie schematic:

$$\left.\begin{aligned} p_i = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(p, q, t). \tag{6.89}$$

Introducînd relația (6.89) în (6.88) rezultă că întotdeauna se poate pune funcția lui *Hamilton* sub forma:

$$H = H(q, p, t). \tag{6.90}$$

Aplicînd acestei forme operatorul diferențial δ și introducînd rezultatul în relația (6.87) obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i \cdot \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i) \cdot \tag{6.91}$$

Identificînd în această relație coeficienții variațiilor arbitrare δp_i și δq_i se obțin $2n$ ecuații:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.92}$$

cunoscute sub numele de *ecuații canonice ale lui Hamilton.*

În cazul cînd legăturile sistemului sînt nu numai olonome ci și sclero-nome, *funcția lui Hamilton* nu depinde explicit de timp. Calculînd derivata ei în raport cu timpul și ținînd cont de relația (6.92) deducem:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \cdot \dot{p}_i) = 0 \tag{6.93}$$

și deci:

$$H = \text{const.} \tag{6.94}$$

Energia cinetică fiind o funcție pătratică în $\dot{q}_i$ de forma:

$$E_c = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} Q_{jk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \tag{6.95}$$

se poate verifica ușor identitatea:

$$\dot{q}_i \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} = 2E_c. \tag{6.96}$$

Funcția lui Hamilton (6.88) se scrie deci:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = 2E_c - (E_c + U) = E_c - U = E_c + E_p, \tag{6.97}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care E_p este energia potențială a sistemului (2.472). Comparînd (6.94) cu (6.97) regăsim teorema conservării energiei mecanice (2.475).

$$H = E_c + E_p = \text{const.}, \tag{6.98}$$

funcția lui Hamilton reprezentînd deci tocmai energia mecanică a sistemului conservativ cu legături olonome scleronome.

6.1.5. **Parantezele lui Poisson.** Date fiind două funcții:

$$\begin{cases} f = f(x_i, y_i, t) \\ g = g(x_i, y_i, t) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.99}$$

continue și derivabile în raport cu variabilele lor, numim *paranteză a lui Poisson* pentru funcțiile date expresia:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \tag{6.100}$$

Se pot verifica ușor următoarele proprietăți ale *parantezelor lui Poisson:*

$$(f, g) = -(g, f); \tag{6.101}$$

$$(f, f) = 0; \tag{6.102}$$

$$(f, C) = 0 \quad (C = \text{const.}); \tag{6.103}$$

$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g); \tag{6.104}$$

$$(f_1 \cdot f_2, g) = f_1(f_2, g) + f_2(f_1, g); \tag{6.105}$$

$$(F(f_1, f_2, \ldots, f_n), g) = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g) \cdot \frac{\partial F}{\partial f_i}; \tag{6.106}$$

$$(F(f_1, f_2, \ldots, f_n),\ G(g_1, g_2, \ldots, g_n)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial f_i} \cdot \frac{\partial G}{\partial g_j} - \frac{\partial F}{\partial f_j} \cdot \frac{\partial G}{\partial g_i} \right) \cdot (f_i, g_j); \tag{6.107}$$

$$(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0. \tag{6.108}$$

Ultima proprietate se numește *identitatea lui Jacobi.*

Utilizarea *parantezelor lui Poisson* în integrarea sistemului hamiltonian (6.92) pleacă de la observația că acesta poate fi scris sub forma:

$$\dot{q}_i = (q_i, H), \quad \dot{p}_i = (p_i, H). \tag{6.109}$$

Să presupunem acum că am găsit două integrale prime ale sistemului hamiltonian (6.109). Fie acestea:

$$\begin{cases} f(q, p, t) = C_1 \\ g(q, p, t) = C_2. \end{cases} \tag{6.110}$$

Vom arăta că relația:

$$h = (f, g) = C_3 \tag{6.111}$$

este și ea o integrală primă a sistemului hamiltonian.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, pentru ca $f = C_1$ să fie integrală primă este necesar să avem succesiv relațiile:

$$\frac{df}{dt} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

$$(f, H) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{6.112}$$

În mod analog rezultă:

$$(g, H) + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \tag{6.113}$$

Va trebui deci ca din (6.112) și (6.113) să rezulte relația:

$$(h, H) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \tag{6.114}$$

Vom scrie *identitatea lui Jacobi* (6.108) pentru funcțiile f, g și H.

$$(f,(g, H) + g, (H, f)) + (H,(f, g)) = 0. \tag{6.115}$$

Înlocuind relațiile (6.112) și (6.113) în (6.115) și folosind proprietățile *parantezelor lui Poisson* rezultă:

$$-\left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right) + \left(g, \frac{\partial f}{\partial t}\right) - ((f,g), H) = 0. \tag{6.116}$$

Cu ajutorul relațiilor:

$$h = f(, g); \tag{6.117}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right), \tag{6.118}$$

relația (6.116) se transformă în (6.114) și astfel afirmația că relația (6.111) constituie și ea o integrală primă a sistemului hamiltonian este demonstrată.

Să presupunem acum cunoscute două integrale prime ale sistemului hamiltonian. Combinîndu-le cu ajutorul relației (6.111) putem găsi o a treia. Combinînd-o acum pe aceasta cu primele două putem găsi alte două integrale prime, care la rîndul lor combinate cu primele trei ne dau alte șase și așa mai departe. Dacă putem în felul acesta găsi $2n$ integrale prime funcțional independente problema integrării sistemului hamiltonian este terminată întrucît din cele $2n$ relații obținute se pot determina cele $2n$ funcții $q_i(t)$, $p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cele $2n$ constante arbitrare rezultînd din condițiile inițiale. S-ar putea însă ca lanțul integralelor prime funcțional independente să se închidă înainte de a obține $2n$ asemenea integrale în sensul că la un moment dat integralele nou găsite sînt simple funcții de integralele anterioare. Un asemenea grup de funcții $f_j(q, p, t)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, integrale prime ale sistemului hamiltonian, care sînt funcțional independente și au proprietatea

Scanned with OKEN Scanner

că orice funcție h_{jk} egală cu *paranteza Poisson* a două funcții f_j și f_k ale grupului:

$$h_{jk} = (f_j, f_k) \tag{6.119}$$

este o funcție de funcțiile grupului:

$$h_{jk} = h_{jk}(f_1, f_2, \ldots, f_m) \tag{6.120}$$

se numește *grup funcțional al sistemului hamiltonian.* Dacă numărul funcțiilor grupului este $m = 2n$ integrarea sistemului hamiltonian este rezolvată. Se pot găsi sisteme hamiltoniene care să admită mai multe grupuri funcționale.

6.1.6. **Transformările canonice și ecuația Hamilton-Jacobi.** Fie un sistem canonic hamiltonian:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.121}$$

O transformare a variabilelor q_i, p_i în Q_i, P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{cases} q_i = q_i(Q, P, t) \\ p_i = p_i(Q, P, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ t = t \end{cases} \tag{6.122}$$

se numește canonică dacă ea transformă sistemul canonic hamiltonian (6.121) într-un nou sistem canonic:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial M}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial M}{\partial Q_i} \; (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.123}$$

în care $M(Q, P, t)$ este o nouă *funcție Hamilton.*

Se poate demonstra că în cazul general o transformare canonică satisface relația:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta q_i - H \cdot \delta t = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \delta Q_i - M \cdot \delta t + \delta V(q, p, Q, P, t), \tag{6.124}$$

în care funcția $V(q, p, Q, P, t)$ este o funcție arbitrară de clasa C^2, numită funcția generatoare a transformării.

Să alegem funcția generatoare V de forma particulară:

$$V = S(q, Q, t) \tag{6.125}$$

astfel ca:

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_j}\right) \neq 0 \quad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots, n) \\ (j = 1, 2, \ldots, n).\end{matrix} \tag{6.126}$$

Introducînd relația (6.125) în (6.124) și identificînd coeficienții variațiilor arbitrare δq_i, δQ_i și δt se obțin relațiile:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{6.127}$$

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{6.128}$$

$$M = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{6.129}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (6.128) se pot scoate q_i funcție de Q_i, P_i și t, datorită condiției (6.126):

$$q_i = q_i(Q, P, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.130}$$

Introducînd aceste relații în (6.127) rezultă:

$$p_i = p_i(Q, P, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.131}$$

și transformarea canonică este perfect determinată.

Să alegem acum funcția generatoare S din relația (6.125) astfel ca noua *funcție Hamilton* M dată de relația (6.129) să fie nulă (ceea ce este oricînd posibil):

$$M = 0. \tag{6.132}$$

În acest caz sistemul hamiltonian transformat (6.123) conduce la:

$$\begin{cases} Q_i = a_i \\ P_i = b_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.133}$$

în care a_i și b_i sînt niște constante arbitrare.

Relația (6.125) se scrie:

$$S = S(q, a, t), \tag{6.134}$$

iar relațiile (6.127) și (6.128) dau:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{6.135}$$

$$b_i = \frac{\partial S}{\partial a_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.136}$$

Introducînd relațiile (6.135) și (6.132) în (6.129) obținem:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{6.137}$$

Această ecuație cu derivate parțiale poartă numele de *ecuația Hamilton-Jacobi*.

Dacă s-a determinat o integrală completă a acestei ecuații, adică o soluție de forma:

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, \quad a_1, \ldots, a_n, t) + C, \tag{6.138}$$

astfel ca:

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \cdot \partial a_j}\right) \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.139}$$

coordonatele generalizate $q_i(t)$ rezultă din egalarea cu cîte o constantă arbitrară b_i a derivatelor parțiale ale lui S în raport cu a_i, conform relației (6.136), iar impulsurile generalizate $p_i(t)$ rezultă apoi prin înlocuirea funcțiilor $q_i(t)$ în relațiile (6.135). Cele $2n$ constante arbitrare a_i și b_i se determină apoi din condițiile inițiale.

Menționăm faptul că *ecuația Hamilton-Jacobi* a jucat un rol hotărîtor în dezvoltarea fizicii moderne.

Scanned with OKEN Scanner

APLICAȚII

1. Roata motoare a unei instalații de extracție de rază R este acționată de un cuplu motor M; greutatea totală a coliviilor este Q_1 și Q_2. Să se determine accelerația unghiulară a roții motoare și tensiunile în cele două ramuri ale cablului AC și BD, considerînd roata motoare ca un cilindru plin de greutate Q_3. Se neglijează rezistențele și greutatea cablurilor (fig. 6.2).

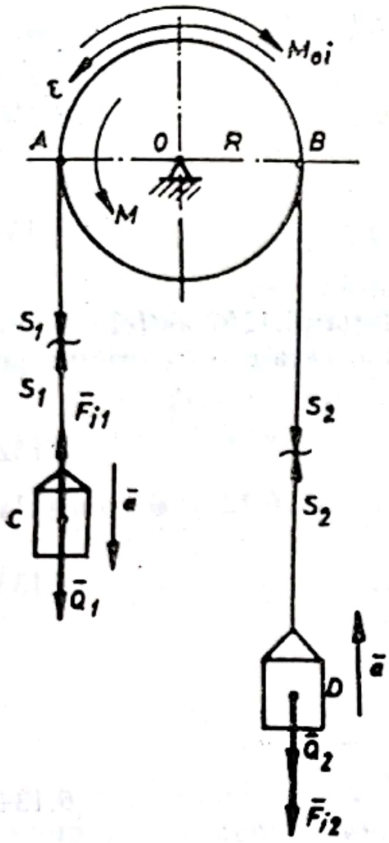


Fig. 6.2

Rezolvare:

Sistemul este format din trei corpuri: cele două colivii și roata motoare.

Asupra celor două colivii acționează următoarele forțe: tensiunile în cele două ramuri ale cablului S_1 și S_2, greutățile coliviilor $\bar{Q}_1$ și $\bar{Q}_2$ ($Q_2 > Q_1$). Punem forțele de inerție $\bar{F}_{i1}$ și $\bar{F}_{i2}$ orientate în sens contrar sensului accelerației $\bar{a}$. Asupra roții motoare acționează cuplul motor M și tensiunile $\bar{S}_1$ și $\bar{S}_2$ în cabluri. Punem momentul de inerție M_{0i} orientat în sens contrar accelerației unghiulare ε.

Aplicînd *principiul lui d'Alembert* vom scrie ecuațiile de echilibru dinamic pentru cele trei corpuri.

$$S_2 - Q_2 - F_{i2} = 0;\ Q_1 - S_1 - F_{i1} = 0;\qquad M + S_1R - S_2R - M_{0i} = 0, \tag{1}$$

unde:

$$F_{i1} = \frac{Q_1}{g}a = \frac{Q_1}{g}\varepsilon R;\quad F_{i2} = \frac{Q_2}{g}a = \frac{Q_2}{g}\varepsilon R;\quad M_{0i} = J_0\cdot\varepsilon = \frac{Q_3}{g}\frac{R^2}{2}\varepsilon.$$

Înlocuind expresiile de mai sus în relațiile (1) avem:

$$S_2 - Q_2 - \frac{Q_2}{g}\varepsilon R = 0;\quad Q_1 - S_1 - \frac{Q_1}{g}\varepsilon R = 0;\quad M + S_1R - S_2R - \frac{Q_3}{g}\frac{R^2}{2}\varepsilon = 0.$$

Din prima și a doua relație rezultă:

$$S_2 = Q_2 + \frac{Q_2}{g}\varepsilon R;\quad S_1 = Q_1 - \frac{Q_1}{g}\varepsilon R$$

și înlocuind în a treia avem:

$$\varepsilon = \frac{g[M - (Q_2 - Q_1)R]}{R^2\left(Q_1 + Q_2 + \dfrac{Q_3}{2}\right)}.$$

Avînd în vedere că $a = R\varepsilon$, avem $a = \dfrac{g[M - (Q_2 - Q_1)R]}{R\left(Q_1 + Q_2 + \dfrac{Q_3}{2}\right)}$.

Valorile tensiunilor S_1 și S_2 sînt date de relațiile:

$$S_2 = Q_2\left[1 + \frac{M - (Q_2 - Q_1)R}{R\left(Q_1 + Q_2 + \dfrac{Q_3}{2}\right)}\right];\qquad S_1 = Q_1\left[1 - \frac{M - (Q_2 - Q_1)R}{R\left(Q_1 + Q_2 + \dfrac{Q_3}{2}\right)}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră grinda AD, articulată în D și C și simplu rezemată în A și B (fig. 6.3, *a*). Asupra grinzii AC acționează forțele verticale $F_1 = 8\,000$ daN și $F_2 = 6\,000$ daN, iar asupra grinzii CD, cuplul de forțe având momentul $M = 4a$ daN · m orientat ca în figură. Dimensiunile sînt redate în figură. Să se determine reacțiunile în A, B și D. Greutatea barelor se poate neglija.

Rezolvare:

Considerăm grinda AD ca un sistem rigid cu două grade de libertate și presupunem grinzile AC și CD în echilibru.

Pentru a determina reacțiunea $\bar{R}_A$, înlocuim reazemul simplu din A cu reacțiunea $\bar{R}_A$. Dăm o deplasare elementară δr_A punctului A pe direcția verticală. Ca urmare a acestei deplasări grinda va lua poziția redată în figura 6.3, *b*. Notăm cu δr_K și δr_L deplasările elementare virtuale ale punctelor K și L și cu $\delta\varphi$ deplasarea unghiulară a grinzii CD.

Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\delta r_A = 2\delta r_K = 4\delta r_L = 2\delta r_C = 4a\delta\varphi. \tag{1}$$

Aplicînd principiul deplasărilor virtuale avem:

$$R_A \cdot \delta r_A - F_1\delta r_K + F_2\delta r_L + M \cdot \delta\varphi = 0 \tag{2}$$

Înlocuind valorile din (1) în (2) după o serie de transformări avem:

$$R_A - \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{4}F_2 + \frac{1}{4a}M = 0,$$

de unde rezultă valoarea reacțiunii $R_A = 1{,}5$ daN.

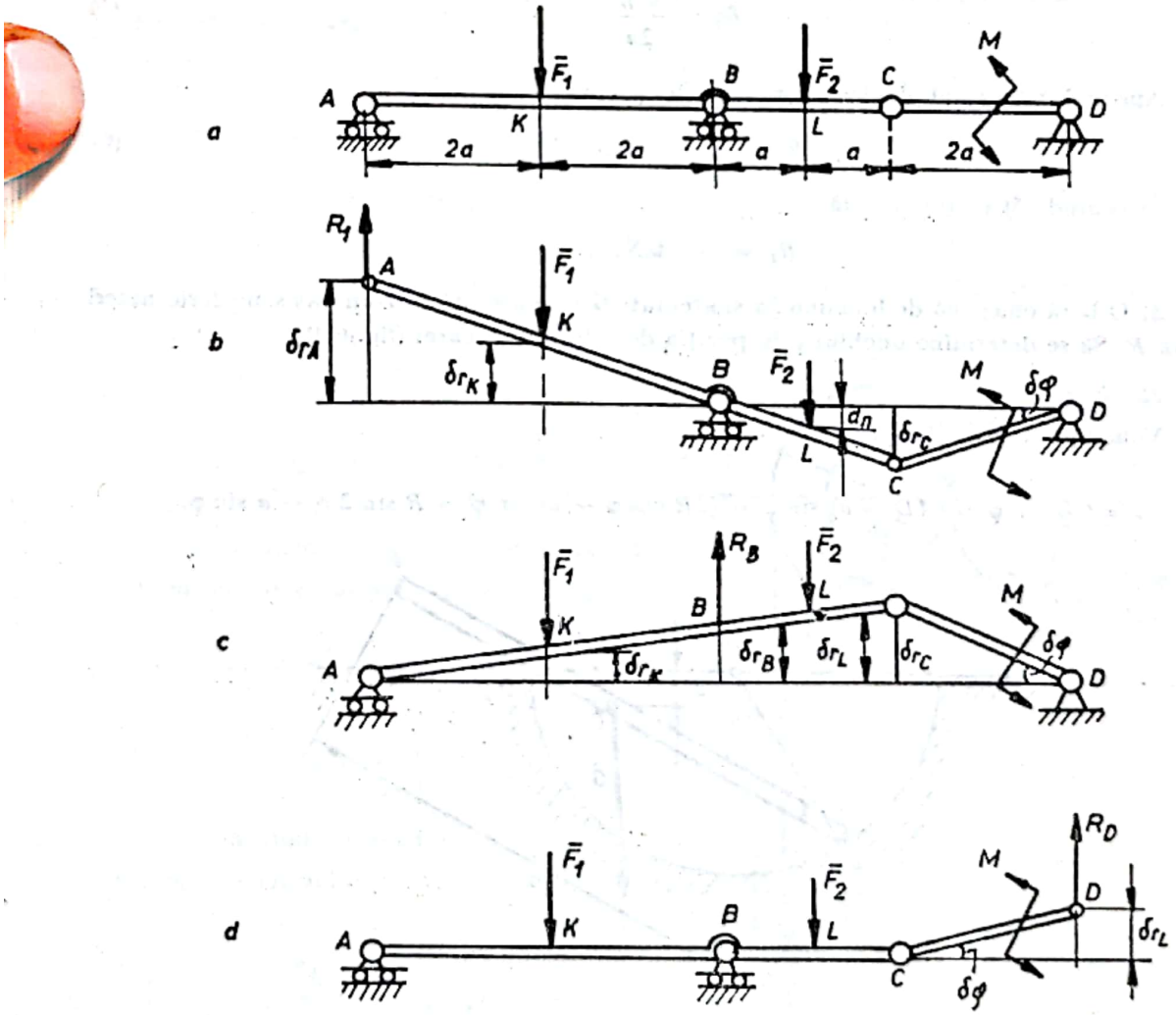


Fig. 6.3

Pentru determinarea reacțiunii $\bar{R}_B$ se înlocuiește reazemul simplu din B cu reacțiunea R_B. Se dă articulației C o deplasare virtuală elementară δr_c pe direcție verticală și grinda va lua poziția redată în figura 6.3, *c*.

Notînd cu δr_K, δr_L și δr_B deplasările elementare virtuale ale punctelor K, L și B și cu $\delta\varphi$ deplasarea unghiulară a grinzii CD, din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\delta r_c = \frac{5}{6}\,\delta r_L = \frac{3}{2}\,\delta r_B = 3\delta r_K = 2a\delta\varphi. \tag{3}$$

Aplicînd principiul deplasărilor virtuale avem:

$$-F_1 \cdot \delta r_K + R_B \cdot \delta r_B - F_2 \cdot \delta r_L - M\delta\varphi = 0. \tag{4}$$

Înlocuind relația (3) în (4) și după o serie de transformări obținem:

$$-\frac{1}{3}F_1 + \frac{2}{3}R_B - \frac{5}{6}F_2 - \frac{M}{2a} = 0,$$

de unde:

$$R_B = 14{,}5 \text{ daN}.$$

Pentru a determina reacțiunea $\bar{R}_D$ înlocuim articulația D cu reacțiunea $\bar{R}_D$. Dăm o deplasare elementară virtuală δr_D punctului D pe direcție verticală (fig. 6.3, *d*). Prin aceasta grinda CD se va roti în jurul articulației din C cu unghiul:

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_D}{2a}. \tag{5}$$

Aplicînd principiul deplasărilor virtuale avem:

$$R_D \cdot \delta r_D + M\delta\varphi = 0. \tag{6}$$

Înlocuind (5) în (6) rezultă:

$$R_D = -2 \text{ daN}.$$

3. O bară omogenă de lungime $2a$ și greutate G este așezată într-un vas semisferic neted de rază R. Să se determine unghiul φ în poziția de echilibru a barei (fig. 6.4).

Rezolvare:

Vom aplica *principiul lui Toricelli*.

Avem:

$$z_c = CD \sin\varphi = (AD - a)\sin\varphi = (2R\cos\varphi - a)\sin\varphi = R\sin 2\varphi - a\sin\varphi.$$

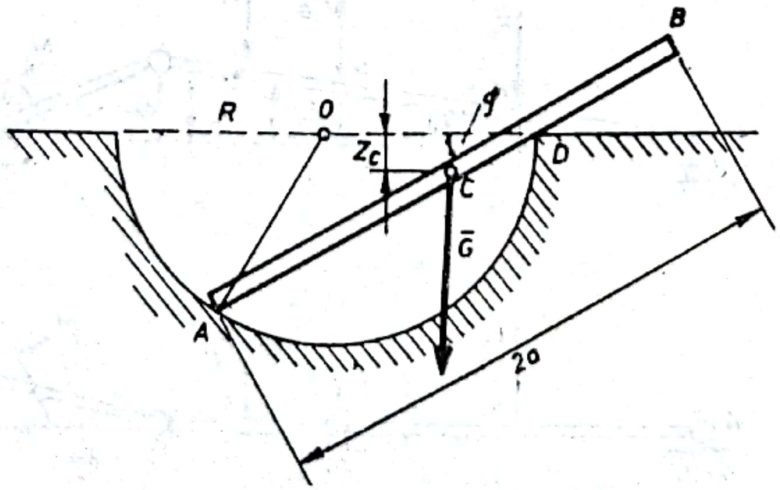


Fig. 6.4

Deci:

$$z_c'(\varphi) = 2R\cos 2\varphi - a\cos\varphi = 0;$$

$$2R(2\cos^2\varphi - 1) - a\cos\varphi = 0;$$

$$4R\cos^2\varphi - a\cos\varphi - 2R = 0,$$

de unde:

$$\cos\varphi = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32R^2}}{8R}.$$

4. Se consideră macaraua din figura 6.5. Asupra roții dințate 2 de greutate G_2 având raza de inerție i_2, acționează cuplul motor M. Să se determine accelerația de ridicare a_A corpului A de greutate Q, neglijind greutatea cablului și forțele de frecare în axe. Toba pe care se înfășoară cablul împreună cu rota dințată 1, au greutatea totală G_1 și raza de inerție i_1. Razele roților dințate sînt r_1 și r_2, iar raza tobei r.

Rezolvare: Figurăm forța dată Q și momentul motor M (forțele G_1 și G_2 sînt fixe); de asemenea forța de inerție $\bar{F}_{i_A}$ și momentele de inerție C_{i_1} și C_{i_2}. Valorile lor sînt date de relațiile:

$$F_{i_A} = \frac{Q}{g}a_A; \qquad C_{i_1} = \frac{G_1}{g}i_1^2\varepsilon_1; \qquad C_{i_2} = \frac{G_2}{g}i_2^2\varepsilon_2. \tag{1}$$

Dînd întregului sistem o deplasare elementară virtuală ca în figură ecuația lucrului mecanic virtual se scrie:

$$-(Q + F_{i_A})\,\delta s_A - C_{i_1}\delta\varphi_1 + (M - C_{i_2})\,\delta\varphi_2 = 0. \tag{2}$$

Exprimînd toate variabilele în funcție de $\delta\varphi_1$ vom avea:

$$\delta s_A = r\delta\varphi_1; \quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{și} \quad \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1. \tag{3}$$

Înlocuind în relația (2) expresiile (1) și (3) și făcînd unele transformări obținem:

$$Q\left(1 + \frac{a_A}{g}\right)r + \frac{G_1}{g}i_1^2\varepsilon_1 + \frac{G_2}{g}i_2^2\varepsilon_2\frac{r_1}{r_2} - M\frac{r_1}{r_2} = 0. \tag{4}$$

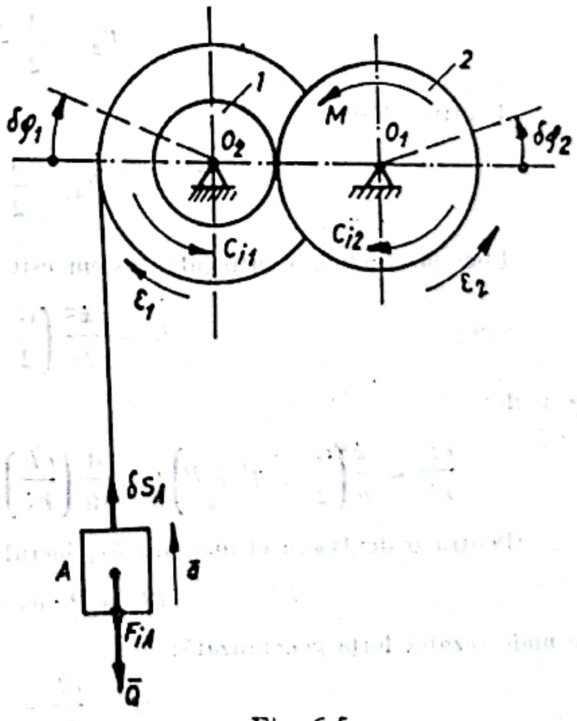


Fig. 6.5

Exprimăm accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2 în funcție de accelerația liniară a_A:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\varepsilon_1;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\frac{a_A}{r}.$$

Înlocuind în relația (4) rezultă valoarea accelerației a_A:

$$a_A = \frac{\frac{r_1}{r_2}M - rQ}{rQ + \frac{i_1^2}{r}G_1 + \frac{i_2^2}{r}\frac{r_1^2}{r_2^2}G_2}\,g.$$

Scanned with OKEN Scanner

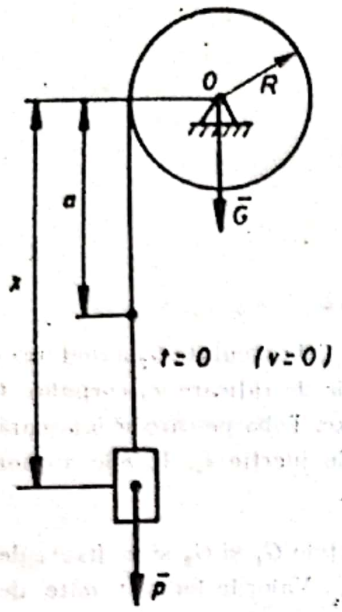


Fig. 6.6

5. Să se studieze mișcarea pe verticală a unei colivii de mină de greutate P, atîrnată de un cablu de lungime l și de greutate q pe metru liniar, care se desfășoară de pe o tobă de rază R și greutate G. În timpul mișcării se consideră că motorul de acționare este deconectat de la rețea și se neglijează frecările. În momentul inițial lungimea desfășurată a cablului este a, iar colivia pleacă din repaus (fig. 6.6).

Rezolvare: Sistemul are un grad de libertate, și poziția sa este determinată în orice moment al mișcării, prin abscisa x.

Ecuația lui Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1)$$

va deveni $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial E}{\partial x} = Q$, unde $Q = \dfrac{\delta L}{\delta x}$.

Energia cinetică a întregului sistem va fi:

$$E = E_1 + E_2 + E_3,$$

unde: E_1 este energia cinetică a tobei; E_2 — energia cinetică a cablului; E_3 — energia cinetică a coliviei.

Pentru tobă avem:

$$E_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \omega^2.$$

Pentru o poziție x a coliviei, avem $v = \dot{x} = R\omega$, de unde $\omega = \dfrac{\dot{x}}{R}$, deci:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{G\dot{x}^2}{4g}.$$

Pentru cablu:

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{ql}{g} \dot{x}^2;$$

Pentru colivie:

$$E_3 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{x}^2.$$

Energia cinetică a întregului sistem este deci:

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2g}\left(\frac{G}{2} + ql + P\right),$$

de unde:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{g}\left(\frac{G}{2} + ql + P\right); \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\ddot{x}}{g}\left(\frac{G}{2} + ql + P\right); \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

Pentru o deplasare elementară δx, lucrul mecanic elementar este:

$$\delta L = P \cdot \delta x + qx \cdot \mathrm{d}x,$$

de unde rezultă forța generalizată:

$$Q = \frac{\delta L}{\delta x} = P + qx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în *ecuația lui Lagrange*, avem:

$$\frac{\ddot{x}}{g}\left(\frac{G}{2}+ql+P\right)=P+qx,$$

sau:

$$\ddot{x}-\frac{qg}{\frac{G}{2}+ql+P}x=\frac{Pg}{\frac{G}{2}+ql+P}.$$

Condițiile inițiale sînt: $x(0)=a$; $\dot{x}(0)=0$.

Integrînd ecuația diferențială de mai sus și ținînd seama de condițiile inițiale, ecuația mișcării va lua forma:

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{P}{q}\right)(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})-\frac{P}{q},$$

unde:

$$\alpha=\sqrt{\frac{qg}{\frac{G}{2}+ql+P}}.$$

6. Brațul AB, considerat ca o tijă de lungime $2l$ și masa m, se rotește în jurul axului O al roții dințate fixe *1*, sub acțiunea unui moment motor M și antrenează doi sateliți *2* și *2'* de raze r și masa $m_2=m$ fiecare și care angrenează cu roata fixă *1*. Sateliții pun în mișcare coroana dințată în interior *3* de masă $m_3=\frac{5}{3}m$. La periferia coroanei dințate *3* se aplică o forță rezistentă F.

Să se determine accelerația unghiulară ε a brațului dacă roțile *2* și *2'* se pot considera ca niște discuri pline, iar masa coroanei dințate *3* este uniform repartizată la periferia sa (fig. 6.7).

Rezolvare:

Poziția întregului mecanism poate fi determinată printr-un singur parametru, unghiul φ de rotire al brațului AB. *Ecuația lui Lagrange* în acest caz va deveni:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E}{\partial\varphi}=Q. \qquad (1)$$

Energia cinetică totală a sistemului E este formată din energia cinetică E_{AB} a brațului AB, energia cinetică a celor doi sateliți $2E_2$ și energia cinetică E_3 a coroanei dințate *3*, adică:

$$E=E_{AB}+2E_2+E_3=\frac{J\omega^2}{2}+$$

$$+2\left(\frac{m_2v_A^2}{2}+\frac{J_2\omega_2^2}{2}\right)+\frac{J_3\omega_3^2}{2}, \qquad (2)$$

unde J și J_3 sînt momentele de inerție ale brațului și roții *3* în raport cu axa *0*, iar J_2 momentul de inerție al sateliților *2* în raport cu axele de rotație A și B.

Avînd în vedere că viteza generalizată este $\omega=\dot{\varphi}$, expresiile vitezelor v_A și ω_2 devin:

$$v_A=\omega\cdot OA=\omega l; \qquad \omega_2=\frac{v_A}{CA}=\frac{\omega l}{r},$$

unde C este centrul instantaneu de rotație al roții *2*.

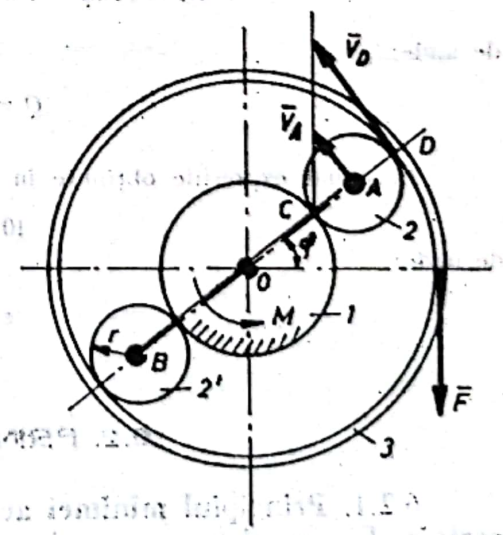


Fig. 6.7

Pentru determinarea vitezei unghiulare ω_3 ținem seama că în punctul de angrenare D, $v_D = 2\,v_A = 2\omega l$, prin urmare:

$$\omega_3 = \frac{v_D}{OD} = \frac{2\omega l}{l + r}.$$

Momentele de inerție vor fi:

$$J = \frac{m(AB)^2}{12} = \frac{m4l^2}{12} = \frac{ml^2}{3}; \qquad J_2 = \frac{m_2 r^2}{2};$$

$$J_3 = m_3\, OD^2 = \frac{5}{3}\, m(l + r)^2.$$

Înlocuind toate expresiile de mai sus în relația (2) a energiei cinetice avem:

$$E = \frac{ml^2}{6}\omega^2 + m\omega^2 l^2 + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\omega^2 l^2}{r^2} + \frac{5}{6}\, m(l + r)^2 \frac{4\omega^2 l^2}{(l + r)^2};$$

$$E = \frac{ml^2\omega^2}{6} + m\,\omega^2 l^2 + \frac{ml^2\omega^2}{2} + \frac{10}{3}\,\omega^2 l^2 m = 5\omega^2 l^2 m = 5l^2\dot{\varphi}^2 m,$$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = 10 l^2 m\dot{\varphi}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 10 m l^2 \ddot{\varphi} = 10 \mathrm{m} l^2 \varepsilon,$$

unde ε este accelerația unghiulară a brațului.

Deoarece E nu depinde de φ rezultă $\dfrac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$.

Să determinăm acum forțele generalizate.

Prin rotirea brațului AB cu unghiul elementar virtual $\delta\varphi$, suma lucrurilor mecanice elementare virtuale va fi:

$$\delta L = M\delta\varphi - F(l + r)\,\delta\varphi_3, \qquad (3)$$

unde $\delta\varphi_3$ este unghiul de rotație al roții 3 și este dat de relația:

$$\delta\varphi_3 = \frac{2l}{l + r}\,\delta\varphi.$$

Înlocuind în relația (3) rezultă:

$$\delta L = M\delta\varphi - F(l + r)\,\frac{2l}{l + r}\,\delta\varphi = (M - 2Fl)\delta\varphi,$$

de unde:

$$Q = \frac{\delta L}{\delta\varphi} = M - 2Fl.$$

Înlocuind expresiile obținute în *ecuația lui Lagrange* obținem:

$$10\ \mathrm{m}l^2\varepsilon = M - 2Fl,$$

de unde:

$$\varepsilon = \frac{M - 2Fl}{10ml^2}.$$

6.2. PRINCIPII INTEGRALE

6.2.1. Principiul minimei acțiuni al lui Hamilton și principiul lui Maupertuis. Fie un sistem mecanic cu legături olonome ideale acționat de forțe

Scanned with OKEN Scanner

exterioare conservative, pentru care putem scrie deci *ecuațiile Lagrange* (6.81) sub forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.140}$$

Observăm că acest sistem de ecuații este de tipul sistemului de *ecuații Euler* (1.391) din a cărui rezolvare rezultă setul de funcții $q_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ care realizează extremum-ul funcționalei:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q, \dot{q}_i) \cdot \mathrm{d}t, \tag{6.141}$$

de tipul (1.390). Se poate demonstra că acest extremum este un minim. Funcționala S se numește *acțiune*.

În consecință putem afirma că din totalitatea mișcărilor posibile (compatibile cu legăturile) mișcarea reală a unui sistem olonom conservativ este acea mișcare pentru care acțiunea S este minimă:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i) \cdot \mathrm{d}t = \min, \quad (\delta S = 0). \tag{6.142}$$

Acesta este *principiul minimei acțiuni al lui Hamilton.*

În cazul particular al unui sistem cu legături olonome scleronome acționat de forțe exterioare conservative am văzut (6.98) că energia mecanică se conservă:

$$E_c + E_p = E_c - U = C. \tag{6.143}$$

În acest caz potențialul cinetic $\mathcal{L}$ dat de relația (6.80) devine:

$$\mathcal{L} = E_c + U = E_c + (E_c - C) = 2E_c - C \tag{6.144}$$

și principiul lui Hamilton (6.142) se transformă în:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2E_c \cdot \mathrm{d}t = \min. \tag{6.145}$$

care poartă numele de *principiu al lui Maupertuis*, care a stabilit acest principiu pentru cazul simplu al unui punct material pentru care:

$$2E_c \cdot \mathrm{d}t = 2\frac{mv^2}{2}\mathrm{d}t = m \cdot v \cdot v \cdot \mathrm{d}t = m \cdot v \cdot \mathrm{d}s, \tag{6.146}$$

astfel încît relația (6.145) primește forma simplă:

$$A = \int_{P_1}^{P_2} m \cdot v \cdot \mathrm{d}s = \min, \tag{6.147}$$

P_1 și P_2 fiind pozițiile punctului la momentele t_1 și t_2.

Din punct de vedere istoric acesta a fost primul principiu integral (variațional) descoperit în Mecanică. El a fost publicat în 1745 la Berlin și a jucat un rol important în dezvoltarea mecanicii clasice și a teoriei relativității.

6.2.2. **Considerații asupra principiului lui Hamilton și a consecințelor sale.** *Principiul lui Hamilton* poate fi considerat ca unica lege care guvernează mișcarea sistemelor mecanice olonome conservative. Acest adevăr devine evident observînd doar că *ecuațiile lui Euler* din calculul variațional ce-

Scanned with OKEN Scanner

rute de rezolvarea problemei variaționale (6.142) sînt chiar *ecuațiile lui Lagrange* de speța a doua (6.140) care guvernează mișcarea acestui sistem.

Datorită acestei afirmații s-au scris tratate de mecanică în care punctul de plecare este tocmai acest principiu. Un exemplu îl constituie „*Mecanica*" lui L. D. Landau și E. M. Lifșiț, Editura „Nauka", Moscova 1965, apărută în traducere în Editura Tehnică București, 1966. În acest tratat se fac pe lîngă alte deducții interesante și următoarele: se deduce legea conservării energiei mecanice din considerații privind omogenitatea timpului, legea conservării impulsului total din considerații privind omogenitatea spațiului (introducînd pe această cale și noțiunea de centru de inerție sau centru al maselor) și legea conservării momentului cinetic total din considerații privind izotropia spațiului.

Pe lîngă acestea, o serie de alte concluzii deduse din *principiul lui Hamilton* întăresc ideea că acesta are un rol privilegiat în studiul mișcării sistemelor mecanice.

Mai menționăm faptul că principiul minimei acțiuni l-a inspirat și pe *Einstein* în formularea teoriei relativității generalizate.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. André Angot *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații*, București. Editura tehnică, 1966.
2. Appel Paul *Traité de mécanique rationnelle* (vol. I, II, III, IV, V). Gauthier-Villars, Paris, 1926.
3. Atanasiu M. *Mecanică tehnică*, București, Editura tehnică, 1963.
4. Cârja-Bolog, R.C. *Vibrațiile firelor și barelor cu distribuție discontinuă de masă*. Referat de doctorat nr. 1, Petroșani, 1974.
5. Cârja-Bolog, R.C. *Vibrațiile nedisipative ale barelor drepte cu secțiune transversală variabilă pe lungime*. Referat de doctorat nr. 2, Constanța, 1975.
6. Chen Yu *Vibrations: Theoretical Methods*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc. Reading, U.S.A. 1966.
7. Constantinescu, I.N. Kecs, W. Darabont, A. *Mecanică*. Vol. I și II. Litografia Institutului de Mine Petroșani, 1956.
8. Constantinescu, I.N. *Distribuția vitezelor în mișcarea generală a unui corp rigid* Publicată în „Zeszity Naukowo Akademii Gorniczo-Nutniczy, Nr. 15, H Z.8— 1965. Krakow-Polonia.
9. Constantinescu I.N. *Studiul mișcării cu puncte de discontinuitate a unei plăci plane*. Publicată în „Zeszity Naukovo Akademii Gorniczo-Nutniczy", Nr. 15, H Z. 8— 1965, Krakow-Polonia.
10. Constantinescu, I.N. Tocaci, E. *Sur les equations de deuxiéme èspèce de Lagrange pur les cas des systèmes materiaux percutes*. Publicată în „Zeszity Naukovo Akademii Gorniczo-Hutniczej, Elektryfikacja i mechanizacja gornitr", z. 33, Krakow, Polonia-1969.
11. Constantinescu, I.N., Tocaci E., Noaghi, T. *Extinderea relațiilor lui Frenet la curbele cu puncte neregulate*. Publicată în: Anales Polonici-Mathematici XXVIII (1973) Warszawa, Poland și Buletinul Inst. Polit. Iași, tom. XX(XXIV) fasc. 3—4, 1974.
12. Constantinescu I.N., *Mișcarea firului sub acțiunea forțelor percutante*. Publicată în Lucrările științifice ale I.M. Petroșani, Vol. VI seria 4, 1969 și „Rudarsko Metalurski Zbornik" Ljublijana nr. 4/1970.
13. Constantinescu, I.N. *Aplicații ale funcțiilor generalizate la studiul echilibrului firelor*. Publicată în „Revue X" AIA Bruxelles, Belgique, nr. 3, 1970.
14. Constantinescu, I.N. *Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor la studiul mișcărilor vibropercutante*. Publicată în: „Rudarsko-Metalurski-Zbornik" Ljublijana, nr. 4/1970.
15. Constantinescu, I.N. *Contribuții la studiul cinematicii și dinamicii transportoarelor cu raclete*. Teză doctorat, 1970.
16. Constantinescu, I.N., Darabont, A. *Asupra dinamicii punctului material cu caracteristici discontinuu variabile*. Publicată în „Bulet. șt. și tehn. al Inst. Politehn. „Traian Vuia" Timișoara, seria Mat. fiz. Tom. 17 fasc. 1. I-VI. 1972.
17. Constantinescu, I.N., Darabont, A. *Vibrațiile proprii și forțate ale barelor și firelor cu mase adiționale concentrate*. Publicată în Revista Academiei de științe Kiev, Mecanică aplicată nr. 5/972.

Scanned with OKEN Scanner

18. Constantinescu, I.N., Cârja-Bolog, R.C. *Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*. Bul. St. Inst. Pedagogic Constanța, 1971.
19. Constantinescu, I.N. Cârja-Bolog, R.C. *Mișcarea în coordonate polare a unui punct material acționat de forțe continui și percuții coplanare*. Publicată în Bulet. Științ. al cadrelor didactice din I.M. Petroșani, Vol. VIII, Seria IV. 1971.
20. Gaboș, Z. Mangeron, D., Stan, I. *Fundamentele mecanicii*. București, Editura Academiei RSR, 1962.
21. Iacob, Caius *Mecanică teoretică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
22. Kecs, W., Teodorescu, P.P. *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, București, Editura Academiei, 1971.
23. Landau, L.D., Lifșiț, E.M. *Mecanică* București, Editura Tehnică, 1966.
24. Levi Civita, T., Amaldi, U. *Lezioni di mecanica razionale* (Vol. I, II, III). Ed. Zonichelli, Bologna, Italia, 1923.
25. Méchtcherski, *Recueil de problèmes de mécanique rationnelle*, Moscova, Ed. Mir, 1973.
26. Newton, I. *Principiile matematice ale filozofiei naturale* (traducere). București, Editura Academiei, 1956.
27. Onicescu, O. *Mecanica*. București, Editura tehnică, 1969.
28. Pérès, J. *Mécanique générale* Paris, Ed. Masson, 1962.
29. Ripianu, A. *Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*. București, Editura Academiei, 1969.
30. Stoenescu, Al. *Elemente de cosmonautică*, București, Editura tehnică, 1962.
31. Tocaci, E. *Fenomene discontinui în mecanică și rezistența materialelor*, București, Ed. Academiei, 1974.
32. Voinaroski, R. *Mecanică teoretică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
33. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauș u, V. *Mecanică teoretică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1975.

Plan editură: 5716. Tiraj: 6200+80 ex. legate. Coli de tipar: 23,75. Bun de tipar: 18. XII. '78

Tiparul executat sub comanda
Nr. 2481 la
Intreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București.
Republica Socialistă România

Erată

Pag.	Rîndul (relația)	În loc de	Se va citi
61	(1.269)	$0 \in [a,\ b]$ $0 \notin [a,\ b]$	$x \in [a,\ b]$ $x \notin [a,\ b]$
114	(2.91)	$\bar{a}_0 = \bar{V}_0 + \ddot{\bar{r}}_0$	$\bar{a}_0 = \bar{V}_0 = \ddot{\bar{r}}_0$
135	(2.241)	$+ \bar{r}_1 \times d\bar{F}_L \times \bar{r}_1 \times d\bar{F}_I$	$+ \bar{r}_1 \times d\bar{F}_L + \bar{r}_1 \times d\bar{F}_I$
199	4 de jos	Mx	My
215	18	$0 = 0$	$0 = 0$
339	13	$< u_i, F_E, (x, \tau) >$	$< u_i, F_E(x, \tau) >$
363	(6.115)	$+ g, (H, f)) +$	$+ (g, (H, f))$
363	(6.117)	$h = f(, g)$	$h = (f, g)$

Scanned with OKEN Scanner